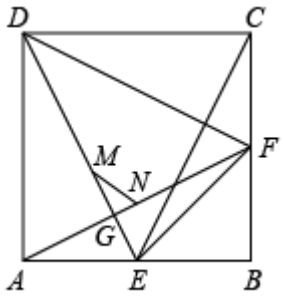
难点特训（二）和正方形有关的压轴大题

1．如图，正方形 $ABCD$ 边长为 4，点 E 在边 AB 上（点 E 与点 A、B 不重合），过点 A 作 $AF\perp DE$，垂足为 G，AF 与边 BC 相交于点 F.



(1)求证：$\triangle ADF\cong\triangle DCE$；

(2)若 $\triangle DEF$ 的面积为 $\frac{13}{2}$，求 AF 的长；

(3)在（2）的条件下，取 DE,AF 的中点 M，N，连接 MN，求 MN 的长.

【答案】(1)见详解

(2)5 或 $\sqrt{17}$

(3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

【分析】（1）先证得 $\angle AED=\angle AFB$，易证 $\Delta ABF\cong\Delta DAE\left(AAS\right)$，由此的 $AF=DE$，又由互余可得出 $\angle CDE=\angle DAF$，进而可得结论；

（2）根据三角形得面积求得 AE，再根据勾股定理求得 DE，根据（1）中 AF=DE 即可得出结论；

（3）连接 AM 并延长交 CD 于点 P，连接 PF，可证明 $\Delta DPM\cong\Delta EAM\left(AAS\right)$，所以 PM=AM，DP=AE=3 或 1，又 MN 是 ΔAPF 的中位线，求出 PF 的长即可；

（1）

证明：$\because AF\perp DE$，$\angle B=90°$

$\therefore\angle AED=\angle AFB$

在 ΔABF 和 ΔDAE 中

$$\because\begin{cases}\angle AED=\angle AFB\\ \angle DAE=\angle B\\ AD=AB\end{cases}$$

$\therefore\Delta ABF\cong\Delta DAE\left(AAS\right)$

$\therefore AF = DE$

$\because \angle ADE + \angle CDE = \angle ADE + \angle DAG = 90°$

$\therefore \angle CDE = \angle DAF$

在 ΔADF 和 ΔDCE 中

$$\because \begin{cases} AD = DC \\ \angle DAF = \angle CDE \\ AF = DE \end{cases}$$

$\therefore \Delta ADF \cong \Delta DCE(SAS)$

（2）

$\because \Delta ABF \cong \Delta DAE$

$\therefore$ 设 $AE = BF = x$，则 $BE = CF = 4 - x$

$\therefore S_{\Delta DEF} = S_{ABCD} - S_{\Delta ADE} - S_{\Delta EBF} - S_{\Delta DCF}$

$$= 4 \times 4 - \frac{1}{2} \cdot 4x - \frac{1}{2}(4-x)x - \frac{1}{2} \times 4(4-x)$$

$$= 8 - 2x + \frac{1}{2}x^2$$

$$\therefore 8 - 2x + \frac{1}{2}x^2 = \frac{13}{2}$$

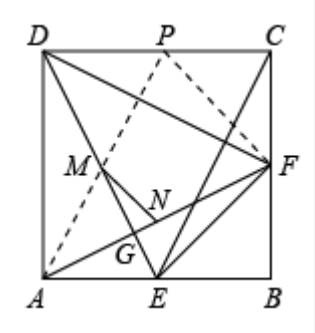
解得：$x_1 = 3$，$x_2 = 1$

$\because AE = 3$ 或 $AE = 1$

$\therefore AF = DE = 5$ 或 $\sqrt{17}$

（3）

如图，连接 AM 并延长交 CD 于点 P，连接 PF，



$\because$ 点 M 是 DE 的中点

$\therefore DM = ME$

$\because AB // CD$

$\therefore \angle PDM = \angle AEM$，$\angle DPM = \angle EAM$

$\therefore \Delta DPM \cong \Delta EAM\left(AAS\right)$

$\therefore PM = AM$，$DP = AE = 3$ 或 1

当 $AE = 3$ 时，$BF = EP = 3$

$\therefore CF = CP = 1$

$\therefore PF = \sqrt{2}$

$\therefore MN = \frac{1}{2}PF = \frac{\sqrt{2}}{2}$

当 $AE = 1$ 时，$BF = EP = 1$

$\therefore CF = CP = 3$

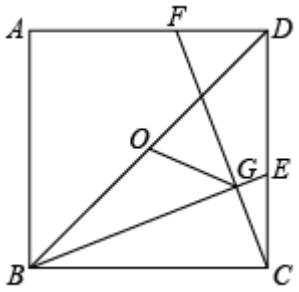
$\therefore PF = 3\sqrt{2}$

$\therefore MN = \frac{1}{2}PF = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

综上，MN 的长度为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

【点睛】本题主要考查正方形的性质、三角形的全等、勾股定理，掌握相关知识并灵活应用做出辅助线是解题的关键.

2. 正方形 $ABCD$ 中，E，F 分别为 CD，AD 上一点，$CE = DF$，BE，CF 交于点 G，O 为 BD 的中点.



(1)求证：$\triangle BCE \cong \triangle CDF$；

(2)求证：$BE \perp CF$ ；

(3)求证：$BG - CG = \sqrt{2}OG$

【答案】(1)见解析

(2)见解析

(3)见解析

【分析】（1）根据四边形 $ABCD$ 是正方形，判定 $\triangle BCE \cong \triangle CDF$,

（2）根据全等的性质可得 $\angle CBE = \angle DCF$，再根据 $\angle BCG + \angle DCF = 90°$,得出 $\angle BCG + \angle CBE = 90°$，进

而得到$\angle BGC=90°$, 即$BE\perp CF$

（3）连接OC，在BG取点H，使得$BH=CG$，连接OH，证明$\triangle OGH$为等腰直角三角形，进而得出$HG=\sqrt{2}OG$, 再判定$\triangle BOH\cong\triangle COG$, 得出$BH=CG$, 根据$BG-BH=HG$, 即可得到$BG-CG=\sqrt{2}OG$

（1）

证明：∵ 四边形$ABCD$是正方形

$\therefore BC=CD,\angle BCD=\angle CDF=90°$，

在$\triangle BCE$和$\triangle CDF$中，

$$\begin{cases}BC=CD\\\angle BCD=\angle CDF\\CE=DF\end{cases}$$

$\therefore\triangle BCE\cong\triangle CDF$

（2）

证明：$\because\triangle BCE\cong\triangle CDF$

$\therefore\angle CBE=\angle DCF$，

又$\because\angle BCG+\angle DCF=90°$

$\therefore\angle BCG+\angle CBE=90°$

$\therefore\angle BGC=90°$，即$BE\perp CF$

（3）

证明：如图，连接OC，

在BG取点H，使得$BH=CG$，连接OH

∵ O为BD的中点，即O为正方形的对称中心，

∴ $\triangle BOC$是等腰直角三角形，

由（1）知$\angle EBC=\angle DCF$

$\therefore\angle OBH=45°-\angle EBC,\angle OCG=45°-\angle DCF$

$\therefore\angle OBH=\angle OCG$

在$\triangle OBH$和$\triangle OCG$中，

$$\begin{cases}OB=OC\\\angle OBH=\angle OCG\\BH=CG\end{cases}$$

$\therefore\triangle OBH\cong\triangle OCG$

$\therefore OH=OG,\angle BOH=\angle COG$

又$\because \angle BOH+\angle HOC=90°$

$\therefore \angle COG+\angle HOC=90°$

$\therefore \triangle GOH$ 是等腰直角三角形

$\therefore HG=\sqrt{2}OG, HO=GO,$

$\because \angle BOC=\angle GOH=90°$

$\therefore \angle BOH=\angle COG,$

在 $\triangle BOH$ 和 $\triangle COG$ 中，

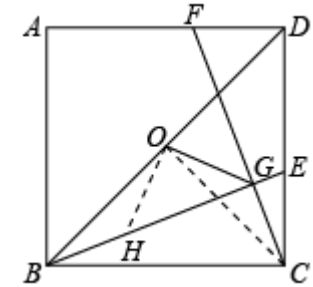
$$\begin{cases} BO=CO \\ \angle BOH=\angle COG \\ HO=GO \end{cases}$$

$\therefore \triangle BOH \cong \triangle COG$

$\therefore BH=CG$

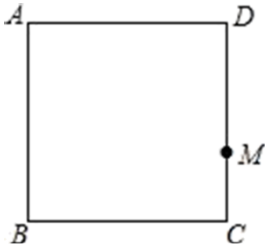
$\because BG-BH=HG$

$\therefore BG-CG=\sqrt{2}OG$



【点睛】本题主要考查了正方形的性质，全等三角形的判定与性质以及等腰直角三角形性质的综合应用，解决问题的关键是证出 $\triangle GOH$ 是等腰直角三角形，依据全等三角形的对应边相等进行求解.

3．如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 M 在 CD 边上，点 N 在正方形 $ABCD$ 外部，且满足 $\angle CMN=90°$，$CM=MN$，连接 AN，CN，取 AN 的中点 E，连接 BE，AC，交于 F 点.



(1)依题意补全图形；

(2)求 $\angle ABE$ 的度数；

(3)设 $AB=2$，若点 M 沿着线段 CD 从点 C 运动到点 D，则在该运动过程中，线段 EN 所扫过的面积为多少？

【答案】(1)补图见解析；

(2)$\angle ABE=45°$；

(3)3

【分析】（1）依题意补全图形，即可；

（2）连接 CE，先证得 $\angle ACN=\angle ACD+\angle MCN=90°$．再根据直角三角形的性质可得 $AE=CE=\frac{1}{2}AN$．可得 $\triangle ABE\cong\triangle CBE$，即可求解；

（3）根据题意可得点 E 在 AC 的垂直平分线上，可得点 E 在 BD 上，从而得到在点 M 沿着线段 CD 从点 C 运动到点 D 的过程中，线段 EN 所扫过的图形为四边形 $DFCN$．此时 $DN=CD=2$，$\angle CDN=90°$，再证得四边形 $DFCN$ 为梯形．然后根据梯形的面积，即可求解．

（1）

解:依题意补全图形，如图 1 所示．

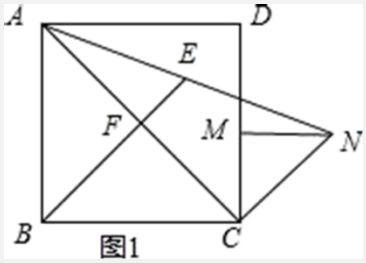


图1

（2）

证明：连接 CE，如图 2 所示．

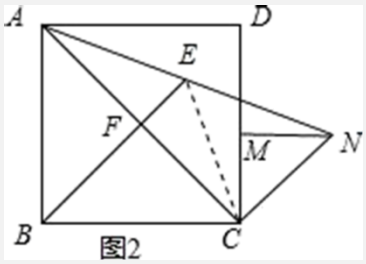


图2

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$\angle ABC=\angle BCD=90°$，$AB=BC$，

∴$\angle ACB=\angle ACD=\frac{1}{2}\angle BCD=45°$，

∵$\angle CMN=90°$，$CM=MN$，

$\therefore \angle MCN = 45°$，

$\therefore \angle ACN = \angle ACD + \angle MCN = 90°$.

∵在 Rt△ACN 中，点 E 是 AN 中点，

$\therefore AE = CE = \frac{1}{2}AN$.

$\because AE = CE$， $AB = CB$， $BE = BE$，

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBE$，

$\therefore \angle ABE = \angle CBE$.

$\therefore \angle ABE = \frac{1}{2}\angle ABC = 45°$.

（3）

解：连接 DE，

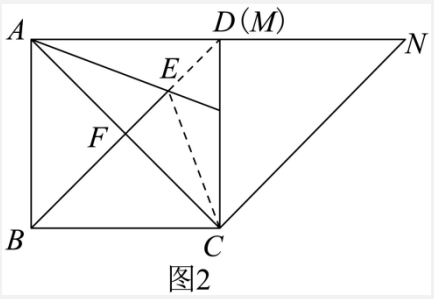


图2

∵由（2）得：$AE=CE$，

∴点 E 在 AC 的垂直平分线上，

在正方形 $ABCD$ 中，BD 垂直平分 AC，$\angle ACD=45°$，$\triangle BCD$ 为等腰直角三角形，

∴点 E 在 BD 上，

∴$BF=DF=CF$，

∴在点 M 沿着线段 CD 从点 C 运动到点 D 的过程中，线段 EN 所扫过的图形为四边形 $DFCN$．此时 $DN=CD=2$，$\angle CDN=90°$，

$\therefore CN = \sqrt{CD^2 + DN^2} = \sqrt{2}CD = 2\sqrt{2}$

$\because \angle DCN = 45°$，

∴$\angle ACN=90°$，即 $CN \perp AC$，

$\therefore BD \parallel CN$，

∴四边形 $DFCN$ 为梯形．

$\because AB = 2$，

∴$BC=CD=AB=2$，

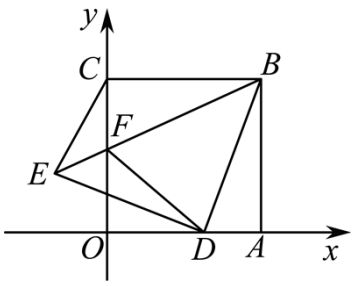
$\therefore BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=2\sqrt{2}$，

$\therefore CF=DF=\frac{1}{2}BD=\sqrt{2}$，

$\therefore S_{梯形DFCN}=\frac{1}{2}(DF+CN)\cdot CF=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+2\sqrt{2})\times\sqrt{2}=3$.

【点睛】本题主要考查了正方形的性质，全等三角形的判定和性质，勾股定理，梯形等知识，熟练掌握正方形的性质，全等三角形的判定和性质，勾股定理，梯形等知识是解题的关键.

4．如图，在正方形 $OABC$ 中，边 OA、OC 分别在 x 轴、y 轴上，点 B 的坐标为（4，4），点 D 在线段 OA 上，以点 D 为直角顶点，BD 为直角边作等腰直角三角形 BDE，BE 交 y 轴于点 F.



(1)当 $AD=1$ 时，求点 E 到 x 轴的距离；

(2)连接 DF，当点 D 在线段 OA 上运动时，$\triangle ODF$ 的周长是否改变，若改变，请说明理由；若不变，求出其周长；

(3)连接 CE，当点 D 在线段 OA 上运动时，求 CE 的最小值.

【答案】(1)1

(2)$\triangle ODF$ 的周长不改变，其周长为 8；

(3)$2\sqrt{2}$

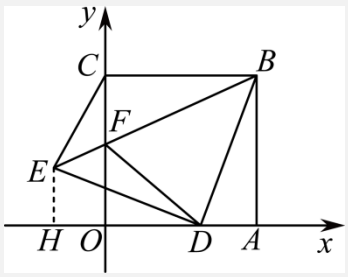
【分析】（1）如图，过点 E 作 $EH\perp x$ 轴于 H．证明$\triangle EDH\cong\triangle DBA$（AAS），推出 $DH=AB$，$EH=AD=1$，可得结论.

（2）结论：$\triangle ODF$ 的周长不变．想办法证明 $DF=CF+AD$ 即可.

（3）由（1）可知，$OE=OH$，推出$\angle EOH=\angle COE=45°$，推出点 E 的运动轨迹是射线 OE，过点 C 作 $CT\perp OE$ 于 T，当点 E 与点 T 重合时，EC 的值最小.

（1）

解：如图，过点 E 作 $EH\perp x$ 轴于 H.



∵四边形 $OABC$ 是正方形，B（4，4），

∴$OA=AB=4$，$\angle BAD=90°$，

∵$\triangle BDE$ 是等腰直角三角形，

∴$DE=DB$，$\angle EDB=\angle EHD=\angle BAD=90°$，

∴$\angle EDH+\angle BDA=90°$，$\angle BDA+\angle ABD=90°$，

∴$\angle EDH=\angle ABD$，

∴$\triangle EDH\cong\triangle DBA$（AAS），

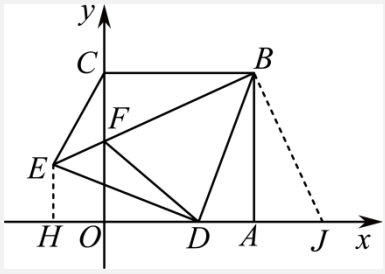
∴$EH=AD=1$，

即点 E 到 x 轴的距离为 1；

（2）

解：$\triangle ODF$ 的周长不变.

理由：将$\triangle BCF$ 绕点逆时针旋转 90°得到$\triangle BAJ$. 如图，



∵$\angle CBF=\angle ABJ$，

∴$\angle CBA=\angle FBJ=90°$，

∵$\angle EBD=45°$，

∴$\angle DBF=\angle DBJ=45°$，

∵$DB=DB$，$BF=BJ$，

∴$\triangle DBF\cong\triangle DBJ$（SAS），

∴$DF=DJ$，

∵$DJ=DA+AJ$，$CF=AJ$，

∴$DF=CF+AD$，

∴△*ODF* 的周长=*OF*+*DF*+*OD*=*OF*+*CF*+*OD*+*AD*=*OC*+*OA*=8，

∴△*ODF* 的周长不变，其周长为 8.

（3）

解：由（1）可知，△*EDH*≌△*DBA*（AAS），

∴*DH*=*AB*，*EH*=*AD*，

∵*OA*=*AB*，

∴*DH*=*OA*，

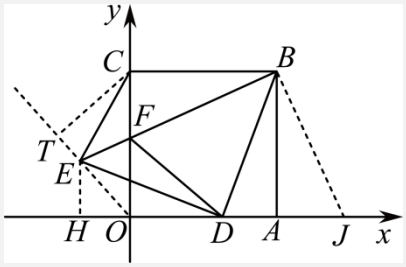
∴*OH*=*DA*

∴*EH*=*OH*，

∴∠*EOH*=∠*COE*=45°，

∴点 *E* 的运动路径是射线 *OE*，

过点 *C* 作 *CT*⊥*OE* 于 *T*，如图，



当点 *E* 与点 *T* 重合时，*EC* 的值最小，

最小值 $CT=\frac{\sqrt{2}}{2}OC=2\sqrt{2}$，

∴*EC* 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

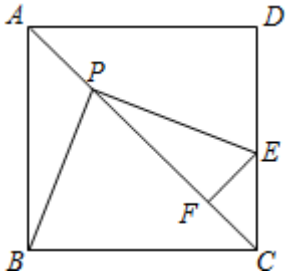
【点睛】本题考查了正方形的性质，等腰直角三角形的性质，全等三角形的判定和性质，垂线段最短等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题，此题属于四边形综合题，属于中考压轴题.

5．已知边长为 2 的正方形 *ABCD* 中，*P* 是对角线 *AC* 上的一个动点，过点 *P* 作 *PE*⊥*PB*，*PE* 交射线 *DC* 于点 *E*，过点 *E* 作 *EF* 垂直 *AC* 所在的直线，垂足为点 *F*.

（1）如图，当 *E* 点在线段 *DC* 上时，求证：*PB*＝*PE*；

（2）在点 *P* 的运动过程中，△*PEC* 能否为等腰三角形？如果能，直接写出此时 *AP* 的长，如果不能，说明理由；

（3）在点 *P* 的运动过程中，*AP*、*PF*、*FC* 的长度是否满足某种数量关系？若满足，试写出解答过程；若不满足，试说明理由.



【答案】（1）证明见解析；（2）$AP=2$，理由见解析；（3）$AP+CF=PF$.

【分析】(1)过点 P 作 $PG\perp BC$ 于 G，过点 P 作 $PH\perp DC$ 于 H，要证 $PB=PE$，只需证到$\triangle PGB\cong\triangle PHE$即可；

（2）可分点 E 在线段 DC 上和点 E 在线段 DC 的延长线上两种情况讨论，通过计算就可求出符合要求的 AP 的长；

（3）连接 BD，如图，易证$\triangle BOP\cong\triangle PFE$，则有 $BO=PF$，可得出最后结论.

【详解】解：（1）如图所示，过点 P 作 $PG\perp BC$ 于 G，过点 P 作 $PH\perp DC$ 于 H

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，$PG\perp BC$，$PH\perp DC$

∴$\angle GCP=\angle CPG=\angle ACD=\angle HPC=45°$

在$\triangle PCG$ 和$\triangle PHC$ 中

$$\begin{cases}\angle GCP=\angle HCP\\ \angle CPG=\angle CPH\\ PC=PC\end{cases}$$

∴$\triangle PCG\cong\triangle PCH$（$ASA$）

∴$PG=PH$

∴四边形 $PGCH$ 是正方形

∴$\angle HPE+\angle EPG=90°$

∵$BP\perp PE$

∴$\angle BPE=90°$

∴$\angle BPG+\angle EPG=90°$

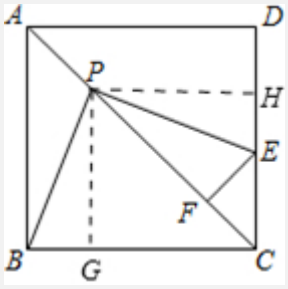
∴$\angle HPE=GPB$

在$\triangle PBG$ 和$\triangle PEH$ 中

$$\begin{cases}\angle PGB=\angle PHE=90^{\circ}\\ \angle GPB=\angle HPE\\ PG=PH\end{cases}$$

∴$\triangle PBG\cong\triangle PEH$（$AAS$）

∴*PB*=*PE*



（2）①若点 *E* 在线段 *BC* 上，如图所示

∵∠*BPE*=∠*BCE*=90°

∴∠*PBC*+∠*PEC*=180°

∵∠*PBC*＜90°

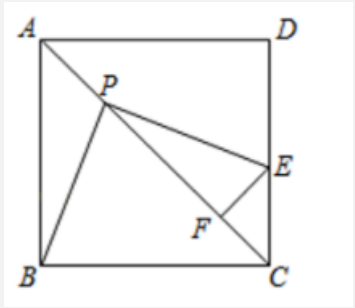
∴∠*PEC*＞90°

若三角形 *PEC* 为等腰三角形，则 *EP*=*EC*

∴∠*EPC*=*ECP*=45°

∴∠*PEC*=90°与∠*PEC*＞90°矛盾

∴点 *E* 在线段 *DC* 上时不能构成等腰三角形；



②若点 *E* 在线段 *DC* 的延长线上，如图所示

若三角形 *PEC* 是等腰三角形

∵∠*PCE*=135°

∴此时只能是 *CP*=*CE*

∴∠*CPE*=∠*CEP*=22.5°

∴∠*APB*=180°-90°-22.5°=67.5°

∵∠*PRC*=∠*BPE*+∠*PBR*=∠*CER*+∠*ECR*，∠*BPE*=∠*RCE*=90°

∴∠*PBR*=∠*CER*=22.5°

∴∠*ABP*=67.5°

∴∠*APB*=∠*APB*

∴$AP=AB=2$

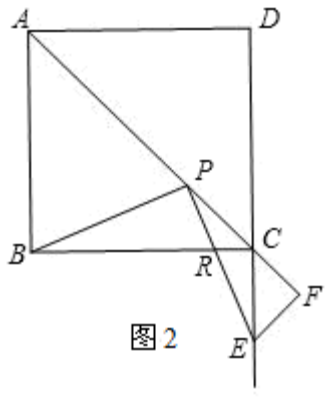


图2

（3）如图所示，连接 BD

∵四边形 $ABCD$ 是正方形

∴$\angle BOP=90°$

∵$PE\perp PB$

∴$\angle BPE=90°$

∴$\angle PBO=90°-\angle BPO=\angle EPF$

∵$FE\perp AC$

∴$\angle PFE=90°$

∴$\angle BOP=\angle PFE$

∵$PB=PE$

∴$\triangle BOP\cong\triangle PFE$

∴$BO=PF$

∴$AP+FC++PF=AC=2OB$

∴$AP+CF=PF$

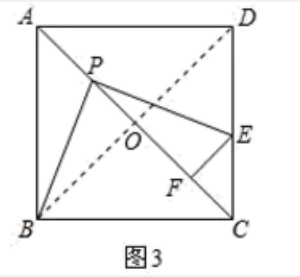


图3

【点睛】本题主要考查了正方形的性质，全等三角形的性质与判定，四边形的内角和和三角形的内角和定理，三角形外角的知识，等腰三角形的性质等等，解题的关键在于能够熟练掌握相关知识进行求解.

6．如图，已知四边形 $ABCD$ 是正方形，对角线 AC、BD 相交于 O．

（1）如图 1，设 E、F 分别是 AD、AB 上的点，且$\angle EOF=90°$，线段 AF、BF 和 EF 之间存在一定的数量关系．请你用等式直接写出这个数量关系；

（2）如图 2，设 E、F 分别是 AB 上不同的两个点，且$\angle EOF=45°$，请你用等式表示线段 AE、BF 和 EF 之间的数量关系，并证明．

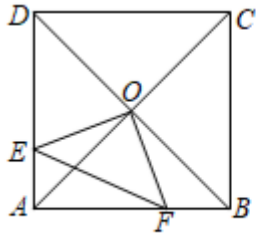


图 1

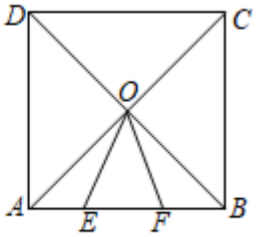


图 2

【答案】（1）$EF^2=AF^2+BF^2$；（2）$EF^2=BF^2+AE^2$，见解析

【分析】（1）首先证明$\triangle EOA\cong\triangle FOB$，推出 $AE=BF$，从而得出结论；

（2）在 BC 上取一点 H，使得 $BH=AE$．由$\triangle OAE\cong\triangle OBH$，推出 $AE=BH$，$\angle AOE=\angle BOH$，$OE=OH$，由$\triangle FOE\cong\triangle FOH$，推出 $EF=FH$，由$\angle FBH=90°$，推出 $FH^2=BF^2+BH^2$，由此即可解答．

【详解】解：（1）$EF^2=AF^2+BF^2$．

理由：如图 1，

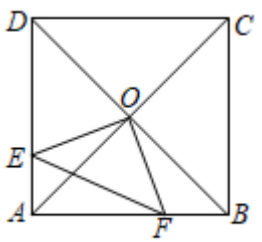


图 1

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$OA=OB$，$\angle OAE=\angle OBF=45°$，$AC\perp BD$，

∴$\angle EOF=\angle AOB=90°$，

∴$\angle EOA=\angle FOB$，

在$\triangle EOA$ 和$\triangle FOB$ 中，

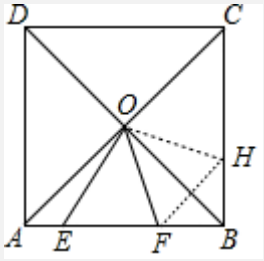
$$\begin{cases}\angle EOA=\angle FOB\\ OA=OB\\ \angle OAE=\angle OBF\end{cases}$$

∴$\triangle EOA\cong\triangle FOB$（$ASA$），

∴$AE=BF$，

在 $Rt\triangle EAF$ 中，$EF^2=AE^2+AF^2=AF^2+BF^2$；

（2）在 BC 上取一点 H，使得 $BH=AE$.



∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$OA=OB$，$\angle OAE=\angle OBH$，$\angle AOB=90°$，

在△OAE 和△OBH 中，

$$\begin{cases} OA=OB \\ \angle OAE=\angle OBH \\ AE=BH \end{cases},$$

∴△OAE≌△OBH（SAS），

∴$AE=BH$，$\angle AOE=\angle BOH$，$OE=OH$，

∵$\angle EOF=45°$，

∴$\angle AOE+\angle BOF=45°$，

∴$\angle BOF+\angle BOH=45°$，

∴$\angle FOE=\angle FOH=45°$，

在△FOE 和△FOH 中•，

$$\begin{cases} OF=OF \\ \angle FOE=\angle FOH \\ OE=OH \end{cases},$$

∴△FOE≌△FOH（SAS），

∴$EF=FH$，

∵$\angle FBH=90°$，

∴$FH^2=BF^2+BH^2$，

∴$EF^2=BF^2+AE^2$；

【点睛】本题考查正方形的性质、全等三角形的判定和性质，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题.

7．如图 1，已知四边形 $ABCD$ 是正方形，E 是对角线 BD 上的一点，连接 AE，CE.

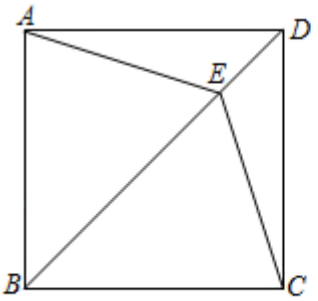


图 1

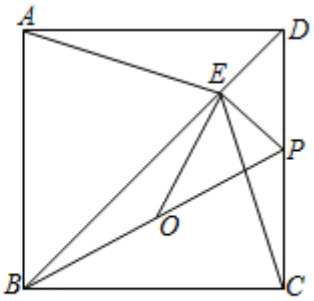


图 2

（1）求证：$AE=CE$；

（2）如图 2，点 P 是边 CD 上的一点，且 $PE\perp BD$ 于 E，连接 BP，O 为 BP 的中点，连接 EO．若 $\angle PBC=30°$，求$\angle POE$ 的度数；

（3）在（2）的条件下，若 $OE=\sqrt{2}$，求 CE 的长．

【答案】（1）详见解析；（2）30°；（3）2

【分析】（1）利用正方形的性质，得到 $AD=CD$，$\angle ADB=\angle CDB=45°$，进而判断$\triangle ADE\cong\triangle CDE$ 得到结论；

（2）直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，可以得到 $OB=OE$，$\angle OBE=\angle OEB=15°$，再利用外角和定理求得；

（3）连接 OC，与（2）同理得到$\angle POC=60°$，则$\triangle EOC$ 为直接三角形，再应用勾股定理求得．

【详解】证明：（1）∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$AD=CD$，$\angle ADB=\angle CDB=45°$，

在$\triangle ADE$ 和$\triangle CDE$ 中，

$$\begin{cases} AD=CD \\ \angle ADE=\angle CDE \\ DE=DE \end{cases},$$

∴$\triangle ADE\cong\triangle CDE$（SAS），

∴$AE=CE$；

（2）∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$\angle DBC=45°$，

∵$\angle PBC=30°$，

∴$\angle PBE=15°$，

∵$PE\perp BD$，O 为 BP 的中点，

∴$EO=BO=PO$，

∴$\angle OBE=\angle OEB=15°$，

∴∠EOP＝∠OBE＋∠OEB＝30°；

（3）如图，连接 OC，

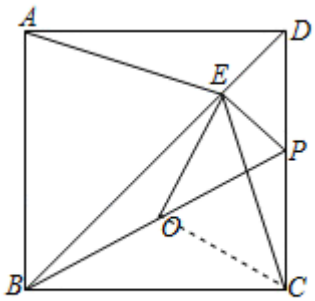


图 2

∵点 O 是 BP 的中点，∠BCP＝90°，

∴CO＝BO，

∴EO＝CO＝$\sqrt{2}$，∠OBC＝∠OCB＝30°，

∴∠POC＝60°，

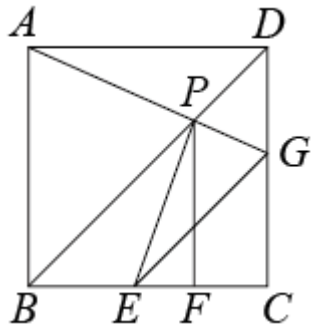
∴∠EOC＝∠EOP＋∠POC＝90°，

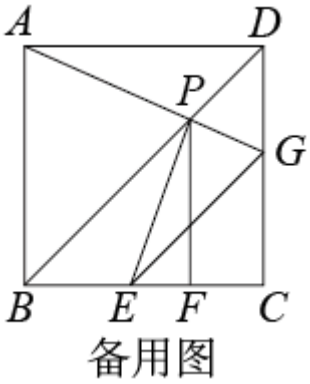
∵$EC^2=EO^2+CO^2=4$，

∴EC＝2．

【点睛】本题考查了正方形的性质、全等三角形的判定、外角和定理、勾股定理，综合性较强，要注意数形结合．

8．已知正方形 $ABCD$，点 P 在对角线 BD 上，AP 交 DC 于 G，$PE\perp PA$ 交 BC 于 E，$PF\perp BC$，垂足为 F 点，求证：





备用图

(1) $EF=FC$；

(2) $BC+BE=\sqrt{2}BP$；

(3) $PE^2-PG^2=EG\cdot GC$．

【答案】(1)见解析

(2)见解析

(3)见解析

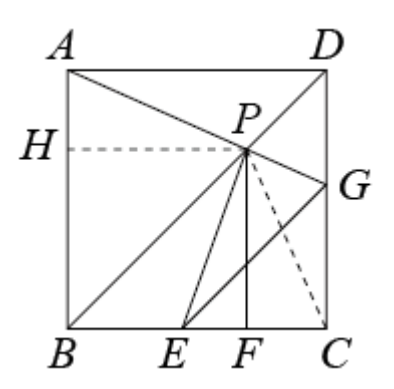
【分析】(1)利用全等三角形的性质，分别证明 $PA=PE$，$PA=PC$，推出 $PE=PC$，再利用等腰三角形的三线合一的性质证明即可；

(2)证明四边形 $PHBF$ 是正方形，推出 $BH=BF$，$PB=\sqrt{2}BH$，再证明$\triangle PHA\cong\triangle PFE$，推出 $AH=EF$，可得结论；

(3)如图 2 中，设 PF 交 EG 于点 J，过点 P 作 $PL\perp EG$ 于点 L，$GK\perp PF$ 于点 K，连接 CJ，证明$\triangle PKG\cong\triangle GLP$(AAS)，推出 $PL=GK$，$PK=GL$，证明$\triangle PFE\cong\triangle ELP$(AAS)，推出 $PF=EL$，可得结论．

(1)

证明：如图：过点 P 作 $PH\perp AB$ 于点 H，连接 CP，



∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$AB=BC$，$\angle ABD=\angle CBD=45°$，

∵$PF\perp BC$，$PH\perp AB$，

∴$PH=PF$，

∵$AP\perp PE$，

∴$\angle APE=\angle HPF=90°$，

∴$\angle APH=\angle EPF$，

在$\triangle PHA$ 和$\triangle PFE$ 中，

$$\begin{cases}\angle APH=\angle EPF\\ PH=PF\\ \angle PHA=\angle PFE=90°\end{cases}$$

∴$\triangle PHA\cong PFE(ASA)$，

∴$PA=PE$，

在$\triangle ABP$ 和$\triangle CBP$ 中，

$$\begin{cases} BA = BC \\ \angle ABP = \angle CBP \\ BP = BP \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABP \cong \triangle CBP(SAS)$，

$\therefore PA=PC$，

$\therefore PE=PC$，

$\because PF \perp EC$，

$\therefore EF=FC$；

(2)

证明：$\because \angle PHB = \angle HBF = \angle PFB = 90°$，

$\therefore$四边形 $PHBF$ 是矩形，

$\because PH=PF$，

$\therefore$四边形 $PHBF$ 是正方形，

$\therefore BH=BF$，$PB = \sqrt{2}BH$，

$\because \triangle PHA \cong \triangle PFE$，

$\therefore AH=EF$，

$\because BH=BF$，

$\therefore BE + BC = BE + AB = BF - EF + BH + AH = 2BH = \sqrt{2}PB$；

(3)

证明：如图 2 中，设 PF 交 EG 于点 J，过点 P 作 $PL \perp EG$ 于点 L，$GK \perp PF$ 于点 K，连接 CJ，

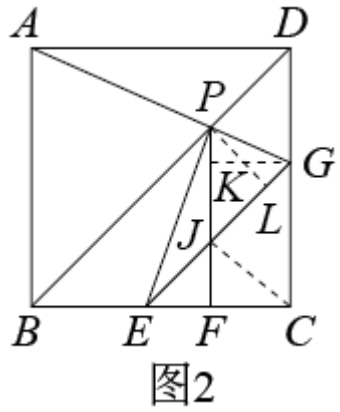


图2

$\because PF \perp BC$，$EF=FC$，

$\therefore JE=JC$，

$\therefore \angle JEC=\angle JCE$，

$\because \angle JEC+\angle CGJ=90°$，$\angle JCE+\angle JCG=90°$，

$\therefore \angle JCG=\angle CGJ$，

$\therefore JC=JG$，

$\therefore JE=JG$，

$\because \angle EPG=90°$，

$\therefore PJ=JE=JG$，

$\therefore \angle JEP=\angle JPE$，$\angle JPG=\angle JGP$，

$\because PL\perp GJ$，$GK\perp JP$，

$\therefore \angle PLG=\angle PKG=90°$，

在$\triangle PKG$和$\triangle GLP$中，

$$\begin{cases}\angle PKG=\angle GLP\\ \angle KPG=\angle LGP\\ PG=GP\end{cases}$$

$\therefore \triangle PKG\cong\triangle GLP(AAS)$，

$\therefore PL=GK$，$PK=GL$，

$\because \angle GCF=\angle CFK=\angle GKF=90°$，

$\therefore$四边形$FCGK$是矩形，

$\therefore GK=CF=EF$，$CG=FK$，

$\therefore PL=EF$，

在$\triangle PFE$和$\triangle ELP$中，

$$\begin{cases}\angle PEL=\angle EPF\\ \angle PLE=\angle PFE\\ PL=EF\end{cases}.$$

$\therefore \triangle PFE\cong\triangle ELP(AAS)$，

$\therefore PF=EL$，

$\therefore PE^2-PG^2$

$=\left(PF^2+EF^2\right)-\left(PK^2+KG^2\right)$

$=PF^2-PK^2$

$=\left(PF+PK\right)\left(PF-PK\right)$

$=\left(EL+GL\right)\cdot CG$

$=EG\cdot CG$

【点睛】本题属于四边形综合题，考查了正方形的性质，矩形的判定和性质，直角三角形斜边中线的性质，全等三角形的判定和性质，等腰三角形的性质等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题.

9．如图1，点 E 为正方形 $ABCD$ 内一点，$\angle AEB=90°$，将 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 绕点 B 按顺时针方向旋转 $90°$，得到 $\triangle CBG$．延长 AE 交 CG 于点 F，连接 DE．

（1）四边形 $BEFG$ 的形状是_____.

（2）如图2，若 $DA=DE$，猜想线段 CF 与 FG 的数量关系并加以证明；

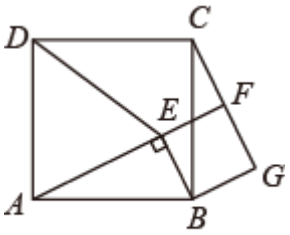


图2

（3）如图1，若 $AB=15$，$CF=3$，则 DE 的长度为_____.（请直接写出答案）

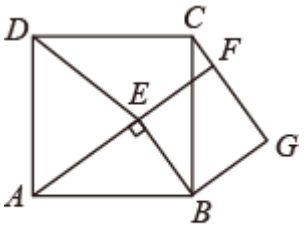


图1

【答案】（1）四边形 $BEFG$ 是正方形；（2）$CF=GF$，理由见解析；（3）$3\sqrt{17}$

【分析】①由旋转的特征可得到$\angle G=\angle AEB=90°$、$\angle EBG=90°$、$BG=BE$，再由$\angle BEF=180°-\angle AEB=90°$，可判定四边形 $BGFE$ 是正方形；

（2）过点 D 作 $DH\perp AE$ 于点 H，由 $DA=DE$ 得 $AH=\frac{1}{2}AE$，再证明$\triangle ADH\cong\triangle BAE$，且由四边形 $BGFE$ 是正方形，得到 $GF=BE=\frac{1}{2}AE=\frac{1}{2}CG$，可证得结论；

（3）过点 D 作 $DH\perp AE$ 于点 H，由旋转及四边形 $BGFE$ 是正方形可得如下关系：$AE=CG=FG+CF=FG+3=BE+3$，在 $Rt\triangle BAE$ 中根据勾股定理求出 BE、AE 的长，由（2）可知，$\triangle ADH\cong\triangle BAE$，得到 $DH=AE$，$AH=BE$，再由勾股定理求出 DE 的长.

【详解】解：（1）四边形 $BEFG$ 是正方形.

由旋转的性质可知$\angle G=\angle AEB=90°$，$BG=BE$，$\angle CBG=\angle ABE$

∵四边形 $ABCD$ 是正方形

∴$\angle ABC=90°$

∴∠*ABE*+∠*CBE*=90°

∴∠*CBG*+∠*CBE*=90°

∴∠*EBG*＝90°

又∵∠*BEF*＝180°﹣∠*AEB*＝90°

∴四边形 *BGFE* 是矩形

∵*BG*=*BE*

∴四边形 *BGFE* 是正方形；

（2）如图2，过点 D 作 $DH \perp AE$ 于点 H，

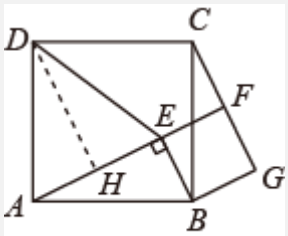


图2

∵ $DA = DE$， $DH \perp AE$，

∴ $AH = \frac{1}{2}AE$，

∴ $\angle ADH + \angle DAH = 90°$，

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $AD = AB$， $\angle DAB = 90°$，

∴ $\angle DAH + \angle EAB = 90°$，

∴ $\angle ADH = \angle EAB$，

又∵ $AD = AB$， $\angle AHD = \angle AEB = 90°$，

∴ $\triangle ADH \cong \triangle BAE(AAS)$，

∴ $AH = BE = \frac{1}{2}AE$，

∵ 将 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 绕点 B 按顺时针方向旋转 $90°$，

∴ $AE = CG$，

∵ 四边形 $BEFG$ 是正方形，

∴ $GF = BE = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}CG$，

∴ $GF = CF$

（3）过点 *D* 作 *DH*⊥*AE* 于点 *H*

∵$BE=FG$，$CF=3$，

∴$AE=CG=FG+CF=FG+3=BE+3$，

∵$AE^2+BE^2=AB^2$，且 $AB=15$，

∴$(BE+3)^2+BE^2=15^2$，

解得，$BE=9$ 或 $BE=-12$（不符合题意，舍去），

∴$AE=9+3=12$，

由（2）得，$\triangle ADH\cong\triangle BAE$，

∴$DH=AE=12$，$AH=BE=9$，

∴$HE=AE-AH=12-9=3$，

∵$\angle DHE=90°$，

∴$DE=\sqrt{DH^2+HE^2}=\sqrt{12^2+3^2}=3\sqrt{17}$．

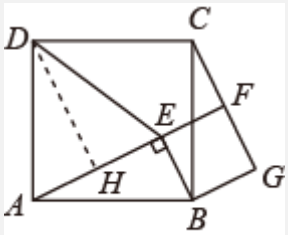
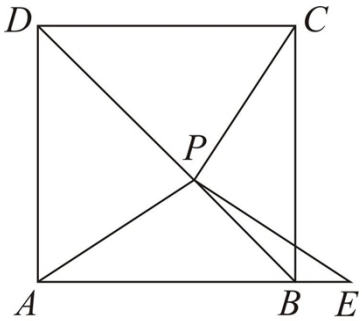
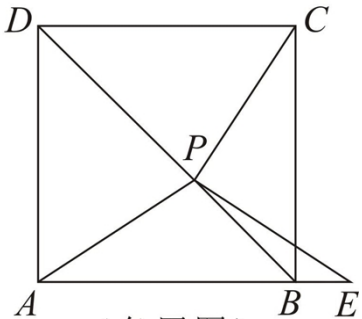


图2

【点睛】此题考查了正方形的性质与判定、旋转的性质、等腰三角形的性质、全等三角形的判定与性质、勾股定理等知识点，解题的关键是正确地作出解题所需要的辅助线，构造全等三角形．

10．如图，在正方形 $ABCD$ 中，P 是对角线 BD 上一点，点 E 在 AB 的延长线上，且 $PC=PE$．





（备用图）

(1)求证：$PA=PE$；

(2)求证：$AE=\sqrt{2}\,DP$；

(3)若已知正方形的边长为 2，求 $CP+\frac{1}{2}BP$ 的最小值．

【答案】(1)见解析

(2)见解析

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/917061021132006134