重庆市第一中学校2023-2024学年高三下学期2月开学考试

数学试卷

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知集合$A=\left\{x\left|\frac{2}{x}\le 1\right.\right\}$，$B=\left\{x|\ x^2-2x>0\right\}$，则（　）

A．$A\subseteq B$　　B．$A\supseteq B$　　C．$A=B$　　D．$A\cup B=\mathbf{R}$

2．若复数z满足$\mathrm{i}z=1+\mathrm{i}$，其共轭复数为$\overline{z}$，则下列说法正确的是（　）

A．z对应的点在第一象限　　B．z的虚部为$-\mathrm{i}$

C．$\overline{z}=1+\mathrm{i}$　　D．$|z|=2$

3．已知直线$m:(a-2)x+ay-2=0$和直线$n:x+3ay+1=0$，则“$a=\frac{7}{3}$”是“$m//n$”的（　）

A．充要条件　　B．必要不充分条件

C．充分不必要条件　　D．既不充分也不必要条件

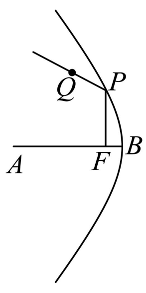
4．已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_n=\frac{a_{n-1}+1}{1-a_{n-1}}\left(n\ge 2,n\in \mathbf{N}_+\right)$，$a_1=2$，则$\left\{a_n\right\}$的前198项和为（　）

A．-57　　B．-58　　C．$-\frac{343}{6}$　　D．$-\frac{349}{6}$

5．已知向量$\vec{a}$与$\vec{b}$是非零向量，且满足$\vec{a}-\vec{b}$在$\vec{b}$上的投影向量为$-2\vec{b}$，$\left|\vec{a}\right|=2\left|\vec{b}\right|$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为（　）

A．120°　　B．150°　　C．60°　　D．90°

6．已知双曲线具有光学性质：从双曲线的一个焦点出发的光线，经双曲线反射后，反射光线的反向延长线经过另一个焦点.如图所示，一镜面的轴截面图是双曲线的一部分，AB是它的一条对称轴，F是它的左焦点，光线从焦点F发出，经过镜面上点P，反射光线为PQ，若$\angle AFP=90°$，$\angle FPQ=135°$，则该双曲线的离心率为（　）



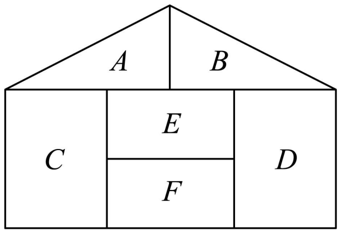
A．2　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{2}+1$　　D．$\sqrt{3}$

7．已知定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)=\left(2x^2+4x+a+5\right)\mathrm{e}^{-x}$，若存在$m$，使得对任意$x$，都有

$f(x) \geq f(m)$，则a的取值范围是（　）

A．$a<-1$　　B．$a \leq 0$　　C．$a \leq -2$　　D．$a \leq -3$

8．用四种不同的颜色给如图所示的六块区域A，B，C，D，E，F涂色，要求相邻区域涂不同颜色，则涂色方法的总数是（　）



A．120　　B．72　　C．48　　D．24

二、多选题

9．关于函数$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，则下列命题正确的是（　）

A．$f(x)$的图象关于点$\left(\frac{5\pi}{3},0\right)$对称

B．函数$f(x)$的最小正周期为2π

C．$f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}\right]$上单调递增

D．将$f(x)$图象上所有点的横坐标伸长为原来的2倍，再把图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得到的函数为$g(x)=-2\cos x$

10．下列说法中，正确的是（　）

A．若随机变量$X \sim N\left(2,\sigma^2\right)$，且$P(X>6)=0.4$，则$P(-2<X<2)=0.2$

B．一组数据6，7，7，9，13，14，16，17，21的第70百分位数为16

C．盒子中装有除颜色外完全相同的5个黄球和3个蓝球，从袋中有放回地依次抽取2个球，第一次抽到蓝球的情况下第二次也抽到蓝球的概率为$\frac{3}{8}$

D．设随机事件A，B，已知A事件发生的概率为0.3，在A发生的条件下B发生的概率为0.4，在A不发生的条件下B发生的概率为0.2，则B发生的概率为0.26

11．已知定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$，$f(x-2)$是奇函数，$f(x-1)$是偶函数，当$x \in [-1,0]$，$f(x)=ax^2+bx$，$f(1)=2$，$f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{4}$，则下列说法中正确的有（　）

A．函数$f(x)$的最小正周期为4

B．函数$f(x)$关于点$(1,0)$对称

C．$f(2023)+f(2025)=0$

D．函数$g(x)=f(x)-\ln|x|$有 8 个不同零点

12．在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=1$，E为A_1D_1的中点，F是正方形BB_1C_1C内部一点（不含边界），则下列说法正确的是（　　）

A．平面$FBD_1\perp$平面A_1C_1D

B．平面BB_1C_1C内存在一条直线与直线EF成30°角

C．若F到BC边距离为d，且$EF^2-d^2=1$，则点F的轨迹为抛物线的一部分

D．以$\triangle AA_1D_1$的边AD_1所在直线为旋转轴将$\triangle AA_1D_1$旋转一周，则在旋转过程中，A_1到平面AB_1C的距离的取值范围是$\left[\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{6}\right]$

三、填空题

13．设$(x+1)^6=a_0+a_1(1-x)+a_2(1-x)^2+\cdots+a_6(1-x)^6$，则$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=$______．

14．已知点P为直线$x-2\sqrt{2}y+5=0$上的动点，平面内的动点Q到两定点$M(1,0)$，$N(3,0)$的距离分别为$|MQ|$和$|NQ|$，且$\frac{|MQ|}{|NQ|}=\frac{1}{2}$，则点$P$和点$Q$距离的最小值为______．

15．已知$x>1$，$y>1$，$a=\log_2 x$，$b=\log_2\sqrt{y}$，且$\frac{1}{a+2b}+\frac{2}{b+1}=2$，则$xy^2$的最小值为______．

16．已知$f(x)=\sin\omega x\cos\frac{\pi}{5}+\cos\omega x\cos\frac{3\pi}{10}(\omega>0)$，若$f(x)$在$\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$内恰有两个零点，则$\omega$的取值范围是______．

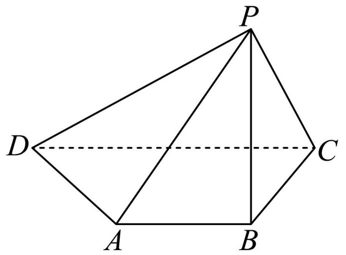
四、解答题

17．已知$\triangle ABC$的三个内角A，B，C所对边的长分别为a，b，c，$\sin C=\sqrt{2}\sin A$，$b=6$．

(1)若$B=\frac{\pi}{4}$，求c的值；

(2)若$C=2A$，求$\triangle ABC$的面积．

18．已知四棱锥$P-ABCD$的底面$ABCD$为等腰梯形，$AB//CD$，$AB=2$，$AD=\sqrt{2}$，$CD=4$，$AD\perp PC$，$PB\perp BC$．



(1)证明：$PB \perp$平面$ABCD$；

(2)若四棱锥$P-ABCD$的体积为4，求直线PA与平面PCD所成夹角的正弦值．

19．已知数列$\{a_n\}$每一项都不为0，$a_1=2$，记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，且$a_{n+1}a_n-2S_n=4$．

(1)求$\{a_{2n}\}$的通项公式；

(2)求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n．

20．当前，人工智能技术以前所未有的速度迅猛发展，并逐步影响我们的方方面面，人工智能被认为是推动未来社会发展和解决人类面临的全球性问题的重要手段．某公司在这个领域逐年加大投入，以下是近年来该公司对产品研发年投入额x（单位：百万元）与其年销售量y（单位：千件）的数据统计表．

x	1	2	3	4	5	6
y	0.5	1	1.5	3	6	12
$z=\ln y$	-0.7	0	0.4	1.1	1.8	2.5

(1)公司拟分别用①$y=bx+a$和②$y=\mathrm{e}^{nx+m}$两种方案作为年销售量y关于年投入额x的回归分析模型，请根据已知数据，确定方案①和②的经验回归方程；（a,b,m,n计算过程保留到小数点后两位，最后结果保留到小数点后一位）

(2)根据下表数据，用决定系数R^2（只需比较出大小）比较两种模型的拟合效果哪种更好，并选择拟合精度更高的模型，预测年投入额为7百万元时，产品的销售量是多少?

经验回归方程	$y=bx+a$	$y=\mathrm{e}^{nx+m}$
残差平方和$\sum_{i=1}^{6}\left(y_i-\hat{y}_i\right)^2$	18.29	0.65

参考公式及数据：$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$，$R^2=1-\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\hat{y}_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}$，$\sum_{i=1}^{6}x_iy_i=121$，

$\sum_{i=1}^{6}x_i^2=91$，$\sum_{i=1}^{6}x_iz_i=28.9$，$\overline{z}=\frac{1}{6}(-0.7+0+0.4+1.1+1.8+2.5)=0.85$，$e^{2.8}\approx16.5$，$e^3\approx20.1$.

21．已知$f(x)=e^x+\sin x$，$g(x)=a\ln(x+1)-1$．

(1)若$f(x)$在$(0,f(0))$处的切线也与$g(x)$的图象相切，求a的值；

(2)若$f(x)+g(x)\geq0$在$x\in(-1,+\infty)$恒成立，求a的取值集合.

22．在平面直角坐标系中，过直线$l:x=-\frac{1}{4}$上任一点M作该直线的垂线PM，$F\left(\frac{1}{4},0\right)$，线段$FM$的中垂线与直线$PM$交于点$P$．

(1)当M在直线l上运动时，求点P的轨迹C的方程；

(2)过P向圆$N:(x-2)^2+y^2=1$引两条切线，与轨迹C的另一个交点分别为A，B．

（i）证明：直线AB与圆N也相切；

（ii）求$\triangle PAB$周长的最小值.

参考答案：

1．B

【分析】通过解不等式求得集合 A,B，进而判断出正确答案.

【详解】$\frac{2}{x}\le 1,\frac{2}{x}-1=\frac{2-x}{x}\le 0\Leftrightarrow\begin{cases}(2-x)x\le 0\\x\ne 0\end{cases}$，解得 $x<0$ 或 $x\ge 2$，

所以 $A=\{x\mid x<0$ 或 $x\ge 2\}$.

$x^2-2x=x(x-2)>0$，解得 $x<0$ 或 $x>2$，

所以 $B=\{x\mid x<0$ 或 $x>2\}$.

所以 $A\supseteq B$，B 选项正确，其它选项错误.

故选：B

2．C

【分析】根据复数运算求得 z，由此对选项进行分析，从而确定正确答案.

【详解】由 $\mathrm{i}z=1+\mathrm{i}$ 两边乘以 $-\mathrm{i}$ 得，$z=1-\mathrm{i}$，

所以 z 对应点 $(1,-1)$ 在第四象限，

z 的虚部为 -1，$\bar{z}=1+\mathrm{i}$，$|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$，

所以 C 选项正确，ABD 选项错误.

故选：C

3．A

【分析】根据直线平行满足的系数关系即可求解.

【详解】若直线 $m:(a-2)x+ay-2=0$ 和直线 $n:x+3ay+1=0$ 平行，

则 $\begin{cases}3a(a-2)=a\\a\ne -6a\end{cases}$，解得 $a=\frac{7}{3}$，

所以“$a=\frac{7}{3}$”是“$m//n$”的充要条件，

故选：A

4．D

【分析】判断出数列 $\{a_n\}$ 的周期性，从而求得正确答案.

【详解】依题意，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\frac{a_{n-1}+1}{1-a_{n-1}}(n\ge 2,n\in\mathbf{N}_+)$，$a_1=2$，

$a_2=\frac{2+1}{1-2}=-3, a_3=\frac{-3+1}{1-(-3)}=-\frac{1}{2}, a_4=\frac{-\frac{1}{2}+1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{3}$,

$a_5=\frac{\frac{1}{3}+1}{1-\frac{1}{3}}=2=a_1$，所以数列$\{a_n\}$是周期为4的数列，

$a_1+a_2+a_3+a_4=-\frac{7}{6}$，

所以$\{a_n\}$的前198项和为$-\frac{7}{6}\times\frac{200}{4}-\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{349}{6}$.

故选：D

5．A

【分析】根据投影向量、向量数量积等知识求得正确答案.

【详解】设$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\theta\left(0^\circ\leq\theta\leq180^\circ\right)$，

$\vec{a}-\vec{b}$在$\vec{b}$上的投影向量为$\frac{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}\cdot\frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}^2}{\left|\vec{b}\right|^2}\cdot\vec{b}$

所以$\frac{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\theta-\left|\vec{b}\right|^2}{\left|\vec{b}\right|^2}=-2$，

所以$\frac{2\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\theta-\left|\vec{b}\right|^2}{\left|\vec{b}\right|^2}=2\cos\theta-1=-2,\cos\theta=-\frac{1}{2}$，

所以θ为钝角，且$\theta=120^\circ$.

故选：A

6．C

【分析】根据已知条件列方程，化简求得双曲线的离心率.

【详解】以FB所在直线为x轴建立如图所示平面直角坐标系，

设双曲线的右焦点为F_1，依题意可知直线QP过F_1，

依题意，$\angle AFP=90^\circ$，$\angle FPQ=135^\circ$，则$\angle PFF_1=\angle FF_1P=45^\circ$，

所以三角形PFF_1是等腰直角三角形，

设双曲线的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$，$x_P=-c$，由$\frac{(-c)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，

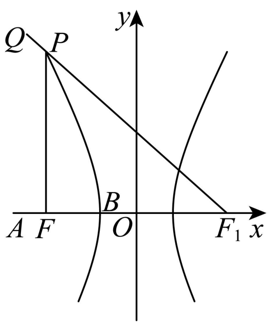
解得 $y_P=\dfrac{b^2}{a}$（负根舍去），由于 $|PF|=|FF_1|$，

所以 $\dfrac{b^2}{a}=2c,b^2=2ac,c^2-a^2=2ac$，

$c^2-2ac-a^2=0$，两边除以 a^2 得 $\left(\dfrac{c}{a}\right)^2-2\cdot\dfrac{c}{a}-1=0,e^2-2e-1=0$，

解得 $e=1+\sqrt{2}$（负根舍去）.

故选：C



7．D

【分析】先求得 $f'(x)$，然后对 a 进行分类讨论，根据 $f(x)$ 有最小值列不等式来求得 a 的取值范围.

【详解】$f(x)=\left(2x^2+4x+a+5\right)\mathrm{e}^{-x}=\dfrac{2x^2+4x+a+5}{\mathrm{e}^x}$，

当 $x\to+\infty$ 时，$2x^2+4x+a+5>0$，$f(x)\to 0$.

$$f'(x)=\frac{(4x+4)\mathrm{e}^x-\left(2x^2+4x+a+5\right)\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x\right)^2}=\frac{-2x^2-a-1}{\mathrm{e}},$$

当 $-a-1\le 0,a\ge -1$ 时，$f'(x)\le 0$，$f(x)$ 在 R 上单调递减，没有最小值，不符合题意，

所以 $a<-1$，令 $f'(x)=0$ 解得 $x=\pm\sqrt{\dfrac{-a-1}{2}}$，

所以 $f(x)$ 在区间 $\left(-\infty,-\sqrt{\dfrac{-a-1}{2}}\right),\left(\sqrt{\dfrac{-a-1}{2}},+\infty\right)$ 上 $f'(x)<0,f(x)$ 单调递减，

在区间 $\left(-\sqrt{\dfrac{-a-1}{2}},\sqrt{\dfrac{-a-1}{2}}\right)$ 上 $f'(x)>0,f(x)$ 单调递增，

若存在 m，使得对任意 x，都有 $f(x)\ge f(m)$，

则 $f\left(-\sqrt{\frac{-a-1}{2}}\right)=\frac{2\left(-\sqrt{\frac{-a-1}{2}}\right)^2+4\left(-\sqrt{\frac{-a-1}{2}}\right)+a+5}{e^{-\sqrt{\frac{-a-1}{2}}}}=\frac{-4\sqrt{\frac{-a-1}{2}}+4}{e^{-\sqrt{\frac{-a-1}{2}}}}\le 0$，

即 $4\sqrt{\frac{-a-1}{2}}\ge 4,\sqrt{\frac{-a-1}{2}}\ge 1,-a-1\ge 2,a\le -3$.

故选：D

8．A

【分析】利用两个计数原理，先分类再分步即可求解.

【详解】先涂 E，有 4 种选择，接下来涂 C，有 3 种选择，再涂 F ,有 2 种选择，

① 当 C,D 颜色相同时涂色方法数是：$4\times 3\times 2\times 1\times 2=48$，

② 当 C,D 颜色不相同时涂色方法数是：$4\times 3\times 2\times 1\times (1+2)=72$，

$\therefore$ 满足题意的涂色方法总数是：$48+72=120$.

故选：A.

9．ACD

【分析】代入即可验证对称中心，即可判断 A，根据周期公式即可判断 B，根据整体法即可判断 C，根据函数的伸缩平移变换即可求解 D.

【详解】由于 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $f(\frac{5\pi}{3})=2\sin\left(2\times\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin 3\pi=0$，故 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{5\pi}{3},0\right)$ 对称，A 正确，

函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，故 B 错误，

当 $x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}\right]$ 时，$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}\right]\subseteq\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，故 C 正确，

将 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标伸长为原来的 2 倍，得到 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，再把图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到的函数为 $g(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=-2\cos x$，D 正确，

故选：ACD

10．BCD

【分析】根据正态分布、百分位数、条件概率、全概率等知识对选项进行分析，从而确定正确答案.

【详解】A 选项，根据正态分布的对称性可知 $P(-2<X<2)=\frac{1}{2}-P(X>6)=0.1$，A 选项错误.

B 选项，$9\times 0.7=6.3$，所以第 70 百分位数是 16，B 选项正确.

C 选项，由于抽取的方式是有放回，所以“第一次抽到蓝球”与“第二次抽到蓝球”是相互独立事件，所以第一次抽到蓝球的情况下第二次也抽到蓝球的概率为 $\frac{3}{5+3}=\frac{3}{8}$，

所以 C 选项正确.

D 选项，$P\left(B\right)=0.3\times 0.4+\left(1-0.3\right)\times 0.2=0.26$，所以 D 选项正确.

故选：BCD

11．ACD

【分析】根据函数的奇偶性、周期性、对称性、零点等知识对选项进行分析，从而确定正确答案.

【详解】$f(x-2)$ 是奇函数，图象关于 $\left(0,0\right)$ 对称，所以 $f\left(x\right)$ 关于 $\left(-2,0\right)$ 对称；

$f(x-1)$ 是偶函数，图象关于直线 $x=0$ 对称，所以 $f\left(x\right)$ 关于直线 $x=-1$ 对称；

$\left(-2,0\right)$ 关于直线 $x=-1$ 的对称点为原点 $\left(0,0\right)$，

则 $f\left(x\right)$ 关于原点对称，所以 $f\left(x\right)$ 是奇函数，

直线 $x=-1$ 关于原点的对称直线为 $x=1$，所以 $f\left(x\right)$ 关于直线 $x=1$ 对称，则 B 选项错误.

所以 $f\left(x-4\right)=-f\left(-2\times 2-\left(x-4\right)\right)=-f\left(-x\right)=f\left(x\right)$，

所以 $f\left(x\right)$ 是周期为 4 的周期函数，A 选项正确.

$f\left(2023\right)+f\left(2025\right)=f\left(2024-1\right)+f\left(2024+1\right)=f\left(-1\right)+f\left(1\right)=0$，C 选项正确.

当 $x\in[-1,0]$，$f(x)=ax^2+bx$，$f\left(1\right)=-f\left(-1\right)=2,f\left(-1\right)=-2$，

$$f\left(-\frac{3}{2}\right)=f\left(-1-\frac{1}{2}\right)=f\left(-1+\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4},$$

$$\begin{cases} f\left(-1\right)=a-b=-2 \\ f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b=-\frac{3}{4} \end{cases}，解得\begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases},$$

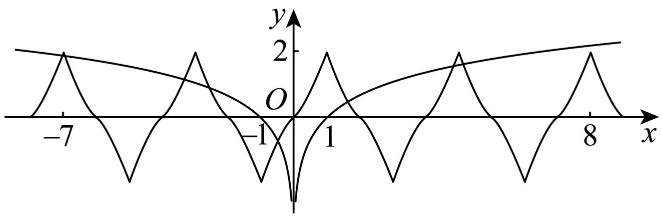
所以 $x\in[-1,0]$，$f(x)=-x^2+x=-x\left(x-1\right)$，

令 $g(x)=f(x)-\ln|x|=0$ 得 $f\left(x\right)=\ln\left|x\right|$，$\ln\left|\pm e^2\right|=2$，

画出 $y=f\left(x\right)$ 和 $y=\ln\left|x\right|$ 的图象如下图所示，

由图可知，两个函数图象有8个交点，所以$g\left(x\right)$有8个零点，所以D选项正确.

故选：ACD



12．ACD

【分析】A.利用垂直关系的转化，再结合面面垂直的判断定理，即可证明；B.首先求直线EF与平面B_1C_1CB所成角的正弦值，再与临界值比较，即可判断；C.结合几何关系，根据抛物线的定义，即可判断；D.首先求点A_1的轨迹，再结合几何关系，求解点到平面距离的最值.

【详解】A.如图， 连结B_1D_1，则$B_1D_1\perp A_1C_1$，

因为$BB_1\perp$平面$A_1B_1C_1D_1$， $A_1C_1\subset$平面$A_1B_1C_1D_1$，所以$BB_1\perp A_1C_1$，

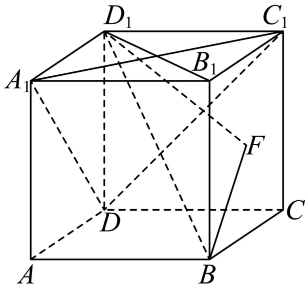
且$B_1D_1\cap BB_1=B_1$， $B_1D_1,BB_1\subset$平面BB_1D_1，

所以$A_1C_1\perp$平面BB_1D_1， $BD_1\subset$平面BB_1D_1，

所以$A_1C_1\perp BD_1$，同理$A_1D\perp BD_1$，且$DA_1\cap A_1C_1=A_1$，且$DA_1,A_1C_1\subset$平面A_1DC_1，

所以$BD_1\perp$平面A_1DC_1，且$BD_1\subset$平面FBD_1，

所以平面$A_1DC_1\perp$平面FBD_1，故A正确；



B.将正方体中，分离出四棱锥$E-B_1C_1CB$，取B_1C_1的中点H，连结EH,HB，

因为$EH\perp$平面B_1C_1CB， $EH<EF<EB=EC$ ， $EH=1$， $EB=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+1^2}=\frac{3}{2}$

即$1<EF<\frac{3}{2}$，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/916231040131010052