

2022-2023 学年高三上数学期末模拟试卷

注意事项

1. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。
4. 作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。作答非选择题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 上的点 M 到其焦点 F 的距离比点 M 到 y 轴的距离大 $\frac{1}{2}$ ，则抛物线的标准方程为（ ）

- A. $y^2 = x$ B. $y^2 = 2x$ C. $y^2 = 4x$ D. $y^2 = 8x$

2. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB = 1$ ， $AD = \sqrt{2}$ ， $AA_1 = \sqrt{3}$ ，则直线 DD_1 与平面 ABC_1 所成角的余弦值为（ ）

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

3. 已知双曲线 $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{3} = 1 (a > 0)$ 的一个焦点与抛物线 $x^2 = 8y$ 的焦点重合，则双曲线 C 的离心率为（ ）

- A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. 3 D. 4

4. 已知 $f(x)$ 为定义在 R 上的偶函数，当 $x \in (-1, 0)$ 时， $f(x) = 3x + \frac{4}{3}$ ，则 $f\left(\log_3 \frac{3}{2}\right) =$ （ ）

- A. -2 B. 3 C. -3 D. 2

5. 设函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} - t\left(\ln x + x + \frac{2}{x}\right)$ 恰有两个极值点，则实数 t 的取值范围是（ ）

- A. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ B. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
C. $\left(\frac{1}{2}, \frac{e}{3}\right) \cup \left(\frac{e}{3}, +\infty\right)$ D. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \left(\frac{e}{3}, +\infty\right)$

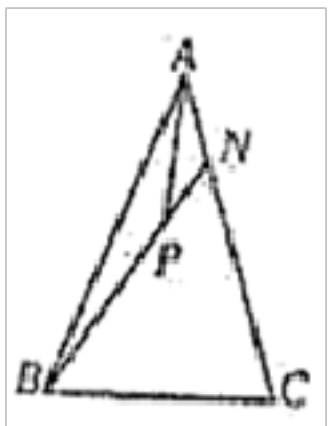
6. 已知三棱锥 $D - ABC$ 的体积为 2， $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，且三棱锥 $D - ABC$ 的外接球的球心 O 恰好是 CD 中点，则球 O 的表面积为（ ）

- A. $\frac{52\pi}{3}$ B. $\frac{40\pi}{3}$ C. $\frac{25\pi}{3}$ D. 24π

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列， S_n 为其前 n 项和， $4 + a_5 = a_6 + a_{10}$ ，则 $S_{21} =$ （ ）

- A. 7 B. 14 C. 28 D. 84

8. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\overline{AN} = \frac{2}{3}\overline{NC}$, P 是 BN 上一点, 若 $\overline{AP} = t\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AC}$, 则实数 t 的值为 ()



- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{3}{4}$
9. 已知直线 $\sqrt{3}x - y + m = 0$ 过双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点 F , 且与双曲线 C 在第二象限交于点 A , 若 $|FA| = |FO|$ (O 为坐标原点), 则双曲线 C 的离心率为
- A. 2 B. $\sqrt{3} + 1$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{5} - 1$
10. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $c - a \cos B = (2a - b) \cos A$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为 ()
- A. 直角三角形 B. 等腰非等边三角形
C. 等腰或直角三角形 D. 钝角三角形
11. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, $a_5 + a_8 = -3$, $a_4 a_9 = -18$, 则 $a_2 + a_{11} =$ ()
- A. 9 B. -9 C. $\frac{21}{2}$ D. $-\frac{21}{4}$
12. 过圆 $x^2 + y^2 = 4$ 外一点 $M(4, -1)$ 引圆的两条切线, 则经过两切点的直线方程是 ().
- A. $4x - y - 4 = 0$ B. $4x + y - 4 = 0$ C. $4x + y + 4 = 0$ D. $4x - y + 4 = 0$

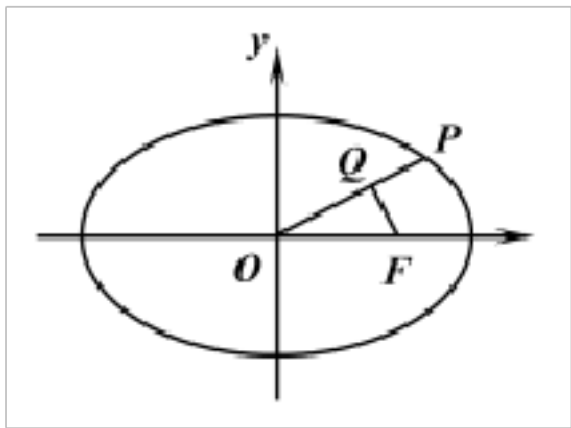
二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 设实数 $a > 0$, 若函数 $f(x) = \begin{cases} a \ln x - x^2 & (x > 0) \\ x + \frac{1}{x} + a + 2 & (x < 0) \end{cases}$ 的最大值为 $f(-1)$, 则实数 a 的最大值为_____.

14. 已知双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的一条渐近线为 $y = 2x$, 则焦点到这条渐近线的距离为_____.

15. 如图, 椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 e , F 是 Γ 的右焦点, 点 P 是 Γ 上第一象限内任意一点,

$\overrightarrow{OQ} = \lambda \overrightarrow{OP} (\lambda > 0)$, $\overrightarrow{FQ} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$, 若 $\lambda < e$, 则 e 的取值范围是_____.



16. 已知 $x > 0$, $y > -1$, 且 $x + y = 1$, 则 $\frac{x^2 + 3}{x} + \frac{y^2}{y + 1}$ 最小值为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 在直角坐标系中, 圆 C 的参数方程为: $\begin{cases} x = 1 + 2\cos\alpha \\ y = \sqrt{3} + 2\sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数), 以坐标原点为极点, 以 x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 且长度单位相同.

(1) 求圆 C 的极坐标方程;

(2) 若直线 $l: \begin{cases} x = t\cos\varphi \\ y = t\sin\varphi \end{cases}$ (t 为参数) 被圆 C 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$, 求直线 l 的倾斜角.

18. (12 分) 某中学的甲、乙、丙三名同学参加高校自主招生考试, 每位同学彼此独立的从 A, B, C, D, E 五所高校中任选 2 所.

(1) 求甲、乙、丙三名同学都选 D 高校的概率;

(2) 若已知甲同学特别喜欢 A 高校, 他必选 A 校, 另在 B, C, D, E 四校中再随机选 1 所; 而同学乙和丙对五所高校没有偏爱, 因此他们每人在五所高校中随机选 2 所.

(i) 求甲同学选 D 高校且乙、丙都未选 D 高校的概率;

(ii) 记 X 为甲、乙、丙三名同学中选 D 高校的人数, 求随机变量 X 的分布列及数学期望.

19. (12 分) 已知曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = t\cos\alpha, \\ y = 1 + t\sin\alpha, \end{cases}$ (t 为参数), 曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sin\theta, \\ y = \sqrt{1 + \cos 2\theta}, \end{cases}$ (θ 为参数).

(1) 求 C_1 与 C_2 的普通方程;

(2) 若 C_1 与 C_2 相交于 A, B 两点, 且 $|AB| = \sqrt{2}$, 求 $\sin\alpha$ 的值.

20. (12 分) 某单位准备购买三台设备, 型号分别为 A, B, C 已知这三台设备均使用同一种易耗品, 提供设备的商家规定: 可以在购买设备的同时购买该易耗品, 每件易耗品的价格为 100 元, 也可以在设备使用过程中, 随时单独购买易耗品, 每件易耗品的价格为 200 元. 为了决策在购买设备时应购买的易耗品的件数. 该单位调查了这三种型号的设备各 60 台, 调查每台设备在一个月中使用的易耗品的件数, 并得到统计表如下所示.

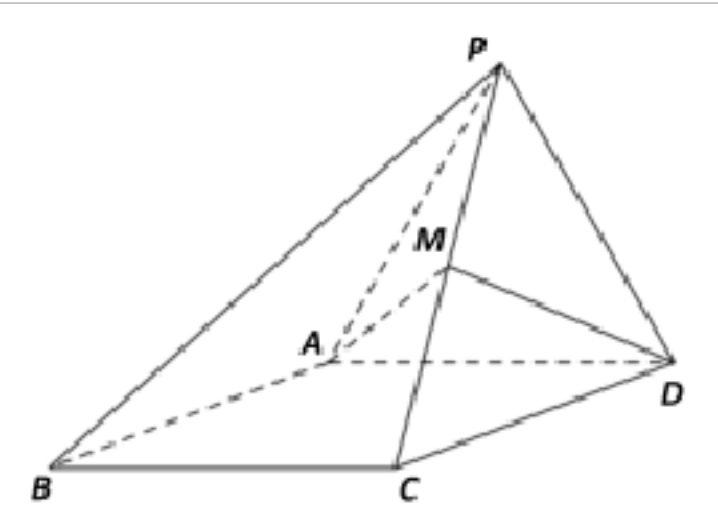
每台设备一个月中使用的易耗品的件数		6	7	8
频数	型号 <i>A</i>	30	30	0
	型号 <i>B</i>	20	30	10
	型号 <i>C</i>	0	45	15

将调查的每种型号的设备的频率视为概率，各台设备在易耗品的使用上相互独立.

- (1) 求该单位一个月中 *A, B, C* 三台设备使用的易耗品总数超过 **21** 件的概率；
- (2) 以该单位一个月购买易耗品所需总费用的期望值为决策依据，该单位在购买设备时应同时购买 **20** 件还是 **21** 件易耗品？

21.（12 分）如图,四棱锥 $P-ABCD$,侧面 PAD 是边长为 **2** 的正三角形,且与底面垂直,底面 $ABCD$ 是 $\angle ABC = 60^\circ$ 的菱形， M 为棱 PC 上的动点,且 $\frac{PM}{PC} = \lambda (\lambda \in [0,1])$.

- (I)求证： ΔPBC 为直角三角形；
- (II)试确定 λ 的值，使得二面角 $P-AD-M$ 的平面角余弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.



22.（10 分）已知函数 $f(x) = e^{ax} \sin x$.

- (1) 若 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增，求实数 a 的取值范围；
- (2) 若 $a=1$ ，对 $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ，恒有 $f(x) \leqslant bx$ 成立，求实数 b 的最小值.

参考答案

一、选择题： 本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、 B

【解析】

由抛物线的定义转化，列出方程求出 p ，即可得到抛物线方程.

【详解】

由抛物线 $y^2=2px$ ($p>0$) 上的点 M 到其焦点 F 的距离比点 M 到 y 轴的距离大 $\frac{1}{2}$ ，根据抛物线的定义可得 $\frac{p}{2}=\frac{1}{2}$ ，

$\therefore p=1$ ，所以抛物线的标准方程为： $y^2=2x$.

故选 B.

【点睛】

本题考查了抛物线的简单性质的应用，抛物线方程的求法，属于基础题.

2、 C

【解析】

在长方体中 $AB // C_1D_1$ ， 得 DD_1 与平面 ABC_1 交于 D_1 ， 过 D 做 $DO \perp AD_1$ 于 O ， 可证 $DO \perp$ 平面 ABC_1D_1 ， 可得 $\angle DD_1A$ 为所求解的角， 解 $Rt\triangle ADD_1$ ， 即可求出结论.

【详解】

在长方体中 $AB // C_1D_1$ ， 平面 ABC_1 即为平面 ABC_1D_1 ，

过 D 做 $DO \perp AD_1$ 于 O ， $\because AB \perp$ 平面 AA_1D_1D ，

$DO \subset$ 平面 AA_1D_1D , $\therefore AB \perp DO, AB \cap AD_1 = D$ ，

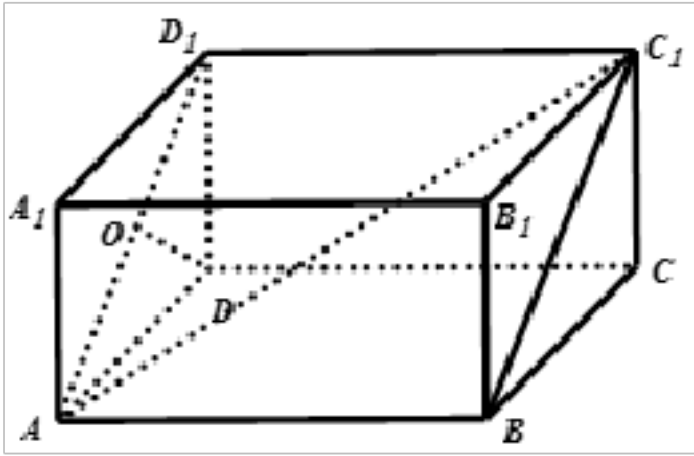
$\therefore DO \perp$ 平面 ABC_1D_1 ， $\therefore \angle DD_1A$ 为 DD_1 与平面 ABC_1 所成角，

在 $Rt\triangle ADD_1$ ， $DD_1 = AA_1 = \sqrt{3}, AD = \sqrt{2}, \therefore AD_1 = \sqrt{5}$ ，

$$\therefore \cos \angle DD_1A = \frac{DD_1}{AD_1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}，$$

$\therefore$ 直线 DD_1 与平面 ABC_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

故选:C.



【点睛】

本题考查直线与平面所成的角，定义法求空间角要体现“做”“证”“算”，三步骤缺一不可，属于基础题.

3、A

【解析】

根据题意，由抛物线的方程可得其焦点坐标，由此可得双曲线的焦点坐标，由双曲线的几何性质可得 $a^2 + 3 = 4$ ，解可得 $a = 1$ ，由离心率公式计算可得答案.

【详解】

根据题意，抛物线 $x^2 = 8y$ 的焦点为 $(0, 2)$ ，

则双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{3} = 1$ 的焦点也为 $(0, 2)$ ，即 $c = 2$ ，

则有 $a^2 + 3 = 4$ ，解可得 $a = 1$ ，

双曲线的离心率 $e = \frac{c}{a} = 2$.

故选：A.

【点睛】

本题主要考查双曲线、抛物线的标准方程，关键是求出抛物线焦点的坐标，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

4、D

【解析】

判断 $-1 < \log_3 \frac{2}{3} < 0$ ，利用函数的奇偶性代入计算得到答案.

【详解】

$\because -1 < \log_3 \frac{2}{3} < 0$ ， $\therefore f\left(\log_3 \frac{3}{2}\right) = f\left(-\log_3 \frac{2}{3}\right) = f\left(\log_3 \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$.

故选：D

【点睛】

本题考查了利用函数的奇偶性求值，意在考查学生对于函数性质的灵活运用.

5、C

【解析】

$f(x)$ 恰有两个极值点，则 $f' x = 0$ 恰有两个不同的解，求出 $f' x$ 可确定 $x = 1$ 是它的一个解，另一个解由方程

$\frac{e^x}{x+2} - t = 0$ 确定，令 $g(x) = \frac{e^x}{x+2} (x > 0)$ 通过导数判断函数值域求出方程有一个不是 1 的解时 t 应满足的条件.

【详解】

由题意知函数 $f(x)$ 的定义域为 $0, +\infty$, $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2} - t \left(\frac{1}{x} + 1 - \frac{2}{x^2} \right)$

$$= \frac{(x-1)[e^x - t(x+2)]}{x^2} = \frac{(x-1)(x+2)\left(\frac{e^x}{x+2} - t\right)}{x^2}.$$

因为 $f(x)$ 恰有两个极值点，所以 $f' x = 0$ 恰有两个不同的解，显然 $x = 1$ 是它的一个解，另一个解由方程

$\frac{e^x}{x+2} - t = 0$ 确定，且这个解不等于 1.

令 $g(x) = \frac{e^x}{x+2} (x > 0)$ ，则 $g'(x) = \frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2} > 0$ ，所以函数 $g(x)$ 在 $0, +\infty$ 上单调递增，从而 $g(x) > g(0) = \frac{1}{2}$ ，

且 $g(1) = \frac{e}{3}$. 所以，当 $t > \frac{1}{2}$ 且 $t \neq \frac{e}{3}$ 时， $f(x) = \frac{e^x}{x} - t \left(\ln x + x + \frac{2}{x} \right)$ 恰有两个极值点，即实数 t 的取值范围是

$\left(\frac{1}{2}, \frac{e}{3} \right) \cup \left(\frac{e}{3}, +\infty \right).$

故选：C

【点睛】

本题考查利用导数研究函数的单调性与极值，函数与方程的应用，属于中档题.

6、A

【解析】

根据 O 是 CD 中点这一条件，将棱锥的高转化为球心到平面的距离，即可用勾股定理求解.

【详解】

解：设 D 点到平面 ABC 的距离为 h ，因为 O 是 CD 中点，

所以 O 到平面 ABC 的距离为 $\frac{h}{2}$ ，

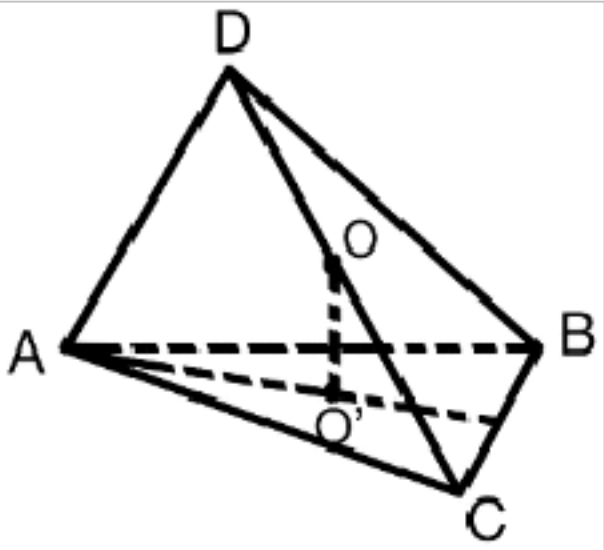
三棱锥 $D-ABC$ 的体积 $V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 60^\circ \cdot h = 2$ ，解得 $h = 2 \cdot \sqrt{3}$ ，

作 $OO' \perp$ 平面 ABC ，垂足 O' 为 $\triangle ABC$ 的外心，所以 $CO' = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，且 $OO' = \frac{h}{2} = \sqrt{3}$ ，

所以在 $Rt_{\triangle CO'O}$ 中， $OC = \sqrt{CO'^2 + O'O^2} = \sqrt{\frac{13}{3}}$ ，此为球的半径，

$$\therefore S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{13}{3} = \frac{52\pi}{3}.$$

故选：A.



【点睛】

本题考查球的表面积，考查点到平面的距离，属于中档题.

7、D

【解析】

利用等差数列的通项公式，可求解得到 $a_{11}=4$ ，利用求和公式和等差中项的性质，即得解

【详解】

$$\because 4+a_5=a_6+a_{10},$$

$$\therefore 4+a_{11}-6d=a_{11}-5d+a_{11}-d$$

$$\text{解得 } a_{11}=4.$$

$$\therefore S_{21}=\frac{21(a_1+a_{21})}{2}=21a_{11}=84.$$

故选：D

【点睛】

本题考查了等差数列的通项公式、求和公式和等差中项，考查了学生综合分析，转化划归，数学运算的能力，属于中档题.

8、C

【解析】

由题意，可根据向量运算法则得到 $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}m\overrightarrow{AC} + (1-m)\overrightarrow{AB}$ ，从而由向量分解的唯一性得出关于 t 的方程，求出 t 的值.

【详解】

由题意及图， $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + m(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB}) = m\overrightarrow{AN} + (1-m)\overrightarrow{AB}$,

又， $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$ ，所以 $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ ， $\therefore \overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}m\overrightarrow{AC} + (1-m)\overrightarrow{AB}$ ，

又 $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ ，所以 $\begin{cases} 1-m=t \\ \frac{2}{5}m=\frac{1}{3} \end{cases}$ ，解得 $m=\frac{5}{6}$ ， $t=\frac{1}{6}$ ，

故选 C.

【点睛】

本题考查平面向量基本定理，根据分解的唯一性得到所求参数的方程是解答本题的关键，本题属于基础题.

9、B

【解析】

直线 $\sqrt{3}x - y + m = 0$ 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ ，易得 $|FA| = |FO| = c$ 。设双曲线 C 的右焦点为 E ，可得 $\triangle AFE$ 中， $\angle FAE = 90^\circ$ ，则

$|AE| = \sqrt{3}c$ ，所以双曲线 C 的离心率为 $e = \frac{2c}{\sqrt{3}c - c} = \sqrt{3} + 1$. 故选 B.

10、C

【解析】

利用正弦定理将边化角，再由 $\sin(A+B) = \sin C$ ，化简可得 $\sin B \cos A = \sin A \cos A$ ，最后分类讨论可得；

【详解】

解：因为 $c - a \cos B = (2a - b) \cos A$

所以 $\sin C - \sin A \cos B = (2 \sin A - \sin B) \cos A$

所以 $\sin C - \sin A \cos B = 2 \sin A \cos A - \sin B \cos A$

所以 $\sin(A+B) - \sin A \cos B = 2 \sin A \cos A - \sin B \cos A$

所以 $\sin A \cos B + \sin B \cos A - \sin A \cos B = 2 \sin A \cos A - \sin B \cos A$

所以 $\sin B \cos A = \sin A \cos A$

当 $\cos A = 0$ 时 $A = \frac{\pi}{2}$ ， $\triangle ABC$ 为直角三角形；

当 $\cos A \neq 0$ 时 $\sin A = \sin B$ 即 $A = B$ ， $\triangle ABC$ 为等腰三角形；

∴ $\triangle ABC$ 的形状是等腰三角形或直角三角形

故选： C .

【点睛】

本题考查三角形形状的判断，考查正弦定理的运用，考查学生分析解决问题的能力，属于基础题.

11、 C

【解析】

根据等比数列的下标和性质可求出 a_5, a_8 , 便可得出等比数列的公比, 再根据等比数列的性质即可求出 $a_2 + a_{11}$.

【详解】

∵ $4 + 9 = 5 + 8, \therefore a_4 a_9 = a_5 a_8 = -18$, 又 $a_5 + a_8 = -3$, 可解得 $\begin{cases} a_5 = -6 \\ a_8 = 3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_5 = 3 \\ a_8 = -6 \end{cases}$

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则

当 $\begin{cases} a_5 = -6 \\ a_8 = 3 \end{cases}$ 时, $q^3 = \frac{a_8}{a_5} = -\frac{1}{2}, \therefore a_2 + a_{11} = \frac{a_5}{q^3} + a_8 q^3 = \frac{-6}{-\frac{1}{2}} + 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{21}{2};$

当 $\begin{cases} a_5 = 3 \\ a_8 = -6 \end{cases}$ 时, $q^3 = \frac{a_8}{a_5} = -2, \therefore a_2 + a_{11} = \frac{a_5}{q^3} + a_8 q^3 = \frac{3}{-2} + (-6) \times (-2) = \frac{21}{2}.$

故选： C .

【点睛】

本题主要考查等比数列的性质应用, 意在考查学生的数学运算能力, 属于基础题.

12、 A

【解析】

过圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 外一点 (m, n) ,

引圆的两条切线, 则经过两切点的直线方程为 $mx + ny - r^2 = 0$, 故选 A .

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13、 $2e^3$

【解析】

根据 $f(-1) = a$, 则当 $x > 0$ 时, $a \ln x - x^2 \leq a$, 即 $a(\ln x - 1) \leq x^2$. 当 $0 < x \leq 1$ 时, $a(\ln x - 1) \leq x^2$ 显然成立; 当 $x > 1$ 时, 由 $a(\ln x - 1) \leq x^2$, 转化为 $\frac{1}{a} \geq \frac{\ln x - 1}{x^2}$, 令 $g(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2} (x > 1)$, 用导数法求其最大值即可.

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/917106121004006055>