第 10 节　函数的综合问题与实际应用

班级__________　姓名_____________　学号___________　得分__________

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选择中，只有一个是符合题目要求的.）

1. 在一次数学测验中，采集到如下一组数据

x	-2	-1	0		2	
y	0.24	0.51	1	2.02	3.98	8.02

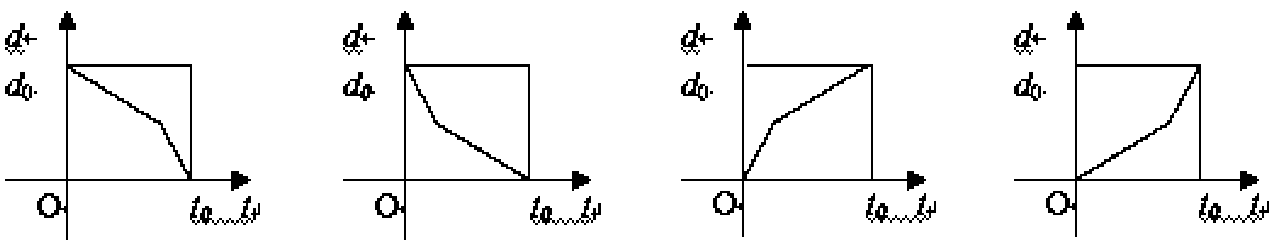
则下列函数与x、y的函数关系最接近的是（其中a、b是待定系数）（　　）

A. $y=ax+b$　　　B. $y=a+b^x$　　　C. $y=ax^2+b$　　　D. $y=a+\dfrac{b}{x}$

【答案】B

【解析】由数据知x、y之间的函数关系近似为指数型，选 B.

2. 某学生离家去学校，由于怕迟到，所以一开始就跑步，等跑累了再走余下的路程. 在下图中纵轴表示离学校的距离，横轴表示出发后的时间，则下图中的四个图形中较符合该学生走法的（　　）



A.　　B.　　C.　　D.

【答案】B

【解析】

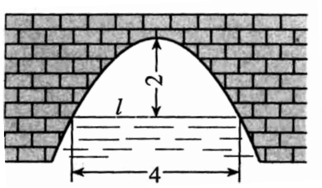
由题意可知由于怕迟到，所以一开始就跑步，

所以刚开始离学校的距离随时间的推移应该相对较快．而等跑累了再走余下的路程，

则说明离学校的距离随时间的推移在后半段时间应该相对较慢.

所以适合的图象为：B

3. 下图是抛物线形拱桥，当水面在时，拱顶离水面 2 米，水面宽 4 米，若水面下降 0.42 米后，则水面宽为（　　）



（A）2.2 米　　　　（B）4.4 米　　　　（C）2.4 米

（D）4 米

【答案】B

【解析】

以抛物线的顶点为原点，抛物线的对称轴为 y 轴建立直角坐标系，由抛物线方程为 $y=-\frac{1}{2}x^2$，当水面下降 0.42 米时，$y=-2.42$，$\therefore x=2.2$，此时水面宽 4.4 米，故选 B.

4. 某家具的标价为 132 元，若降价以九折出售（即优惠 10%），仍可获利 10%（相对进货价），则该家具的进货价是（　　）

A. 108 元　　B. 105 元　　C. 106 元　　D. 118 元

【答案】A.

【解析】

设该家具的进货价为元，由题意，得 $1.1x=0.9\times132$，解得 $x=108$，即该家具的进货价是 108 元.

5. 【2017 湖北八校联考】已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-2, & x\leqslant 1,\\ \log^2□x-1□, & x>1,\end{cases}$ 则不等式 $f(x)<2$ 的解集为（　　）

A. $(-\infty, 1]$　　B. $(-\infty,5)$　C. $(1,5)$　D. $[1,5)$

【答案】B

【解析】当 $x\le1$ 时，$f(x)<2$ 等价于 $2^x-2<2$，即 $2^x<4=2^2$，所以 $x<2$，故 $x\le1$；当 $x>1$ 时，

$f(x)<2$ 等价于 $log_2(x-1)<2$，即 $x-1<2^2=4$，所以 $x<5$，故 $1<x<5$. 综上可得，不等式 $f(x)<2$ 的解集为 $(-\infty,5)$，故选 B.

6.

生产一定数量的商品的全部费用称为生产成本,某企业一个月生产某种商品x万件时的生产成本为$C(x)=x^2+2x+20$(万元).一万件售价是20万元,为获取更大利润,该企业一个月应生产该商品数量为(　　)

A.36万件　B.18万件　　　　C.22万件　　　　D.9万件

【答案】B

【解析】利润$L(x)=20x-C(x)=-(x-18)^2+142$，当$x=18$时，$L(x)$有最大值.

7.将进货单价为80元的商品400个，按90元一个售出时能全部卖出．已知这种商品每个涨价1元，其销售数就减少20个．为了获得最大利润，售价应定为每个（　　）元.

A．5　　　　B．90　　　　C．95

D．96

【答案】C

【解析】设售价为$90+x$元.

所以利润为$(10+x)(400-20x)=-20(x+10)(x-20)=-20(x-5)^2+4500$，

所以当$x=5$时，即售价为95元时，利润最大．选C.

8.某市的一家报刊摊点，从报社买进《晚报》的价格是每份0.20元，卖出价是每份0.30元，卖不掉的报纸可以以每份0.05元价格退回报社．在一个月(以30天计)里，有20天每天可卖出400份，其余10天每天只能卖出250份，但每天从报社买进的份数必须相同，这个摊主每天从报社买进多少份，才能使每月所获得的利润最大？并计算他一个月最多可赚得（　　）元.

A．400　　　　B．500　　　　C．600

D．825

【答案】D

【解析】设摊主每天从报社买进x份，易知$x\in[250,400]$时，每月所获利润才能最大．于是每月所获利润y为：

$y=20\times0.30x+10\times0.30\times250+10\times0.05\times(x-250)-30\times0.20x$

$=0.5x+625$（$x\in[250,400]$）.

因为函数y在$[250,400]$上为增函数，故当$x=400$时，y有最大值825元，

即摊主每天从报社买进400份，才能使每月所获得的利润最大，一月最多可

赚得 825 元.

9.某债券市场发行三种债券， A 种面值为 100 元，一年到期本息和为 103 元；B 种面值为 50 元，半年到期本息和为 51.4 元；C 种面值为 100 元，但买入价为 97 元，一年到期本息和为 100 元. 作为购买者，分析这三种债券的收益，从小到大排列为( )

A． B，A，C B． A，C ，B C． A，B，C D． C，A，B，

【答案】B

【解析】∵ $\frac{103}{100}-1=0.03$，$(\frac{51.4}{50}-1)\times 2=0.056$，$\frac{100}{97}-1\approx 0.031$，∴ $A<C<B$，选 B.

10.【湖北三校联考】某城市对一种售价为每件 160 元的商品征收附加税，税率为 R%(即每销售 100 元征税 R 元)，若年销售量为 $(30-\frac{5}{2}R)$ 万件，要使附加税不少于 128 万元，则 R 的取值范围是( )

A． $[4,8]$ B．] $[6,10]$ C． [4 %，8%] D． [6 %，100%]

【答案】A

【解析】根据题意得，要使附加税不少于 128 万元，需 $(30-\frac{5}{2}R)\times 160\times R\%$ ≥ 128，

整理得 $R^2-12R+32\leq 0$，解得 $4\leq R\leq 8$，即 $R\in[4,8]$.

11.已知 A，B 两地相距 150 千米，某人开汽车以 60 千米/小时的速度从 A 地到达 B 地，在 B 地停留 1 小时后再以 50 千米/小时的速度返回 A 地，汽车离开 A 地的距离 x(千米)与时间 t(小时)之间的函数表达式是( )

A． $x=60t$

B． $x=\begin{cases}60t,0\leq t\leq 2.5\\150-5t,t>3.5\end{cases}$

C． $x=60t+50$

D． $x=\begin{cases}60t,(0\leq t\leq 2.5)\\150,(2.5<t\leq 3.5)\\150-50(t03.5),(3.5<t\leq 6.5)\end{cases}$

【答案】D

【解析】依题意，到达 B 地需要 $\frac{150}{60}$=2.5 小时；

所以当 $0\le t\le 2.5$ 时，$x=60t$；

当 $2.5<t\le 3.5$ 时，$x=150$；

当 $3.5<t\le 3.5$ 时，$x=150-50(t-3.5)$.

所以汽 x 与时间 t 之间的函数表达式是 $x=\begin{cases}60t,(0\le t\le 2.5)\\150,(2.5<t\le 3.5)\\150-50(t03.5),(3.5<t\le 6.5)\end{cases}$.

12.【2017 重庆二诊】已知函数 $f(x)=(x^2-3)e^x$，设关于的方程 $f^2(x)-mf(x)-\frac{12}{e^2}=0(m\in R)$ 有个不同的实数解，则的所有可能的值为（　　）

A. 3　B. 1 或 3　C. 4 或 6　D. 3 或 4 或 6

【答案】B

【解析】由已知，$f'(x)=(x^2+2x-3)e^x$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=-3$ 或 $x=1$，则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-3)$ 和 $[1,+\infty)$ 上单调递增，在 $[-3,1)$ 上单调递减，极大值 $f(-3)=\frac{6}{e^3}$，最小值 $f(1)=-2e$.

综上可考查方程 $f(x)=k$ 的根的情况如下（附函数 $f(x)=(x^2-3)e^x$ 图）:

（1）当 $k>\frac{6}{e^3}$ 或 $k=-2e$ 时，有唯一实根；

（2）当 $0<k<\frac{6}{e^3}$ 时，有三个实根；

（3）当 $-2e<k\le 0$ 或 $k=\frac{6}{e^3}$ 时，有两个实根；

（4）当 $k<-2e$ 时，无实根.

令 $g(k)=k^2-mk-\frac{12}{e^2}$，则由 $g(k)=0$，得 $k=\frac{m\pm\sqrt{m^2+\frac{12}{e^2}}}{2}$，

当 $m\ge 0$ 时，由 $k_1=\frac{m+\sqrt{m^2+\frac{12}{e^2}}}{2}\ge\frac{\sqrt{3}}{e}>\frac{6}{e^3}$，

符号情况（1），此时原方程有 1 个根，

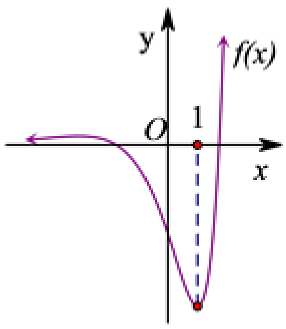
由 $k_2=\dfrac{m-\sqrt{m^2+\frac{12}{e^2}}}{2}$，而 $-2e<-\dfrac{\sqrt{3}}{e}<k_2<0$，符号情况（3），此时原方程有 2 个根，综上得共有 3 个根；当 $m<0$ 时，由 $0<k_1<\dfrac{\sqrt{3}}{e}$，又 $\dfrac{\sqrt{3}}{e}>\dfrac{6}{e^3}$，

符号情况（1）或（2），此时原方程有 1 个或三个根，

由 $k_2<-\dfrac{\sqrt{3}}{e}$，又 $-2e<-\dfrac{\sqrt{3}}{e}<0$，符号情况（3），此时原方程有两个根，

综上得共 1 个或 3 个根.

综上所述，n 的值为 1 或 3. 故选 B.



二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在题中的横线上.）

13.【2017 四川成都调研】某食品的保鲜时间 y(单位：小时)与储藏温度 x(单位：℃)满足函数关系 $y=e^{kx+b}$($e=2.718\cdots$为自然对数的底数，k，b 为常数). 若该食品在 0 ℃的保鲜时间是 192 小时，在 22 ℃的保鲜时间是 48 小时，则该食品在 33 ℃的保鲜时间是________小时.

【答案】24

【解析】由已知条件，得 $192=e^b$

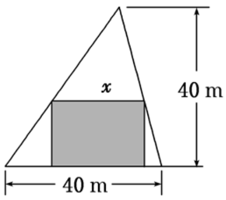
又 $48=e^{22k+b}=e^b\cdot(e^{11k})^2$

$\therefore e^{11k}=\left(\dfrac{48}{192}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$,

设该食品在 33 ℃的保鲜时间是 t 小时，则 $t=e^{33k+b}=192\ e^{33k}=192(e^{11k})^3$

$=192\times\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=24.$

14. 在如图所示的锐角三角形空地中，欲建一个面积最大的内接矩形花园(阴影部分)，则其边长 x 为________m.



【答案】20

【解析】设矩形花园的宽为 y m，则$\frac{x}{40}=\frac{40-y}{40}$，即 $y=40-x$，矩形花园的面积 $S=x(40-x)=-x^2+40x=-(x-20)^2+400$，当 $x=20$ m时，面积最大.

15.【2017浙江温州中学11月模拟】设函数 $f(x)=\begin{cases}|\log_3(x+1)|.-1<x\le 0\\ \tan(\frac{\pi}{2}x),0<x<1\end{cases}$，则 $f[f(\frac{\sqrt{3}}{3}-1)]=$_____，若 $f(a)<f(\frac{1}{2})$，则实数的取值范围是______ .

【答案】，$(-\frac{2}{3},\frac{1}{2})$.

【解析】由题意得，$f(\frac{\sqrt{3}}{3}-1)=|\log_3(\frac{\sqrt{3}}{3}-1+1)|=\frac{1}{2}$，$\therefore f[f(\frac{\sqrt{3}}{3}-1)]=f(\frac{1}{2})=1$，

若$-1<a\le 0$，则$0<a+1\le 1$，$\therefore f(a)=|\log_3(a+1)|=\log_3\frac{1}{a+1}$，

$\therefore f(a)<f(\frac{1}{2})\Rightarrow\log_3\frac{1}{a+1}<1\Rightarrow\frac{1}{a+1}<3\Rightarrow-\frac{2}{3}<x\le 0$，

若$0<a<1$，$\therefore f(a)<f(\frac{1}{2})\Rightarrow\tan(\frac{\pi}{2}a)<1\Rightarrow 0<a<\frac{1}{2}$，

综上所述，实数a的取值范围是$(-\frac{2}{3},\frac{1}{2})$，故填：1，$(-\frac{2}{3},\frac{1}{2})$.

16. “弯弓射雕”描述了游牧民族的豪迈气概，当弓箭以每秒米的速度从地面垂直向上射箭时，秒后的高度米，可由 $x=at-5t^2$ 确定，已知射箭2秒后箭离地面高100米，则弓箭能达到的最大高度为_______.

【答案】180

【解析】由 $x=at-5t^2$ 且 $t=2$ 时，$x=100$，解得 $a=60$，所以 $x=60t-5t^2$，

而 $x=60t-5t^2=-5t^2+60t=-5(t-6)^2+180$，则当 $t=6$ 时，的最大值为 180 米，即弓箭能达到的最大高度为 180 米.

三、解答题 （本大题共 4 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. ）

17. 【2017 浙江温州中学 11 月模拟】设二次函数 $f(x)=ax^2+2bx+c(c>b>a)$，其图像过点 $(1,0)$，且与直线 $y=-a$ 有交点.

（1）求证：$0\le\frac{b}{a}<1$；

（2）若直线 $y=-a$ 与函数 $y=|f(x)|$ 的图像从左到右依次交于 A，B，C，D 四点，若线段 AB， BC，CD 能构成钝角三角形，求 $\frac{b}{a}$ 的取值范围.

【答案】（1）详见解析；（2）$-1+\sqrt[4]{2}<\frac{b}{a}<-1+\frac{\sqrt{15}}{3}$.

【解析】

试题分析：(1) 根据条件列出,，所满足的不等式，即可求解；(2) 根据钝角三角形列出边长所满足的不等式，再结合韦达定理将其转化为，所满足的不等式即可求解.

试题解析：(1) $\because a+2b+c=0$，$c>b>a$，$\therefore a<0$，$c>0$，又 $\because$ $-a-2b>b>a$，$\therefore -\frac{1}{3}<\frac{b}{a}<1$，又 $\because$ 函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=-a$ 有交点，$\therefore$ 方程 $ax^2+2bx+c+a=0$ 有实根，

即 $\Delta=4b^2-4a(c+a)=4b^2+8ab\ge0$，$\therefore 4(\frac{b}{a})^2+8\cdot\frac{b}{a}\ge0$，即 $\frac{b}{a}\le-2$ 或 $\frac{b}{a}\ge0$，

综上可得 $0\le\frac{b}{a}<1$；(2) $\because$ 点 A 与点 D，点 B 与点 C 关于对称轴对称，设 $|AB|=|CD|=m$，$|BC|=n$，$\because$ 线段 AB，BC，CD 能构成钝角三角形，$\therefore$

$\begin{cases}m+m>n\\m^2+m^2<n^2\end{cases}\Rightarrow n<2m<\sqrt{2}n$，故 $2n<2m+n<(\sqrt{2}+1)n$，

$\therefore 2|BC|<|AD|<(\sqrt{2}+1)|BC|$，设 x_1， x_2 是方程 $ax^2+2bx+c+a=0$ 的两根，

则 $|BC|=\sqrt{4(\frac{b}{a})^2+8\cdot\frac{b}{a}}$，设 x_3， x_4 是方程 $ax^2+2bx+c-a=0$ 的两根，

$\therefore |AD|=\sqrt{4(\frac{b}{a})^2+8\cdot\frac{b}{a}+8}$， $\therefore$

$$2\sqrt{4(\frac{b}{a})^2+8\cdot\frac{b}{a}}<\sqrt{4(\frac{b}{a})^2+8\cdot\frac{b}{a}+8}<(\sqrt{2}+1)\sqrt{4(\frac{b}{a})^2+8\cdot\frac{b}{a}},$$

解之得， $-1+\sqrt[4]{2}<\frac{b}{a}<-1+\frac{\sqrt{15}}{3}$.

18.【2017山东省实验中学月考】候鸟每年都要随季节的变化而进行大规模的迁徙，研究某种鸟类的专家发现，该种鸟类的飞行速度 v(单位：m/s)与其耗氧量 Q 之间的关系为 $v=a+b\log_3\frac{Q}{10}$(其中 a、b 是实数)．据统计，该种鸟类在静止时其耗氧量为 30 个单位，而其耗氧量为 90 个单位时，其飞行速度为 1 m/s.

(1)求出 a、b 的值；

(2)若这种鸟类为赶路程，飞行的速度不能低于 2 m/s，则其耗氧量至少要多少个单位？

【答案】(1) $\begin{cases}a=-1,\\b=1.\end{cases}$；(2) 其耗氧量至少要 270 个单位.

【解析】(1)由题意可知，当这种鸟类静止时，它的速度为 0 m/s，此时耗氧量为 30 个单位，故有 $a+b\log_3\frac{30}{10}=0$，

即 $a+b=0$；当耗氧量为 90 个单位时，速度为 1 m/s，故有 $a+b\log_3\frac{90}{10}=1$，整理得 $a+2b=1$.

解方程组 $\begin{cases}a+b=0,\\a+2b=1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=-1,\\b=1.\end{cases}$

(2)由(1)知，$v=-1+\log_3\frac{Q}{10}$. 所以要使飞行速度不低于 2 m/s，则有 $v\geqslant 2$，即 $-1+\log_3\frac{Q}{10}\geqslant 2$，即 $\log_3\frac{Q}{10}\geqslant 3$，解得 $Q\geqslant 270$. 所以若这种鸟类为赶路程，飞行的速度不能低于 2 m/s，则其耗氧量至少要 270 个单位.

19.【2017浙江台州中学10月月考】已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c(b>a)$，且

$f(x)\ge 0$对任意实数都成立，若$\dfrac{f(-2)}{f(2)-f(0)}$取到最小值时，有

（1）当$a=1$，求$f(x)$；

（2）设$g(x)=\left|f(x)-a\right|$，对任意的x_1，$x_2\in[-3a,-a]$都有$|g(x_1)-g(x_2)|\le 2a$，求实数的取值范围．

【答案】（1）$f(x)=(x+2)^2$；（2）$(0,\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}]$．

【解析】

试题分析:（1）将T的表达式等价变形，构造相应的函数即可求出当取到最小值时等号成立的条件，从而求解;（2）分析题意可知，问题等价于当$x\in[-3a,-a]$时，有$g(x)_{\max}-g(x)_{\min}\le 2a$，对的取值分类讨论，从而求解．

试题解析（1）由$f(x)\ge 0$恒成立，得$\begin{cases}\Delta\le 0\\ a>0\end{cases}$，即$\begin{cases}c\ge \dfrac{b^2}{4a}\\ a>0\end{cases}$，

记$T=\dfrac{f(-2)}{f(2)-f(0)}=\dfrac{4a-2b+c}{4a+2b}\ge\dfrac{4a-2b+\dfrac{b^2}{4a}}{4a+2b}$，设$t=\dfrac{b}{a}>1$，则$T=\dfrac{(t-4)^2}{8(t+2)}$，

再设$u=t+2>3$，则$T=\dfrac{(u-6)^2}{8u}=\dfrac{1}{8}(u-12+\dfrac{36}{u})\ge 0$，

当$b=c=4a$时，$\dfrac{f(-2)}{f(2)-f(0)}$取最小值，此时$f(x)=a(x+2)^2$，∴当$a=1$时，$f(x)=(x+2)^2$；

（2）对任意x_1，$x_2\in[-3a,-a]$，都有$|g(x_1)-g(x_2)|\le 2a$，即当$x\in[-3a,-a]$时，有$g(x)_{\max}-g(x)_{\min}\le 2a$，$g(x)=a(x^2+4x+3)$，$g(-3a)=9a^3-12a^2+3a$，$g(-a)=a^3-4a^2+3a$，

①当$-a\le -3$时，即$a\ge 3$时，$g(x)=a(x^2+4x+3)$在$x\in[-3a,-a]$上递减，