2025年北京市通州区高三上学期期末数学试卷

本试卷共9页，共150分.考试时长120分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回.

第一部分（选择题　共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知全集$U=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，集合$A=\{x\in \mathrm{Z}\,|\,x^2<4\}$，则$\complement_U A=$（　）

A. $\{-2,-1,0,1,2\}$　　B. $\{-1,0,1\}$　　C. $\{-2,2,3\}$　　D. $\{3\}$

【答案】C

【解析】

【分析】解不等式求得集合A，进而求得$\complement_U A$.

【详解】由$x^2<4$，解得$-2<x<2$，所以$A=\{-1,0,1\}$，

所以$\complement_U A=\{-2,2,3\}$.

故选：C

2. 若复数z满足$(z-1)\mathrm{i}=1+\mathrm{i}$，其中$\mathrm{i}$为虚数单位，则$z=$（　）

A. $2+\mathrm{i}$　　B. $2-\mathrm{i}$　　C. $-\mathrm{i}$　　D. i

【答案】B

【解析】

【分析】利用复数的运算化简复数即可求解.

【详解】因为$(z-1)\mathrm{i}=1+\mathrm{i}$，所以$z=1+\dfrac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=1-\mathrm{i}+1=2-\mathrm{i}$.

故选：B

3. 已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$，则$f(x)=$（　）

A. 是偶函数，且在$(0,+\infty)$上是增函数

B. 是偶函数，且在$(0,+\infty)$上是减函数

C. 是奇函数，且在$(0,+\infty)$上是增函数

D. 是奇函数，且在$(0,+\infty)$上是减函数

【答案】A

【解析】

【分析】根据函数的奇偶性的定义判断函数的奇偶性，再利用导数说明函数的单调性.

【详解】函数的定义域是R，关于原点对称，$f\left(-x\right)=\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}=f\left(x\right)$，

故函数$f(x)$是偶函数，

又因为$f'(x)=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}$，易知其为增函数，

当$x\in(0,+\infty)$时，$f'\left(x\right)>f'\left(0\right)=0$，

故$f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数，

故选：A.

4. 在二项式$(x-\frac{3}{x})^{6}$的展开式中，常数项为（　）

A. 540　　B. 20　　C. -20　　D. -540

【答案】D

【解析】

【分析】求出通项，找到常数项即可.

【详解】$(x-\frac{3}{x})^{6}$的通项公式为$T_{k+1}=\mathrm{C}_{6}^{k}x^{6-k}\left(-\frac{3}{x}\right)^{k}=\left(-3\right)^{k}\mathrm{C}_{6}^{k}x^{6-2k}$，

常数项时$6-2k=0$，则$k=3$，

所以常数项为$\left(-3\right)^{3}\mathrm{C}_{6}^{3}=-540$，

故选：D.

5. 圆$O_{1}:x^{2}+y^{2}-2x+4y+4=0$与圆$O_{2}:x^{2}+y^{2}=1$的位置关系是（　）

A. 相交　　B. 内切　　C. 外切　　D. 外离

【答案】D

【解析】

【分析】直接根据两圆位置关系的判断方法即可得到答案.

【详解】圆$O_{1}:x^{2}+y^{2}-2x+4y+4=0$的标准方程为$(x-1)^{2}+(y+2)^{2}=1$，

圆心为$O_{1}(1,-2)$，半径为$r=1$，

圆O_2：$x^2+y^2=1$，圆心为$O_2(0,0)$，半径为$R=1$，则$|O_1O_2|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$，

∴，$R+r=2$，$R-r=0$，$|O_1O_2|>R+r$，

故圆O_1和圆O_2的位置关系是外离.

故选：D.

6. 设a_1,a_2,a_3,a_4为$1,2,3,4$的一个排列，则满足$|a_1-a_2|+|a_3-a_4|=4$的不同排列的个数为（　）

A. 24　　B. 16　　C. 8　　D. 2

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意，分析可得则$|a_1-a_2|=1$且$|a_3-a_4|=3$，或$|a_1-a_2|=3$且$|a_3-a_4|=1$，或$|a_1-a_2|=2$且$|a_3-a_4|=2$，分别在不同情况下，列出所有可能，进而得到答案.

【详解】根据题意，若$|a_1-a_2|+|a_3-a_4|=4$，则$|a_1-a_2|=1$且$|a_3-a_4|=3$，或$|a_1-a_2|=3$且$|a_3-a_4|=1$，或$|a_1-a_2|=2$且$|a_3-a_4|=2$，

当$|a_1-a_2|=1$且$|a_3-a_4|=3$时，有$a_1=2,a_2=3,a_3=1,a_4=4$，或$a_1=2,a_2=3,a_3=4,a_4=1$，

或$a_1=3,a_2=2,a_3=1,a_4=4$，或$a_1=3,a_2=2,a_3=4,a_4=1$，共4种可能；

当$|a_1-a_2|=3$且$|a_3-a_4|=1$时，有$a_1=1,a_2=4,a_3=2,a_4=3$，或$a_1=1,a_2=4,a_3=3,a_4=2$，

或$a_1=4,a_2=1,a_3=2,a_4=3$，或$a_1=4,a_2=1,a_3=3,a_4=2$，共4种可能，

当$|a_1-a_2|=2$且$|a_3-a_4|=2$时，有$a_1=1,a_2=3,a_3=2,a_4=4$，或$a_1=1,a_2=3,a_3=4,a_4=2$，

或$a_1=3,a_2=1,a_3=2,a_4=4$，或$a_1=3,a_2=1,a_3=4,a_4=2$，或$a_1=2,a_2=4,a_3=1,a_4=3$，

或$a_1=2,a_2=4,a_3=3,a_4=1$，或$a_1=4,a_2=2,a_3=1,a_4=3$，或$a_1=4,a_2=2,a_3=3,a_4=1$，共8种可能，

满足$|a_1-a_2|+|a_3-a_4|=4$的不同排列的个数为$4+4+8=16$，

故选：B.

7. 已知直线$l:y=2x$，双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4}=1\ (a>0)$，则“$a=1$”是“直线$l$与双曲线无交点”的（　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】求出双曲线的渐近线方程，利用充分条件、必要条件的定义，结合双曲线的性质判断即可.

【详解】双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4}=1$的渐近线方程为$y=\pm\frac{2}{a}x$，

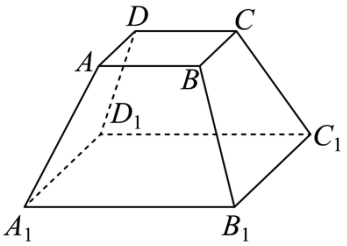
当$a=1$时，直线l为双曲线C的一条渐近线，直线l与双曲线无交点；

反之直线l与双曲线无交点，$0<\frac{2}{a}\le 2$，即$a\ge 1$，

所以“$a=1$”是“直线l与双曲线无交点”的充分而不必要条件.

故选：A

8. 如图某实心零部件的形状是正四棱台，已知$AB=10\text{cm}$，$A_1B_1=20\text{cm}$，棱台的高为12cm，先需要对该零部件的表面进行防腐处理，若每平方厘米的防腐处理费用为0.5元，则该零部件的防腐处理费用是（　）



A. 640元　　B. 440元

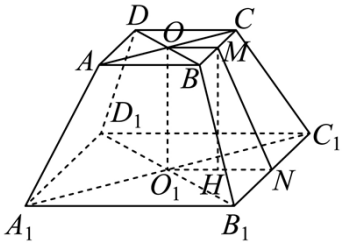
C. 390元　　D. 347.5元

【答案】A

【解析】

【分析】根据棱台的高求出侧面等腰梯形的高，再计算出棱台的表面积，即可求得该零部件的防腐处理费用.

【详解】



如图所示，$AC\cap BD=O$，$A_1C_1\cap B_1D_1=O_1$，连接OO_1，M,N分别是BC，B_1C_1的中点，连接OM,MN,O_1N，取O_1N的中点H，连接MH.

由题意，在正四棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$OO_1\perp$平面$A_1B_1C_1D_1$，则$OO_1=12$，

因为O,M分别是AC,BC的中点，所以$OM//AB$，且$OM=\frac{1}{2}AB=5$，

又O_1,N分别是A_1C_1,B_1C_1的中点，所以$O_1N//A_1B_1$，且$O_1N=\frac{1}{2}A_1B_1=10$，

故$OM//O_1N$，则O,M,N,O_1四点共面；

因为$OO_1\perp$平面$A_1B_1C_1D_1$，$O_1N\subset$平面$A_1B_1C_1D_1$，所以$OO_1\perp O_1N$，

所以四边形$OMNO_1$为直角梯形，

在直角梯形$OMNO_1$中，$OM=\frac{1}{2}O_1N$，又点H是O_1N的中点，

所以四边形$OMHO_1$为矩形，则$MH\perp O_1N$，且$MH=OO_1=12$，又$HN=\frac{1}{2}O_1N=5$，

因此，在直角$\triangle MHN$中，$MN=\sqrt{MH^2+HN^2}=13$，

所以在正四棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，

侧面积$S_1=4\times\left[\frac{1}{2}\times\left(BC+B_1C_1\right)\times MN\right]=4\times\left[\frac{1}{2}\times\left(10+20\right)\times13\right]=780$，

底面积$S_2=AB^2+A_1B_1^{\ 2}=10^2+20^2=500$，

表面积$S=S_1+S_2=780+500=1280$（平方厘米），

又每平方厘米的防腐处理费用为0.5元，

所以该零部件的防腐处理费用是$1280\times0.5=640$（元）.

故选：A

9. 关于函数$f(x)=3\sin(2x+\frac{\pi}{6})\ (x\in\mathrm{R})$，有下列命题：

①若$f(x_1)=f(x_2)=0$，则$x_1-x_2=k\pi\ (k\in\mathrm{Z})$；

②$f(x)=3\sin(2x+\frac{\pi}{6})\ (x\in\mathrm{R})$的图象可由$g(x)=3\sin(2x)\ (x\in\mathrm{R})$向左平移$\frac{\pi}{6}$得到；

③若$x_1,x_2\in(-\frac{\pi}{3},0)$且$x_1>x_2$，则一定有$f(x_1)>f(x_2)$；

④函数$f(x)=3\sin(2x+\frac{\pi}{6})\ (x\in\mathrm{R})$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{6}$对称.

其中正确命题的个数有（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】①选项，求出函数的零点，从而求出两零点的差值，根据平移得出解析式判断②，根据正弦函数的单调性判断③，代入检验法判断④.

【详解】令 $f(x)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0$，解得：$2x-\frac{\pi}{6}=k\pi$，$k\in\mathrm{Z}$，即 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}$，$k\in\mathrm{Z}$，

所以两个零点的距离：$x_1-x_2=\frac{k_1\pi}{2}+\frac{\pi}{12}-\frac{k_2\pi}{2}-\frac{\pi}{12}=\frac{(k_1-k_2)\pi}{2}=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathrm{Z})$，①错误；

由 $g(x)=3\sin(2x)\ (x\in\mathrm{R})$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 得到 $f(x)=\sin\left(2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

，故②错误；

因为 $x_1,x_2\in(-\frac{\pi}{3},0)$，所以 $2x_1+\frac{\pi}{6},2x_2+\frac{\pi}{6}\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6})$，所以 $f(x)=3\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ 单调递增，所以 $x_1>x_2$ 时，则一定有 $f(x_1)>f(x_2)$，③正确；

当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=1$，所以直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 是函数的对称轴，④正确；

故选：B

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，其前 n 项和为 S_n，且 $a_n=a_{n+1}^2-2a_{n+1}$，下列说法正确的是（　）

A. 当 $a_1=1$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为递减数列

B. 数列 $\{a_n\}$ 不可能为等比数列

C. 当 $a_1>4$，$\forall n\geq 2$，都有 $3n<S_n<na_1$

D. 当 $a_1=1$ 时，$\exists m\in\mathrm{N}^*$，$\forall n>m$，都有 $a_n>4$

【答案】C

【解析】

【分析】本题通过给定的数列递推式，写出项，分析数列的单调性、常数列情况、分类讨论，逐个判定即可.

【详解】对于选项 A，当 $a_1=1$ 时，可得 $1=a_2^2-2a_2$，即 $a_2^2-2a_2-1=0$.

因为数列$\{a_n\}$的各项均为正数，解这个方程$a_2=\dfrac{2+\sqrt{4+4}}{2}=1+\sqrt{2}$.

再由$a_2=a_3^2-2a_3$，即$(1+\sqrt{2})=a_3^2-2a_3$，

解得$a_3=\dfrac{2+\sqrt{4+4(1+\sqrt{2})}}{2}=1+\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

$a_1=1$，$a_2=1+\sqrt{2}>1$，$a_3=1+\sqrt{2+\sqrt{2}}>1+\sqrt{2}$，

可以发现$a_1<a_2<a_3$，所以数列$\{a_n\}$不为递减数列，所以选项 A 错误.

由$a_n=a_{n+1}(a_{n+1}-2)$，因为$a_n>0,a_{n+1}>0$，得出$a_{n+1}-2>0$，即$a_{n+1}>2$.

又由$a_n=a_{n+1}^2-2a_{n+1}$解出$a_{n+1}=1+\sqrt{a_n+1}(n\in \mathrm{N}_+)$.

由$\sqrt{a_n+1}+1>a_n$推出$\sqrt{a_n+1}>a_n-1$，进一步得到$a_n(a_n-3)<0$，

结合$a_1>0$得出$a_n<3$，

从而得到$0<a_n<3$时，$a_{n+1}>a_n$；

同理得到$a_n=3$时，$a_{n+1}=a_n$；$a_n>3$时，$a_{n+1}<a_n$.

当$a_n>3$时，由$a_n=a_{n+1}^2-2a_{n+1}$变形为$a_n+1=(a_{n+1}-1)^2$，得出$a_n+1>4$，进而得到$(a_{n+1}-1)^2>4$，推出$a_{n+1}-1>2$，即$a_{n+1}>3$，所以$a_n>3$时，$a_{n+1}>3$；同理$0<a_n<3$时，$0<a_{n+1}<3$.

对于选项 B，$a_n=3$时，$a_{n+1}=a_n$，为等比数列，所以选项 B 错误.

对于选项 C，当$a_1>3$时，根据前面分析的单调性$a_{n+1}<a_n$，所以$a_n>3$在$n\in \mathrm{N}_+$时恒成立且$\{a_n\}$单调递减.

当$a_1>4$时，因为a_n单调递减且$a_n>3$，所以$3<a_n<a_1$恒成立，进而$3n<S_n<a_1n$，所以选项 C 正确.

对于选项 D，当$0<a_n<3$时，$a_{n+1}<3$且$a_{n+1}>a_n$.

当$a_1=1$时，因为数列单调递增且$a_n<3$，所以不存在$n\in \mathrm{N}_+$使$a_n>4$，所以选项 D 错误.

故选：C.

【点睛】关键点点睛：由$a_n=a_{n+1}(a_{n+1}-2)$，因为$a_n>0,a_{n+1}>0$，得出$a_{n+1}-2>0$，即$a_{n+1}>2$.由$\sqrt{a_n+1}+1>a_n$推出$\sqrt{a_n+1}>a_n-1$，进一步得到$a_n(a_n-3)<0$， 分类讨论得到数列单调性是关键.

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 已知函数 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}+\log_2(x-2)$，则 $f(4)=$_____.

【答案】3

【解析】

【分析】直接代入计算即可.

【详解】$f(4)=4^{\frac{1}{2}}+\log_2(4-2)=2+1=3$.

故答案为：3.

12. A，B，C 三个班共有 120 名学生，为调查他们的体育锻炼情况，通过分层抽样获得了部分学生一周的锻炼时间，数据如下表(单位：小时)：

A 班	6　6.5　7　7.5　8　8
B 班	6　7　8　9　10　11　12
C 班	4　6.5　8　8.5　10　12.5　13.5

估计 A 班的人数有_____人；设 B 班体育锻炼时间的方差为 s_1^2，C 班体育锻炼时间的方差为 s_2^2，则 s_1^2 _____ s_2^2 (填：$>,<,=$).

【答案】　①. 36　②. $<$

【解析】

【分析】由表格数据可知，样本有 20 人，其中 A 班有 6 人，然后再利用抽样比计算 A 班的学生人数；分别由题计算两班平均数，在算出方差，比较即可.

【详解】由题意知，抽出的 20 名学生中，来自 A 班的学生有 6 名.

根据分层抽样方法，A 班的学生人数估计为 $120\times\frac{6}{20}=36$ 人；

设 B 班体育锻炼时间的平均数为 $\overline{x_1}$，C 班体育锻炼时间的平均数为 $\overline{x_2}$，

$$\overline{x_1}=\frac{6+7+8+9+10+11+12}{7}=9,\quad \overline{x_2}=\frac{4+6.5+8+8.5+10+12.5+13.5}{7}=9,$$

$$s_1^2=\frac{(6-9)^2+(7-9)^2+(8-9)^2+(9-9)^2+(10-9)^2+(11-9)^2+(12-9)^2}{7}=4,$$

$$s_2^2=\frac{(4-9)^2+(6.5-9)^2+(8-9)^2+(8.5-9)^2+(10-9)^2+(12.5-9)^2+(13.5-9)^2}{7}=\frac{66}{7},$$

由此可知 $s_1^2<s_2^2$.

故答案为：36；<

13. 已知抛物线$C:y^2=4x$的焦点为F，点M,N在C上，若$|MF|+|NF|=8$，则线段MN的中点的横坐标为_____.

【答案】3

【解析】

【分析】设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，根据抛物线定义可得$|MF|+|NF|=x_1+x_2+2=8$，即可求解中点横坐标.

【详解】设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则根据抛物线定义可得$|MF|+|NF|=x_1+1+x_2+1=8$，

解得$x_1+x_2=6$，所以线段MN的中点的横坐标为3.

故答案为：3.

14. 已知$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$是同一平面上的三个向量，满足$|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角等于_____；若$\vec{c}-\vec{a}$与$\vec{c}-\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，则$|\vec{c}|$的最大值为_____.

【答案】 ①. $\frac{2\pi}{3}$ ②. 4

【解析】

【分析】第1空，利用$\cos\vec{a},\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$可得；

第2空，根据向量夹角的关系，利用向量的几何表示，设$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{c}$确定$AD$为$\triangle ABC$的外接圆直径时最大，进而可得.

【详解】第1空：$\cos\vec{a},\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-2}{2\times2}=-\frac{1}{2}$，因$\vec{a},\vec{b}\in[0,\pi]$，故$\vec{a},\vec{b}=\frac{2\pi}{3}$，

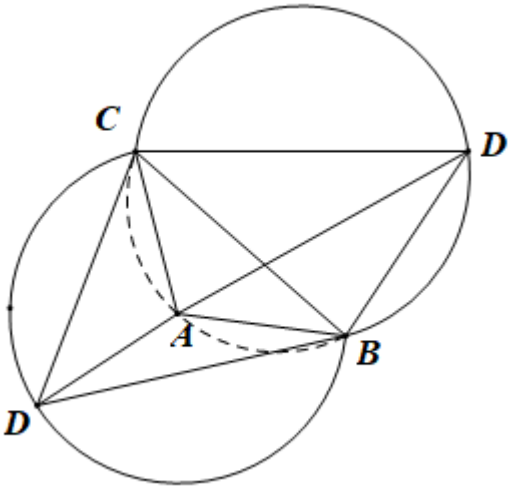
第2空：设$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，则$\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$，

设$\overrightarrow{AD}=\vec{c}$，则$\overrightarrow{CD}=\vec{c}-\vec{a}$，$\overrightarrow{BD}=\vec{c}-\vec{b}$，因$\vec{c}-\vec{a}$与$\vec{c}-\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，

而$\vec{a},\vec{b}=\frac{2\pi}{3}$，故$D$在两段优弧上，如下图，

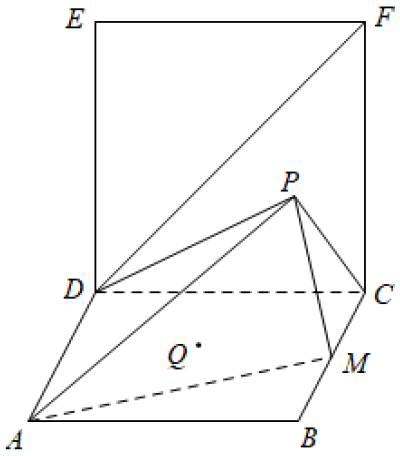
右上方的弧所在圆的半径为$\frac{2}{\frac{1}{2}}\times\frac{1}{2}=2$，左下方的弧所在的圆的半径为2且圆心为A，

结合图形可得$|\vec{c}|$即$|AD|$可取得最大值为直径即为4，



故答案为：$\dfrac{2\pi}{3}$；4

15. 如图，正方形 $ABCD$ 和正方形 $CDEF$ 所在的平面互相垂直. M 为 BC 中点，P 为正方形 $CDEF$ 内一点（包括边界），且满足 $\angle APD=\angle MPC$，Q 为正方形 $ABCD$ 内一点（包括边界），设 $AB=3$，给出下列四个结论：



①$\exists P,Q$，使 $EQ\perp MP$；

②$\exists P,Q$，使 $PQ=6$；

③点 P 到 DF 的最小值为 $2\sqrt{2}-2$；

④四棱锥 $P-AMCD$ 体积的最大值为 $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

其中正确结论的序号是_____.

【答案】①③④

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/916234140125011103