

宁夏长庆中学 2023-2024 学年高三一诊考试数学试卷

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 在 $\triangle ABC$ 中，点 P 为 BC 中点，过点 P 的直线与 AB ， AC 所在直线分别交于点 M ， N ，若 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AN} = \mu \overrightarrow{AC} (\lambda > 0, \mu > 0)$ ，则 $\lambda + \mu$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{5}{4}$ B. 2 C. 3 D. $\frac{7}{2}$

2. 在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_5 a_6 = 3$ ，则 $\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \dots + \log_3 a_{10} =$ ()

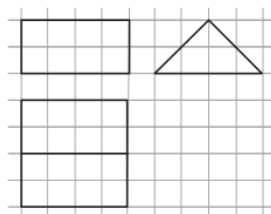
- A. $1 + \log_3 5$ B. 6 C. 4 D. 5

3. 我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化。每一“重卦”由从下到上排列的 6 个爻组成，爻分为阳爻“——”和阴爻“— —”。如图就是一重卦。在所有重卦中随机取一重卦，则该重卦至少有 2 个阳爻的概率是 ()



- A. $\frac{7}{64}$ B. $\frac{11}{32}$ C. $\frac{57}{64}$ D. $\frac{11}{16}$

4. 如图所示，网格纸上小正方形的边长为 1，粗线画出的是某几何体的三视图，其中左视图中三角形为等腰直角三角形，则该几何体外接球的体积是 ()



- A. 16π B. $\frac{32\pi}{3}$
- C. $\frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$ D. $\frac{20\sqrt{5}\pi}{3}$

5. 已知 l 为抛物线 $x^2 = 4y$ 的准线，抛物线上的点 M 到 l 的距离为 d ，点 P 的坐标为 $(4, 1)$ ，则 $|MP| + d$

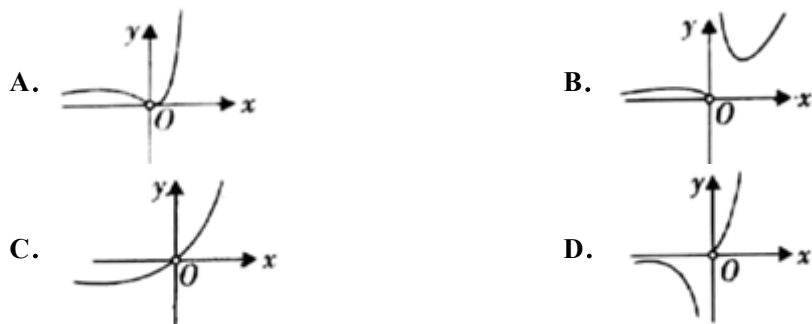
的最小值是（ ）

- A. $\sqrt{17}$ B. 4 C. 2 D. $1+\sqrt{17}$

6. 若集合 $A = \{x \in N \mid x = \sqrt{2020}\}$, $a = 2\sqrt{2}$, 则下列结论正确的是（ ）

- A. $\{a\} \subseteq A$ B. $a \subseteq A$ C. $\{a\} \in A$ D. $a \notin A$

7. 函数 $f(x) = \frac{x^2 e^x}{|x|}$ 的图像大致为（ ）



8. 设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_2 = 3$, $a_3 + a_4 = 12$, 则公比 $q =$ ()

- A. ± 4 B. 4 C. ± 2 D. 2

9. 由曲线 $y = x^2$ 与曲线 $y^2 = x$ 所围成的平面图形的面积为()

- A. 1 B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{4}{3}$

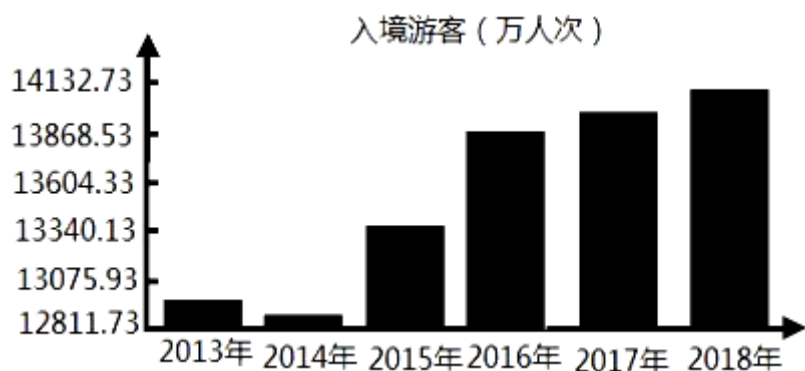
10. 若集合 $A = \{x \mid y = \sqrt{2-x}\}$, $B = \{x \mid -3 \leq x \leq 3\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $[-3, 2]$ B. $\{x \mid 2 \leq x \leq 3\}$
C. $(2, 3)$ D. $\{x \mid -3 \leq x < 2\}$

11. 若点 (x, y) 位于由曲线 $y = |x - 2| + 1$ 与 $x = 3$ 围成的封闭区域内 (包括边界), 则 $\frac{y+1}{y-2}$ 的取值范围是 ()

- A. $[-3, 1]$ B. $[-3, 5]$ C. $(-\infty, -3] \cup [5, +\infty)$ D. $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$

12. 如图是国家统计局公布的年入境游客 (单位: 万人次) 的变化情况, 则下列结论错误的是 ()



- A. 2014 年我国入境游客万人次最少
- B. 后 4 年我国入境游客万人次呈逐渐增加趋势
- C. 这 6 年我国入境游客万人次的中位数大于 13340 万人次
- D. 前 3 年我国入境游客万人次数据的方差小于后 3 年我国入境游客万人次数据的方差

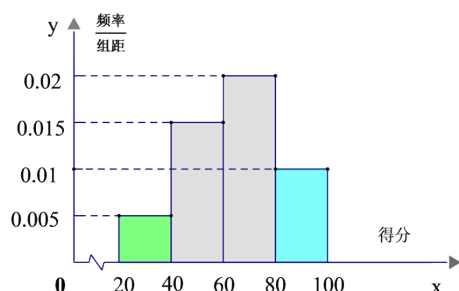
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 $f(x) = x|x|$ ，则满足 $f(2x-1) + f(x) \geq 0$ 的 x 的取值范围为_____.
14. 若函数 $f(x) = a \ln x, (a \in R)$ 与函数 $g(x) = \sqrt{x}$ ，在公共点处有共同的切线，则实数 a 的值为_____.
15. 在 $(1+x)^6 (1+y)^4$ 的展开式中， $x^2 y^3$ 的系数为_____.
16. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $B = 2A$ ， $AC = \sqrt{3}BC$ ，则 A 的值是_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 某校为了解校园安全教育系列活动的成效，对全校学生进行一次安全意识测试，根据测试成绩评定“合格”、“不合格”两个等级，同时对相应等级进行量化：“合格”记 5 分，“不合格”记 0 分.现随机抽取部分学生的成绩，统计结果及对应的频率分布直方图如下所示：

等级	不合格		合格	
得分	$[20, 40)$	$[40, 60)$	$[60, 80)$	$[80, 100)$
频数	6	x	24	y



(I) 若测试的同学中, 分数段[20,40)、 [40,60)、 [60,80)、 [80,100]内女生的人数分别为2人、8人、16人、4人, 完成2×2列联表, 并判断: 是否有90%以上的把握认为性别与安全意识有关?

是否合格	不合格	合格	总计
性别			
男生			
女生			
总计			

(II) 用分层抽样的方法, 从评定等级为“合格”和“不合格”的学生中, 共选取10人进行座谈, 现再从这10人中任选4人, 记所选4人的量化总分为 X , 求 X 的分布列及数学期望 $E(X)$;

(III) 某评估机构以指标 M ($M = \frac{E(X)}{D(X)}$, 其中 $D(X)$ 表示 X 的方差)来评估该校安全教育活动的成效, 若 $M \geq 0.7$,

则认定教育活动是有效的; 否则认定教育活动无效, 应调整安全教育方案.在 (II) 的条件下, 判断该校是否应调整安全教育方案?

附表及公式: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a + b + c + d$.

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

18. (12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的上顶点为 B , 圆 $C': x^2 + y^2 = 4$ 与 y 轴的正半轴交于点 A , 与 C

有且仅有两个交点且都在 C 轴上, $\frac{|OB|}{|OA|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (O 为坐标原点).

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 已知点 $D\left(-1, \frac{3}{2}\right)$, 不过 D 点且斜率为 $-\frac{1}{2}$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 证明: 直线 DM 与直线 DN 的斜率互为相反数.

19. (12 分) 在平面直角坐标系中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = 1 + \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数). 以原点为极点, x 轴的非负半轴为极轴, 建立极坐标系.

(1) 求曲线 C 的极坐标方程;

(2) 直线 $l: \begin{cases} x = 1 + t \cos \theta \\ y = t \sin \theta \end{cases}$ (t 为参数) 与曲线 C 交于 A, B 两点, 求 $|AB|$ 最大时, 直线 l 的直角坐标方程.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, $x_1, x_2, x_3 \in R$, 且 $x_1 < x_2 < x_3$.

(1) 当 $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的减区间;

(2) 求证: 方程 $f'(x) = 0$ 有两个不相等的实数根;

(3) 若方程 $f'(x) = 0$ 的两个实数根是 α, β ($\alpha < \beta$), 试比较 $\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_2 + x_3}{2}$ 与 α, β 的大小, 并说明理由.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x - \ln(x + m) + m, m \in R$.

(1) 若 $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的极值点, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $m \leq 2$ 时, 证明: $f(x) > m$

22. (10 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases}$ ($a > b > 0, \varphi$ 为参数), 在以 O 为极点,

x 轴的正半轴为极轴的极坐标系中, 曲线 C_2 是圆心在极轴上, 且经过极点的圆. 已知曲线 C_1 上的点 $M\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 对应的

参数 $\varphi = \frac{\pi}{4}$, 射线 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 与曲线 C_2 交于点 $D\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$.

(1) 求曲线 C_1, C_2 的直角坐标方程;

(2) 若点 A, B 为曲线 C_1 上的两个点且 $OA \perp OB$, 求 $\frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2}$ 的值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、B

【解析】

由 M, P, N 三点共线, 可得 $\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\mu} = 1$, 转化 $\lambda + \mu = (\lambda + \mu) \left(\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\mu} \right)$, 利用均值不等式, 即得解.

【详解】

因为点 P 为 BC 中点, 所以 $\vec{AP} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$,

又因为 $\vec{AM} = \lambda\vec{AB}$, $\vec{AN} = \mu\vec{AC}$,

所以 $\vec{AP} = \frac{1}{2\lambda}\vec{AM} + \frac{1}{2\mu}\vec{AN}$.

因为 M, P, N 三点共线,

所以 $\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\mu} = 1$,

所以 $\lambda + \mu = (\lambda + \mu) \left(\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\mu} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mu}{\lambda} \right) + \frac{1}{2} \dots 1 + \frac{1}{2} \times 2 \sqrt{\frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\mu}{\lambda}} = 2$,

当且仅当 $\begin{cases} \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\mu}{\lambda}, \\ \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\mu} = 1 \end{cases}$ 即 $\lambda = \mu = 1$ 时等号成立,

所以 $\lambda + \mu$ 的最小值为 1.

故选: B

【点睛】

本题考查了三点共线的向量表示和利用均值不等式求最值, 考查了学生综合分析, 转化划归, 数学运算的能力, 属于中档题.

2、D

【解析】

由对数运算法则和等比数列的性质计算.

【详解】

由题意 $\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \dots + \log_3 a_{10} = \log_3 (a_1 a_2 \dots a_{10})$

$= \log_3 (a_5 a_6)^5 = 5 \log_3 (a_5 a_6) = 5 \log_3 3 = 5$.

故选: D.

【点睛】

本题考查等比数列的性质，考查对数的运算法则．掌握等比数列的性质是解题关键．

3、C

【解析】

利用组合的方法求所求的事件的对立事件,即该重卦没有阳爻或只有 1 个阳爻的概率,再根据两对立事件的概率和为 1 求解即可.

【详解】

设“该重卦至少有 2 个阳爻”为事件 A .所有“重卦”共有 2^6 种;“该重卦至少有 2 个阳爻”的对立事件 $\bar{A}$ 是“该重卦没有阳爻或只有 1 个阳爻”,其中,没有阳爻(即 6 个全部是阴爻)的情况有 1 种,只有 1 个阳爻的情况有 $C_6^1 = 6$ 种,故

$$P(\bar{A}) = \frac{1+6}{2^6} = \frac{7}{64}, \text{ 所以该重卦至少有 2 个阳爻的概率是 } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{7}{64} = \frac{57}{64}.$$

故选: C

【点睛】

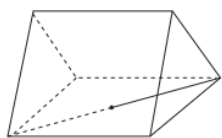
本题主要考查了对立事件概率和为 1 的方法求解事件概率的方法.属于基础题.

4、C

【解析】

作出三视图所表示几何体的直观图,可得直观图为直三棱柱,并且底面为等腰直角三角形,即可求得外接球的半径,即可得外接球的体积.

【详解】



如图为几何体的直观图,上下底面为腰长为 $\sqrt{2}$ 的等腰直角三角形,三棱柱的高为 4,其外接球半径为 $r = 2\sqrt{2}$, 所以

$$\text{体积为 } V = \frac{4}{3} \pi \times (2\sqrt{2})^3 = \frac{64\sqrt{2}}{3} \pi.$$

故选: C

【点睛】

本题考查三视图还原几何体的直观图、球的体积公式,考查空间想象能力、运算求解能力,求解时注意球心的确定.

5、B

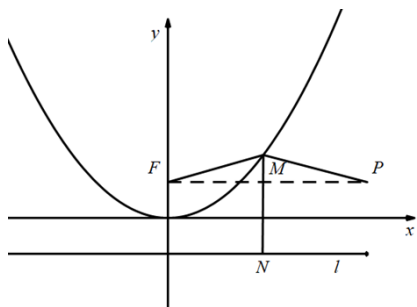
【解析】

设抛物线焦点为 F ，由题意利用抛物线的定义可得，当 P, M, F 共线时， $|MP| + d$ 取得最小值，由此求得答案.

【详解】

解：抛物线焦点 $F(0,1)$ ，准线 $y = -1$ ，

过 M 作 $MN \perp l$ 交 l 于点 N ，连接 FM



由抛物线定义 $|MN| = |MF| = d$ ，

$$\therefore |MP| + d = |MP| + |MF| \geq |PF| = \sqrt{4^2} = 4,$$

当且仅当 P, M, F 三点共线时，取“=”号，

$\therefore |MP| + d$ 的最小值为 4.

故选：B.

【点睛】

本题主要考查抛物线的定义、标准方程，以及简单性质的应用，体现了数形结合的数学思想，属于中档题.

6、D

【解析】

由题意 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \sqrt{2020}\} = \emptyset$ ，分析即得解

【详解】

由题意 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \sqrt{2020}\} = \emptyset$ ，故 $a \notin A$ ， $A \subseteq \{a\}$

故选：D

【点睛】

本题考查了元素和集合，集合和集合之间的关系，考查了学生概念理解，数学运算能力，属于基础题.

7、A

【解析】

根据 $f(x) > 0$ 排除 C ， D ，利用极限思想进行排除即可.

【详解】

解：函数的定义域为 $\{x \mid x \neq 0\}$ ， $f(x) > 0$ 恒成立，排除 C ， D ，

当 $x > 0$ 时， $f(x) = \frac{x^2 e^x}{|x|} = xe^x$ ，当 $x \rightarrow 0$ ， $f(x) \rightarrow 0$ ，排除 B ，

故选：A.

【点睛】

本题主要考查函数图象的识别和判断，利用函数值的符号以及极限思想是解决本题的关键，属于基础题.

8、D

【解析】

由 $S_2 = 3$ 得 $a_1 + a_2 = 3$ ，又 $a_3 + a_4 = (a_1 + a_2)q^2 = 12$ ，两式相除即可解出 q 。

【详解】

解：由 $S_2 = 3$ 得 $a_1 + a_2 = 3$ ，

又 $a_3 + a_4 = (a_1 + a_2)q^2 = 12$ ，

$\therefore q^2 = 4$ ， $\therefore q = -2$ ，或 $q = 2$ ，

又正项等比数列 $\{a_n\}$ 得 $q > 0$ ，

$\therefore q = 2$ ，

故选：D.

【点睛】

本题主要考查等比数列的性质的应用，属于基础题.

9、B

【解析】

首先求得两曲线的交点坐标，据此可确定积分区间，然后利用定积分的几何意义求解面积值即可。

【详解】

联立方程： $\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = x \end{cases}$ 可得： $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$ ， $\begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \end{cases}$ ，

结合定积分的几何意义可知曲线 $y = x^2$ 与曲线 $y^2 = x$ 所围成的平面图形的面积为：

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

本题选择 B 选项.

【点睛】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/917041131052006116>