第四章

DI SI ZHANG

指数函数与对数函数

4.1 指数

导学聚焦

考点	学习目标	核心素养
根式的化简与求值	理解 n 次方根和根式的概念，掌握根式的性质，会进行简单的求 n 次方根的运算	数学抽象
根式与分数指数幂的互化	理解整数指数幂和分数指数幂的意义，并能熟练掌握根式与分数指数幂之间的相互转化	数学运算

考点	学习目标	核心素养
利用指数幂的性质化简求值	理解指数幂的含义及其运算性质	数学运算
条件求值问题	会根据已知条件，利用指数幂的运算性质、根式的性质进行相关求值运算	数学运算

预习案·自主学习　研读·导学·尝试

问题导学

预习教材 P104—P109，并思考以下问题：

1．n 次方根是怎样定义的？

2．根式的定义是什么？它有哪些性质？

3．有理数指数幂的含义是什么？怎样理解分数指数幂？

4．有理指数幂有哪些运算性质？

栏目导引

新知初探

1．n 次方根

<table>
<tr><td>定义</td><td colspan="4">一般地，如果 $x^n=a$，那么 x 叫做 a 的 ___n 次方根___，其中 $n>1$，且 $n\in\mathbf{N}^*$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">性质</td><td rowspan="2">n 是奇数</td><td>$a>0$</td><td>$x>0$</td><td rowspan="2">x 仅有一个值，记为 ___$\sqrt[n]{a}$___</td></tr>
<tr><td>$a<0$</td><td>$x<0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">n 是偶数</td><td>$a>0$</td><td colspan="2">x 有两个值，且互为相反数，记为 ___$\pm\sqrt[n]{a}$___</td></tr>
<tr><td>$a<0$</td><td colspan="2">x 在实数范围内不存在</td></tr>
</table>

栏目导引

■名师点拨

0 的任何次方根都是 0，即 $\sqrt[n]{0}=0$.

2．根式

(1)定义：式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做根式，这里 n 叫做 根指数 ，a 叫做 被开方数 .

(2)性质：($n>1$，且 $n\in\mathbf{N}^*$)

①$(\sqrt[n]{a})^n=$ a .

②$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases} a, & n\text{为奇数}, \\ |a|, & n\text{为偶数}. \end{cases}$

■名师点拨

$\sqrt[n]{a^n}$与$(\sqrt[n]{a})^n$的区别

(1)$\sqrt[n]{a^n}$是实数 a^n 的 n 次方根，是一个恒有意义的式子，不受 n 的奇偶限制，但这个式子的值受 n 的奇偶限制.

(2)$(\sqrt[n]{a})^n$ 是实数 a 的 n 次方根的 n 次幂，其中实数 a 的取值由 n 的奇偶决定．其算法是对 a 先开方，后乘方(都是 n 次)，结果恒等于 a.

3．分数指数幂的意义

分数指数幂	正分数指数幂	规定：$a^{\frac{m}{n}}=$__$\sqrt[n]{a^m}$__$(a>0，m，n\in \mathbf{N}^*，且\ n>1)$
	负分数指数幂	规定：$a^{-\frac{n}{m}}=$__$\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$__$=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ $(a>0，m，n\in \mathbf{N}^*，且\ n>1)$
	0 的分数指数幂	0 的正分数指数幂等于__0__，0 的负分数指数幂__没有意义__

■名师点拨

分数指数幂 $a^{\frac{m}{n}}$不可以理解为$\frac{m}{n}$个 a 相乘.

4．指数幂的运算性质

(1)$a^r a^s$＝$\underline{a^{r+s}}$(a＞0，r，s∈R).

(2)$(a^r)^s$＝$\underline{a^{rs}}$(a＞0，r，s∈R).

(3)$(ab)^r$＝$\underline{a^r b^r}$(a＞0，b＞0，r∈R).

自我检测

1 判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”)

(1)当 $n\in\mathbf{N}^*$时，$(\sqrt[n]{-3})^n$有意义．(　×　)

(2) $\sqrt{(\pi-4)^2}=4-\pi$.(　√　)

(3)只要根式有意义，都能化成分数指数幂的形式．(　√　)

(4)0 的任何指数幂都等于 0.(　×　)

2 81 的 4 次方根是(　　)

A．2　　B．±2

C．3　　D．±3

答案：D

3 $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}$的值是(　　)

A.$\frac{2}{3}$　　B.$\frac{3}{2}$

C.$\frac{4}{81}$　　D．$-\frac{81}{4}$

答案：B

4 根式$\sqrt[3]{m^{-5}}$化为分数指数幂为________.

答案：$m^{-\frac{5}{3}}$

5 计算$(\pi-3)^0+3^{-1}\times\left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$的结果为________.

解析：原式$=1+\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

答案：$\frac{3}{2}$

探究案·讲练互动

解惑·探究·突破

探究点1　根式的化简与求值

例1　求下列各式的值.

(1) $\sqrt[3]{(-2)^3}$；(2) $\sqrt[4]{(-3)^2}$；

(3) $\sqrt[8]{(3-\pi)^8}$；(4) $\sqrt{x^2-2xy+y^2}+\sqrt[7]{(y-x)^7}$.

【解】 (1) $\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$.

(2) $\sqrt[4]{(-3)^2}=\sqrt[4]{3^2}=\sqrt{3}$.

(3) $\sqrt[8]{(3-\pi)^8}=|3-\pi|=\pi-3$.

(4)原式$=\sqrt{(x-y)^2}+y-x=|x-y|+y-x$.

当 $x\geqslant y$ 时，原式$=x-y+y-x=0$;

当 $x<y$ 时，原式$=y-x+y-x=2(y-x)$.

所以原式$=\begin{cases}0, & x\geqslant y,\\ 2(y-x), & x<y.\end{cases}$

反思归纳

根式的化简与求值的思路及注意点

(1)思路：首先要分清根式为奇次根式还是偶次根式，然后运用根式的性质进行化简.

(2)注意点：

①正确区分$(\sqrt[n]{a})^n$与$\sqrt[n]{a^n}$两式；

②运算时注意变式、整体代换，以及平方差、立方差和完全平方、完全立方公式的运用，必要时要进行分类讨论.

跟踪训练

1．下列各式正确的是(　　)

A.$\sqrt{(-5)^2}=-5$　　　　B.$\sqrt[4]{a^4}=a$

C.$\sqrt{7^2}=7$　　　　D.$\sqrt[3]{(-\pi)^3}=\pi$

解析：选 C.由于$\sqrt{(-5)^2}=5$，$\sqrt[4]{a^4}=|a|$，$\sqrt[3]{(-\pi)^3}=-\pi$，故 A，B，D 项错误，故选 C.

2．化简$(\sqrt{a-1})^2+\sqrt{(1-a)^2}+\sqrt[3]{(1-a)^3}=$________.

解析：由$(\sqrt{a-1})^2$知$a-1\geq 0$，$a\geq 1$.

故原式$=a-1+|1-a|+1-a=a-1$.

答案：$a-1$

3．若$\sqrt{(2a-1)^2}=\sqrt[3]{(1-2a)^3}$，则实数 a 的取值范围为________.

解析：$\sqrt{(2a-1)^2}=|2a-1|$，$\sqrt[3]{(1-2a)^3}=1-2a$.

因为$|2a-1|=1-2a$，

故 $2a-1\leqslant 0$，所以 $a\leqslant\frac{1}{2}$.

答案：$\left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right]$

探究点2　根式与分数指数幂的互化

例2　把下列根式表示为分数指数幂的形式，把分数指数幂表示为根式的形式：

(1) $(a-b)^{-\frac{3}{4}}(a>b)$；(2) $\sqrt[5]{(ab)^2}$；

(3) $\sqrt[3]{(x-1)^5}$；(4) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$；(5) $(a-b)^{\frac{3}{7}}$.

【解】　(1) $(a-b)^{-\frac{3}{4}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{(a-b)^{3}}}$.

(2) $\sqrt[5]{(ab)^{2}}=(ab)^{\frac{2}{5}}$.

(3) $\sqrt[3]{(x-1)^{5}}=(x-1)^{\frac{5}{3}}$.

(4) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^{2}}}=a^{-\frac{2}{3}}$

(5) $(a-b)^{\frac{3}{7}}=\sqrt[7]{(a-b)^{3}}$.

规律方法

根式与分数指数幂互化的方法及思路

(1)方法：根指数 $\xleftrightarrow{\text{化为}}$ 分数指数的分母，

被开方数(式)的指数 $\xleftrightarrow{\text{化为}}$ 分数指数的分子.

(2)思路：在具体计算中，通常会把根式转化成分数指数幂的形式，然后利用有理数指数幂的运算性质解题.

[注意]　如果根式中含有多重根号，要由里向外用分数指数幂写出.

栏目导引