

齐次化妙解圆锥曲线

01

内容速览

题型 1 定点在原点的斜率问题

题型 2 定点在原点转化成斜率问题

题型 3 定点不在原点之齐次化基础运用

题型 4 定点不在原点的斜率问题

题型 5 定点不在原点转化为斜率问题

题型 6 定点不在原点之二级结论第三定义的使用

题型 7 齐次化妙解之等角问题

题型 8 点乘双根法的基础运用

题型 9 点乘双根法在解答题中的运用

02

重难点题型归纳

题型 1 定点在原点的斜率问题



划重点

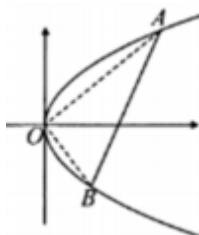
圆锥曲线的定义、定值、弦长、面积，很多都可以转化为斜率问题，当圆锥曲线遇到斜率之和或者斜率之积，以往我们的常用解法是设直线 $y = kx + b$ ，与圆锥曲线方程联立方程组，韦达定理，再将斜率之和或之积的式子通分后，将 $x_1 + x_2$ 和 $x_1 \cdot x_2$ 代入，得到关于 k 、 b 的式子。解法不难，计算量较为复杂。

如果采用齐次化解决，直接得到关于 k 的方程，会使题目计算量大大减少。

“齐次”即次数相等的意思，例如 $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ 称为二次齐式，即二次齐次式的意思，因为 $f(x, y)$ 中每一项都是关于 x 、 y 的二次项。

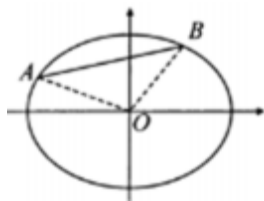
如果公共点在原点，不需要平移。

1 直线 $mx + ny = 1$ 与抛物线 $y^2 = 4x$ 交于 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，求 $k_{OA} + k_{OB}$ ， $k_{OA} \cdot k_{OB}$ 。（用 m ， n 表示）

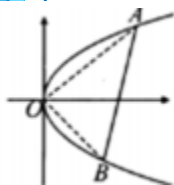




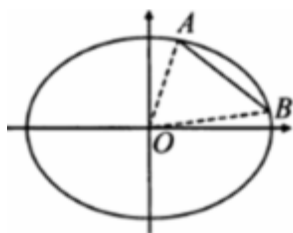
题目 1 直线 $mx + ny = 1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 交于 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 求 $k_{OA} \cdot k_{OB}$ (用 m, n 表示).



题目 2 抛物线 $y^2 = 4x$, 直线 l 交抛物线于 A, B 两点, 且 $OA \perp OB$, 求证: 直线 l 过定点.



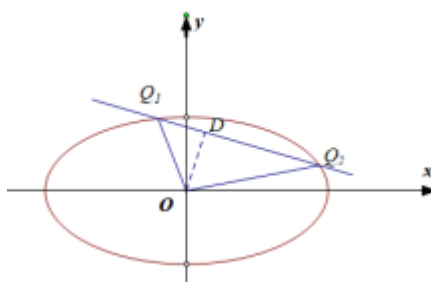
题目 3 不过原点的动直线交椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 于 A, B 两点, 直线 OA, AB, OB 的斜率成等比数列, 求证: 直线 l 的斜率为定值.





a 4 已知直线 $y = kx + 4$ 交椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 于 A, B 两点, O 为坐标原点, 若 $k_{OA} + k_{OB} = 2$, 求该直线方程.

例 5 设 Q_1, Q_2 为椭圆 $\frac{x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上两个动点, 且 $OQ_1 \perp OQ_2$, 过原点 O 作直线 Q_1Q_2 的垂线 OD , 求 D 的轨迹方程.



题型 2 定点在原点转化成斜率问题



圆锥曲线齐次化原理是：过程中为了式子整齐好记，所以将它齐次化。齐次化是常见的代数处理技巧，圆锥曲线中用齐次化的方法解决和斜率相关的定值定点。

齐次化法简化计算适用范围：圆锥曲线中处理斜率之和与斜率之积类型问题。

以圆锥曲线中椭圆为例，先介绍齐次化解题的基本特征与一般步骤：

(一) 基本特征

1. 椭圆上有定点 $P(x_0, y_0)$ 和动弦 AB ；
2. 题设或结论中涉及 PA, PB 的斜率之积或斜率之和等情况. 如 $k_1 \cdot k_2, k_1 + k_2, \dots$ 。

(二) 解题步骤

1. 设直线方程为 $m(x - x_0) + n(y - y_0) = 1$, 其中点 (x_0, y_0) 为两相关直线的交点（这样设直线方程的形式，右边为 1 对联立齐次化较为方便）；
2. 椭圆方程变形为
3. 椭圆变形方程与直线方程联立齐次化：
4. 由韦达定理得 $k_1 + k_2, k_1 \cdot k_2$ ；
5. 根据题设进一步求解。

注意：过一定点作两条直线

且两直线间存在斜率关系（显性或隐性）如果你发现题目出现了以上情况那这个题目八成可用齐次化来简化但要注意叙述的严谨性和完整性否则易被老师扣去过程分

- 1 已知抛物线 C 的方程为 $y^2 = 2px$ ，若直线 $y = kx + b$ 与抛物线 C 相交于 A, B 两点，且以 AB 为直径的圆过坐标原点，证明直线 $y = kx + b$ 过定点。

题目 1 直线 $x + 2y - 3 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 + x - 6y + c = 0$ 相交于 P, Q ，且 $OP \perp OQ$ ，求 c 的值。

类型识别： $OP \perp OQ$ ，所以 $k_{OP} \cdot k_{OQ} = -1$ ，适合用齐次化来处理。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/917016054031006155>