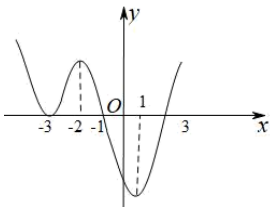


专题 18 函数背景下的不等式问题

考点一 利用图像解不等式

一、单选题

1. 函数 $f(x)$ 的图象如图所示, 则 $x \cdot f'(x) < 0$ 的解集为 ()



A. $(-3, -2) \cup (0, 1)$

B. $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

C. $(-2, -1) \cup (0, +\infty)$

D. $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

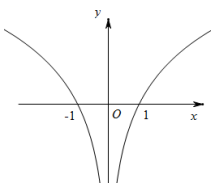
【解析】由函数图象与导函数大小的关系可知: 当 $x \in (-\infty, -3)$, $x \in (-2, 1)$ 时, $f'(x) < 0$,

当 $x \in (-3, -2)$, $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 故当 $x \in (-\infty, -3)$, $x \in (-2, 0)$, $x \in (1, +\infty)$ 时, $x \cdot f'(x) > 0$;

当 $x \in (0, 1)$ 时, $x \cdot f'(x) < 0$; 当 $x \in (-3, -2)$ 时, $x \cdot f'(x) < 0$,

故 $x \cdot f'(x) < 0$ 的解集为 $(-3, -2) \cup (0, 1)$. 故选: A

2. 已知函数 $f(x)$ 的图象如图所示, 则不等式 $\frac{f(x)}{x^2} > 0$ 的解集是 ()



A. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

B. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

C. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

D. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

【解析】由函数 $f(x)$ 的图像可得: 在 $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$, 在 $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ 时, $f(x) < 0$,

因为 x^2 在分母上, 所以 $x^2 > 0$, 故 $\frac{f(x)}{x^2} > 0$ 等价于 $f(x) > 0$, 所以 $\frac{f(x)}{x^2} > 0$ 的解集是 $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

故选: C

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln(1-x), & x \leq 0 \\ 1-e^x, & x > 0 \end{cases}$, 若 $|f(x)| - ax \leq 0$, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, 1]$

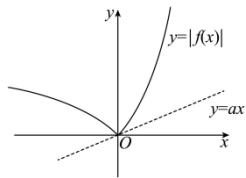
B. $(-\infty, 0]$

C. $[-1, 1]$

D. $[0, 1]$

【解析】 $|f(x)| - ax \geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立 $\Leftrightarrow |f(x)| \geq ax$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立 $\Leftrightarrow y = |f(x)|$ 的图象在 $y = ax$ 图象的上方，

其中 $|f(x)| = \begin{cases} \ln(1-x), & x \leq 0 \\ e^x - 1, & x > 0 \end{cases}$ ，画出 $|f(x)| = \begin{cases} \ln(1-x), & x \leq 0 \\ e^x - 1, & x > 0 \end{cases}$ 与 $y = ax$ 的图象，如下：



要想 $|f(x)| \geq ax$ 在 $(-\infty, 0]$ 上恒成立，则 $a \geq 0$ ；令 $h(x) = e^x - 1$ ，则 $h'(x) = e^x$ ， $h'(0) = e^0 = 1$ ，

若 $y = ax$ 为 $h(x) = e^x - 1$ 在 $x = 0$ 的切线，则 $a = 1$ ，故要想 $h(x) \geq ax$ 在 $(0, +\infty)$ 恒成立，则 $a \leq 1$ ，

综上： $0 \leq a \leq 1$ 。故选：D

4. 若关于 x 的不等式 $3 - |x - a| > x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上有解，则实数 a 的取值范围是 ()

A. $\left(-\frac{13}{4}, 3\right)$

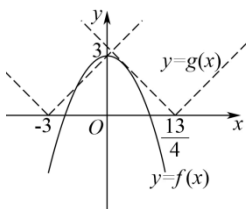
B. $\left(-3, \frac{13}{4}\right)$

C. $\left(-\infty, \frac{13}{4}\right)$

D. $(3, +\infty)$

【解析】由题，可将 $3 - |x - a| > x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上有解转化为 $3 - x^2 > |x - a|$ 至少有一个正数解，

构造 $f(x) = 3 - x^2$ ， $g(x) = |x - a|$ ，画出图形，如图：



当 $a = -3$ 时， $f(x)$ 与 $g(x)$ 相交于 $(0, 3)$ 点，要使 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相交于 y 轴右侧，则需满足 $a > -3$ ，

在函数 $g(x)$ 不断右移的过程中，若与 $f(x)$ 右侧曲线相切，则有 $3 - x^2 = a - x$ ，对应的 $\Delta = 0$ ，

解得 $a = \frac{13}{4}$ ，则 $a < \frac{13}{4}$ ，综上所述， $a \in \left(-3, \frac{13}{4}\right)$ 。故选：B.

5. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 2, & x > 0 \\ 2 - 2^{-x}, & x < 0 \end{cases}$ ，若 $f(a) > f(-a)$ ，则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-1, 0) \cup (0, 1)$

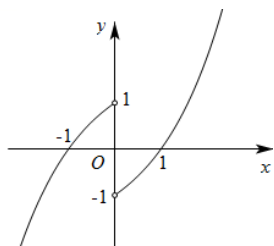
B. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

C. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

D. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

【解析】当 $x > 0$ 时， $-x < 0$ ， $f(-x) = 2 - 2^x = -(2^x - 2) = -f(x)$ ，因为函数定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ，

所以函数 $f(x)$ 为奇函数，作出函数 $f(x)$ 的图像，如图所示，

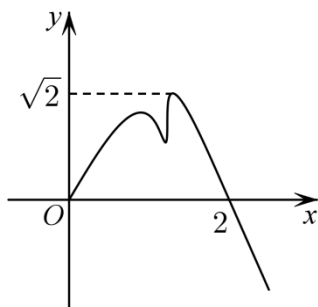


且 $f(1) = 0, f(-1) = 0, f(x)$ 在 $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ 上都为增函数，

由 $f(a) > f(-a) = -f(a)$ ，得到 $2f(a) > 0$ ，即 $f(a) > 0$ ，由图像可得 $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$ 。

故选：B.

6. 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的图象如图所示，则不等式 $x^2 f(x) > 2f(x)$ 的解集为 ()



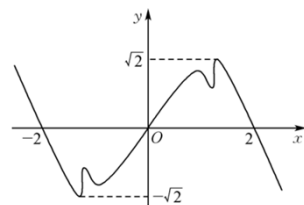
A. $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, 2)$

B. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

C. $(-\infty, -2) \cup (-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, 2)$

D. $(-2, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2}) \cup (2, +\infty)$

【解析】根据奇函数的图象特征，作出 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上的图象如图所示，



由 $x^2 f(x) > 2f(x)$ ，得 $(x^2 - 2)f(x) > 0$ ，等价于 $\begin{cases} x^2 - 2 > 0, \\ f(x) > 0, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x^2 - 2 < 0, \\ f(x) < 0, \end{cases}$

解得 $x < -2$ ，或 $\sqrt{2} < x < 2$ ，或 $-\sqrt{2} < x < 0$ 。

故不等式解集为： $(-\infty, -2) \cup (-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, 2)$ 。故选：C.

7. 已知函数 $\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x, & x \geq 1 \\ \log_4(x+1), & -1 < x < 1 \end{cases}$, 则 $f(x) \leq \frac{1}{2}x$ 的解集为 ()

- A. $(-\infty, 0]$ B. $(-1, 0]$ C. $(-1, 0] \cup [1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

【解析】作出函数 $y = f(x)$ 与 $y = \frac{1}{2}x$ 的图象，如图，

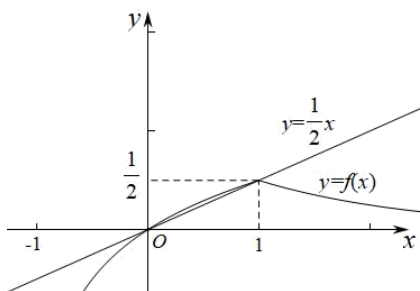
当 $x \geq 1$ 时， $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \frac{1}{2}x$ ，作出函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 与 $y = \frac{1}{2}x$ 的图象，

由图象可知，此时解得 $x \in [1, +\infty)$ ；

当 $-1 < x < 1$ 时， $\log_4(x+1) \leq \frac{1}{2}x$ ，作出函数 $y = \log_4(x+1)$ 与 $y = \frac{1}{2}x$ 的图象，

它们的交点坐标为 $(0, 0)$ 、 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ ，结合图象知此时 $x \in (-1, 0]$ 。

所以不等式 $f(x) \leq \frac{1}{2}x$ 的解集为 $(-1, 0] \cup [1, +\infty)$ 。故选：C



8. 定义：设不等式 $F(x) < 0$ 的解集为 M ，若 M 中只有唯一整数，则称 M 是最优解。若关于 x 的不等式

$|x^2 - 2x - 3| - mx + 2 < 0$ 有最优解，则实数 m 的取值范围是 ()

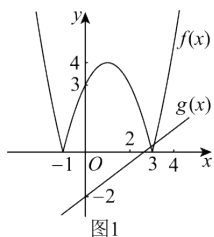
- A. $\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{4}\right]$ B. $\left[-\frac{7}{2}, -2\right)$
C. $\left[-\frac{7}{2}, -2\right) \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{4}\right]$ D. $\left[-\frac{7}{2}, -2\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \frac{7}{4}\right]$

【解析】 $|x^2 - 2x - 3| - mx + 2 < 0$ 可转化为 $|x^2 - 2x - 3| < mx - 2$ 。

设 $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$ ， $g(x) = mx - 2$ ，则原不等式化为 $f(x) < g(x)$ 。

易知 $m = 0$ 时不满足题意。当 $m > 0$ 时，要存在唯一的整数 x_0 ，满足 $f(x_0) < g(x_0)$ ，

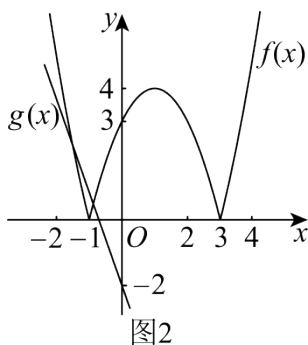
在同一平面直角坐标系中分别作出函数 $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$ ， $g(x) = mx - 2$ 的图象，如图 1 所示



$$\text{则} \begin{cases} f(2) \geq g(2) \\ f(3) < g(3) \\ f(4) \geq g(4) \end{cases}, \text{即} \begin{cases} 3 \geq 2m-2 \\ 0 < 3m-2 \\ 5 \geq 4m-2 \end{cases}, \text{解得} \frac{2}{3} < m \leq \frac{7}{4}.$$

当 $m < 0$ 时, 要存在唯一的整数 x_0 , 满足 $f(x_0) < g(x_0)$,

在同一平面直角坐标系中分别作出函数 $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$, $g(x) = mx - 2$ 的图象, 如图 2 所示



$$\text{则} \begin{cases} f(0) \geq g(0) \\ f(-1) < g(-1) \\ f(-2) \geq g(-2) \end{cases}, \text{即} \begin{cases} 3 \geq -2 \\ 0 < -m-2 \\ 5 \geq -2m-2 \end{cases}, \text{解得} -\frac{7}{2} \leq m < -2.$$

综上, 实数 m 的取值范围是 $\left[-\frac{7}{2}, -2\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \frac{7}{4}\right]$. 故选: D

9. 定义在 $\mathbf{R}$ 上函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) + f(1-x) = 0$, $f(-2x+1) = f(3+2x)$. 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = (x-1)^3$,

则下列选项能使 $f(x) > \frac{1}{8}$ 成立的为 ()

- A. $\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$ B. $\left(\frac{21}{2}, \frac{25}{2}\right)$ C. $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ D. $\left(\frac{19}{2}, \frac{21}{2}\right)$

【解析】因为 $f(x+1) + f(1-x) = 0$, 所以 $f(x)$ 关于点 $(1, 0)$ 对称, 所以 $f(x) = -f(2-x)$;

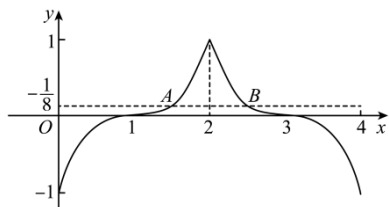
又 $f(-2x+1) = f(3+2x)$, 所以 $f(-x+1) = f(3+x)$, 所以有 $f(2-x) = f(2+x)$, 故 $f(x)$ 关于直线 $x=2$ 对称, 所以 $f(x) = f(4-x)$. 所以, $f(4-x) = -f(2-x)$, 所以有 $f(2-x) = -f(-x)$, 所以 $f(4-x) = f(-x)$, 所以 $f(x)$ 的周期为 4.

当 $x \in [1, 2]$ 时, $2-x \in [0, 1]$, 所以 $f(x) = -f(2-x) = -(2-x-1)^3 = (x-1)^3$,

所以 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x) = (x-1)^3$.

当 $x \in [2, 4]$ 时, $4-x \in [0, 2]$, 所以 $f(x) = f(4-x) = (4-x-1)^3 = (3-x)^3$.

作出函数 $f(x)$ 在 $[0, 4]$ 上的图象如下图



当 $x \in [0, 2]$ 时, 由 $f(x) = \frac{1}{8}$ 可得, $(x-1)^3 = \frac{1}{8}$, 解得 $x = \frac{3}{2}$, 所以 $A\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{8}\right)$;

当 $x \in [2, 4]$ 时, 由 $f(x) = \frac{1}{8}$ 可得, $(3-x)^3 = \frac{1}{8}$, 解得 $x = \frac{5}{2}$, 所以 $B\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{8}\right)$.

根据图象可得 $x \in [0, 4]$ 时, $f(x) > \frac{1}{8}$ 的解集为 $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$. 又因为 $f(x)$ 的周期为 4,

所以 $f(x) > \frac{1}{8}$ 在实数集上的解集为 $\left(4k + \frac{3}{2}, 4k + \frac{5}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$.

令 $k=0$, 可得区间为 $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$; 令 $k=1$, 可得区间为 $\left(\frac{11}{2}, \frac{13}{2}\right)$, 故 A 项错误;

令 $k=3$, 可得区间为 $\left(\frac{27}{2}, \frac{29}{2}\right)$, 故 B 项错误;

令 $k=-1$, 可得区间为 $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$; 令 $k=0$, 可得区间为 $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$, 故 C 项错误;

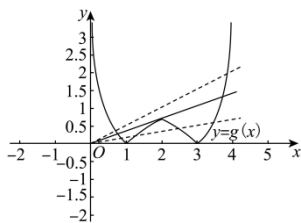
令 $k=2$, 可得区间为 $\left(\frac{19}{2}, \frac{21}{2}\right)$, 故 D 项正确. 故选: D.

10. 定义在 $(0, 4)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x) = f(2+x)$, $0 < x \leq 2$ 时 $f(x) = |\ln x|$, 若 $f(x) > kx$ 的解集为

$\{x | 0 < x < a \text{ 或 } b < x < 4\}$, 其中 $a < b$, 则实数 k 的取值范围为 ()

- A. $\left(\frac{\ln 2}{2}, +\infty\right)$ B. $\left[\frac{\ln 2}{2}, +\infty\right)$ C. $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ D. $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$

【解析】因为函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x) = f(2+x)$, 所以函数 $f(x)$ 关于 $x=2$ 对称,



作出函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 4)$ 上的图象，又因为不等式 $f(x) > kx$ 的解集为 $\{x | 0 < x < a \text{ 或 } b < x < 4\}$ ，其中 $a < b$ ，

根据图象可知：当直线 $y = kx$ 过点 $(2, \ln 2)$ 时为临界状态，此时 $k = \frac{\ln 2}{2}$ ，

故要使不等式 $f(x) > kx$ 的解集为 $\{x | 0 < x < a \text{ 或 } b < x < 4\}$ ，其中 $a < b$ ，则 $k \geq \frac{\ln 2}{2}$ ，故选：B.

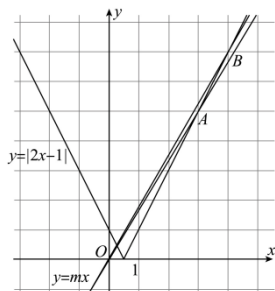
11. 已知函数 $f(x) = mx - |2x - 1|$ ，若满足 $f(x) \geq 0$ 的整数解恰有 3 个，则实数 m 的范围为 ()

- A. $(\frac{5}{3}, \frac{7}{4}]$ B. $[-\frac{7}{4}, -\frac{5}{3})$ C. $[\frac{5}{3}, \frac{7}{4})$ D. $[\frac{3}{2}, \frac{5}{4})$

【解析】由 $f(x) \geq 0$ ，得 $mx \geq |2x - 1|$ ，所以满足 $f(x) \geq 0$ 的整数解恰有 3 个，等价于函数 $y = |2x - 1|$ 的图象在直线 $y = mx$ 非上方的部分有 3 个整数点，由图可知点 $(1, 1), (2, 3), (3, 5)$ 满足条件，

所以当直线 $y = mx$ 的斜率 m 满足 $k_{OA} \leq m < k_{OB}$ ，其中 $A(3, 5), B(4, 7)$ ，

所以 $k_{OA} = \frac{5}{3}, k_{OB} = \frac{7}{4}$ ，所以 $\frac{5}{3} \leq m < \frac{7}{4}$ ，故选：C

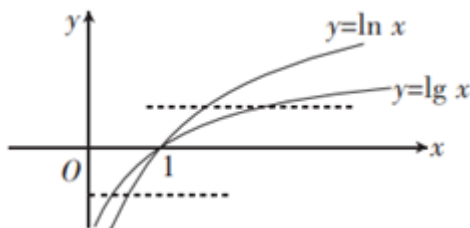


二、多选题

12. 若 $\ln a = \lg b$ ，则下列选项可能成立的是 ()

- A. $a = b$ B. $1 < a < b$ C. $a < b < 1$ D. $b < a < 1$

【解析】在同一直角坐标系中，作出 $y = \ln x$ ， $y = \lg x$ 的图像.

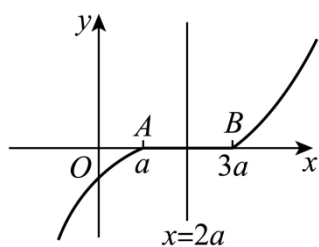


由图可知，当 $a = b = 1$ 时，有 $\ln a = \lg b$ ，故 A 正确；当 $a > 1, b > 1$ 时，显然有 $a < b$ ，故 B 正确；当 $a < 1, b < 1$ 时，显然有 $b < a$ ，故 C 错误，D 正确。故选：ABD.

13. 函数 $f(x) = \begin{cases} -(x-a)^2, & x \leq a \\ 0, & a < x < 3a \\ (x-3a)^2, & x \geq 3a \end{cases} (a > 0)$ ，若不等式 $f(x+2) + f(4a-x) > 0$ 恒成立，则 a 的值可以为 ()

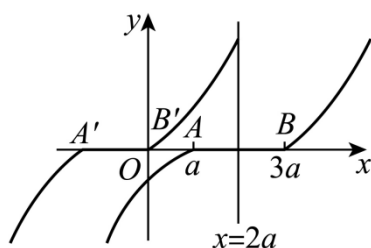
- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\frac{3}{2}$

【解析】作出函数 $f(x)$ 的大致图象如图所示，



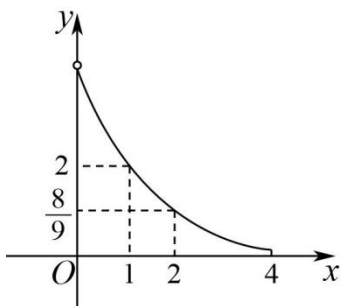
$f(x)$ 的图象关于点 $(2a, 0)$ 中心对称，故 $f(4a-x) = -f(x)$ ，由 $f(x+2) + f(4a-x) > 0$ ，得

$f(x+2) - f(x) > 0$ ，即 $f(x+2) > f(x)$ ，即 $y = f(x)$ 的图象向左平移 2 个单位后得到 $y = f(x+2)$ 的图象一定在 $y = f(x)$ 的图象上方，如图，



$|BB'| = 2 > 2a$ ，即 $a < 1$ ，所以 a 的取值范围为 $(0, 1)$ 。故选：AB.

14. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $[-4, 0) \cup (0, 4]$ 上的奇函数，当 $x \in (0, 4]$ 时， $f(x)$ 的图象如图所示，那么满足不等式 $f(x) - 3^x + 1 \geq 0$ 的 x 的可能取值是 ()。



- A. -4 B. -1 C. $\frac{1}{2}$ D. 2

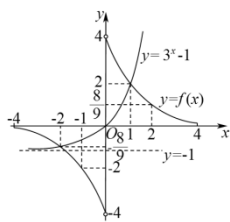
【解析】因为函数 $f(x)$ 是定义在 $[-4, 0) \cup (0, 4]$ 上的奇函数，

由题意，画出函数 $f(x)$ 在 $[-4, 0) \cup (0, 4]$ 上的图象，在同一坐标系内画出 $y = 3^x - 1$ 的图象，

因为 $f(2) = \frac{8}{9}$ ，所以 $f(-2) = -f(2) = -\frac{8}{9} = 3^{-2} - 1$ ，又 $f(1) = 2 = 3^1 - 1$ ，

所以 $f(x)$ 的图象与 $y = 3^x - 1$ 的图象交于 $(-2, -\frac{8}{9})$ 和 $(1, 2)$ 两点，

$f(x) - 3^x + 1 \geq 0$ ，即为 $f(x) \geq 3^x - 1$ ，



由图象可得，只需 $-4 \leq x \leq -2$ 或 $0 < x \leq 1$ ，故 A，C 可能取到，故选：AC.

三、填空题

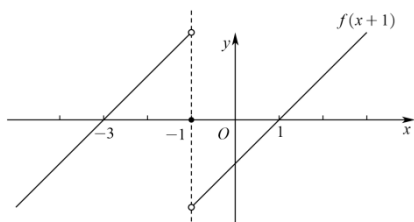
15. 若函数 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，且在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数，又 $f(2)=0$ ，则不等式 $xf(x+1) < 0$ 的解集为_____

【解析】依题意，函数 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，图象关于原点对称，

$f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数，在 $(0, +\infty)$ 上是增函数，且 $f(-2)=f(2)=0$.

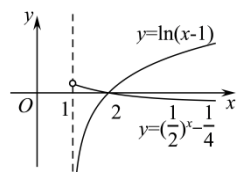
$f(x+1)$ 的图象是由 $f(x)$ 的图象向左平移一个单位所得，由此画出 $f(x+1)$ 的大致图象如下图所示，

由图可知，不等式 $xf(x+1) < 0$ 的解集为 $(0, 1) \cup (-3, -1)$.



16. 不等式 $\left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{1}{4} > \ln(x-1)$ 的解集为_____.

【解析】作出 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{1}{4}$, $y = \ln(x-1)$ ，(其中 $x > 1$) 的图象，如图，



$x > 1$ 时， $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{1}{4}$ 单调递减， $y = \ln(x-1)$ 单调递增，两个函数均过点 $(2, 0)$ ，

$x \in (1, 2)$ 时， $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{1}{4} > 0$ ， $y = \ln(x-1) < 0$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/917020014003006152>