

第四章 概率与统计

4.2 随机变量

4.2.5 正态分布

知识梳理

一、正态曲线

1. 定义:一般地, 函数 $\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 对应的图像称为正态曲线(也称“钟形曲线”, $\varphi(x)$ 也常记为

$\varphi_{\mu, \sigma}(x)$). 其中 $\mu = E(X)$, 即 X 的均值; $\sigma = \sqrt{D(X)}$, 即 X 的标准差.

2. 正态曲线的性质

(1) 正态曲线关于 $x = \mu$ 对称(即 μ 决定正态曲线对称轴的位置), 具有中间高、两边低的特点;

(2) 正态曲线与 x 轴所围成的图形面积为 1;

(3) σ 决定正态曲线的“胖瘦”: σ 越大, 说明标准差越大, 数据的集中程度越弱, 所以曲线越“胖”; σ 越小, 说明标准差越小, 数据的集中程度越强, 所以曲线越“瘦”.

二、正态分布:

如果随机变量 X 落在区间 $[a, b]$ 内的概率, 总等于对应的正态曲线 $\varphi_{\mu, \sigma}(x)$ 与 x 轴在区间 $[a, b]$ 内围成的面积, 则称 X 服从参数为 μ 和 σ 的正态分布, 记作 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

μ 是 X 的平均值, σ 是 X 的标准差, σ^2 是 X 的方差.

由正态曲线的性质及前面例题可知, 如果 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 那么

$$P(X \leq \mu) = P(X \geq \mu) = 0.5,$$

$$P(|X - \mu| \leq \sigma) = P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68.3\%,$$

$$P(|X - \mu| \leq 2\sigma) = P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95.4\%,$$

$$P(|X - \mu| \leq 3\sigma) = P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99.7\%.$$

常见考点

考点一 正态密度函数与正态曲线的性质

典例 1. 设随机变量的正态分布密度函数为 $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{(x+3)^2}{4}}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, 则参数 μ , σ 的值分

别是 ()

A. $\mu=3$, $\sigma=2$

B. , $\sigma=2$

C. $\mu=3$, $\sigma=\sqrt{2}$

D. , $\sigma=\sqrt{2}$

【答案】D

【分析】

由正态分布密度函数的概念即得.

【详解】

由正态分布密度函数表达式知, $\sigma=\sqrt{2}$.

故选: D.

变式 1-1. 某市组织了一次高二调研考试, 考试后统计的数学成绩服从正态分布, 其密度函数

$f(x) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-80)^2}{200}}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, 则下列命题不正确的是

A. 该市这次考试的数学平均成绩为 80 分

B. 分数在 120 分以上的人数与分数在 60 分以下的人数相同

C. 分数在 110 分以上的人数与分数在 50 分以下的人数相同

D. 该市这次考试的数学成绩标准差为 10

【答案】B

【分析】

分析: 根据密度函数的特点可得: 平均成绩及标准差, 再结合正态曲线的对称性可得分数在 110 分以上的人数与分数在 50 分以下的人数相同, 从而即可选出答案.

详解: 密度函数 $f(x) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-80)^2}{200}}$,

该市这次考试的数学平均成绩为 80 分

该市这次考试的数学标准差为 10,

从图形上看，它关于直线 $x = 80$ 对称，

且 50 与 110 也关于直线 $x = 80$ 对称，

故分数在 110 分以上的人数与分数在 50 分以下的人数相同.

故选 B.

点睛：本题主要考查了正态分布曲线的特点及曲线所表示的意义，以及利用几何图形的对称性求解.

变式 1-2. 已知三个随机变量的正态密度函数 $f_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$ ($x \in \mathbf{R}, i=1,2,3$) 的图象如图所示，

则 ()

A. $\mu_1 < \mu_2 = \mu_3, \sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$

B. $\mu_1 > \mu_2 = \mu_3, \sigma_1 = \sigma_2 < \sigma_3$

C. $\mu_1 = \mu_2 < \mu_3, \sigma_1 < \sigma_2 = \sigma_3$

D. $\mu_1 < \mu_2 = \mu_3, \sigma_1 = \sigma_2 < \sigma_3$

【答案】D

【分析】

根据正态密度函数中 μ 和 σ 的意义判断.

【详解】

因为正态密度函数 $f_2(x)$ 和 $f_3(x)$ 的图象关于同一条直线对称，

所以 $\mu_2 = \mu_3$.

又 $f_2(x)$ 的图象的对称轴在 $f_1(x)$ 的图象的对称轴的右边，

所以 $\mu_1 < \mu_2 = \mu_3$.

因为 σ 越大，曲线越“矮胖”. σ 越小，曲线越“瘦高”，

由图象，可知正态密度函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的图象一样“瘦高”， $f_3(x)$ 的图象明显“矮胖”，

所以 $\sigma_1 = \sigma_2 < \sigma_3$.

故选：D

变式 1-3. 以下关于正态密度曲线的说法中正确的个数是 ()

①曲线都在轴的上方，左右两侧与轴无限接近，最终可与轴相交；

②曲线关于直线 $x = \mu$ 对称；

③曲线呈现“中间高，两边低”的钟形形状；

④曲线与轴之间的面积为1.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】C

【分析】

由正态密度曲线的特点依次判断各个选项即可得到结果.

【详解】

正态密度曲线的特点如下：

位于轴的上方，左右两侧与轴无限接近，但与轴不相交，①错误；

曲线的对称轴为 $x = \mu$ ，②正确；

曲线是“中间高，两边低”的钟形形状，③正确；

曲线与轴围成的区域面积为1，④正确.

故选：C.

考点二 指定区间的概率

典例 2. 若随机变量 $X \sim N(3, \sigma^2)$ ，且 $P(X \geq 5) = 0.2$ ，则 $P(1 < X < 5) =$ ()

A. 0.6 B. 0.5 C. 0.4 D. 0.3

【答案】A

【分析】

根据正态分布的对称即可计算结果.

【详解】

解：根据正态分布的对称性，

$$P(1 < X < 5) = 1 - 2P(X \geq 5) = 1 - 2 \times 0.2 = 0.6.$$

故选：A.

变式 2-1. 已知 $X \sim N(0, 1)$ ，则 X 在区间 $(-\infty, -2)$ 内取值的概率约为 ()

A. 0.954 B. 0.046 C. 0.977 D. 0.023

【答案】D

【分析】

根据正态分布曲线的性质求解即可.

【详解】

由题意知, 正态曲线的对称轴为 $x=0$, 所以 $P(X < -2) = 0.5 - \frac{1}{2}P(-2 \leq X \leq 2) = 0.5 - \frac{0.9544}{2} = 0.022$

8.

故选: D.

变式 2-2. 已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(4, \sigma^2)$, 若 $P(\xi < 2) = 0.3$, 则 $P(2 < \xi < 6) =$ ()

A. 0.3

B. 0.4

C. 0.7

D. 0.2

【答案】B

【分析】

根据正态分布的对称性求得正确答案.

【详解】

依题意 $\mu = 4$, $4 - 2 = 6 - 4$,

所以 $P(2 < \xi < 6) = (0.5 - 0.3) \times 2 = 0.4$.

故选: B

变式 2-3. 已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(1, \sigma^2)$, 若 $P(\xi \geq 2) = a$, $P(0 < \xi \leq 1) = 1 - 3a$, 则 $P(\xi \leq 0) =$ ()

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{3}{4}$

【答案】A

【分析】

由正态分布的对称性及在对称轴及一侧的概率为 $\frac{1}{2}$ 的特点, 算出 a 值而得解.

【详解】

因为随机变量 ξ 服从正态分布 $N(1, \sigma^2)$, 由正态分布的对称性知,

$P(0 < \xi \leq 1) = P(1 \leq \xi < 2)$, 又 $P(\xi \geq 1) = \frac{1}{2}$, $P(\xi \geq 1) = P(1 \leq \xi < 2) + P(\xi \geq 2)$,

所以 $a + 1 - 3a = \frac{1}{2}$, 解得 $a = \frac{1}{4}$, 从而 $P(\xi \leq 0) = P(\xi \geq 2) = \frac{1}{4}$.

故选: A

考点三 3σ 原则

典例 3. 某单位招聘员工, 先对应聘者的简历进行评分, 评分达标者进入面试环节. 现有 1000 人应聘, 他们的简历评分服从正态分布 $N(60, 10^2)$, 若 80 分及以上为达标, 则估计进入面试环节的人数为 ()

(附: 若随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6827$,

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$, $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$)

A. 12 B. 23 C. 46 D. 159

【答案】B

【分析】

根据正态分布的性质求出 $P(X \geq 80)$ 即可得出.

【详解】

因为 $X: N(60, 10^2)$,

则 $P(X \geq 80) = P(X \geq 60 + 20) \approx \frac{1 - 0.9545}{2} = 0.02275$,

所以估计进入面试环节的人数为.

故选: B.

变式 3-1. 某袋装加碘食盐的质量 (单位: 克) 服从正态分布 $N(500, 4)$, 某超市在进货前要在厂家随机抽检这种食盐 100 袋, 则质量在 $(498, 504]$ 内的袋数约为 ()

附: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.6826$, $P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9544$.

A. 82 B. 80 C. 84 D. 86

【答案】A

【分析】

利用正态分布的性质求出质量在 $(498, 504]$ 内的概率即可计算作答.

【详解】

因 $X \sim N(500, 4)$, 则有 $\mu = 500$, $\sigma = 2$, $498 = \mu - \sigma$, $504 = \mu + 2\sigma$,

于是得质量在 $(498, 504]$ 内的概率为:

$$P(\mu - \sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = \frac{1}{2}P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) + \frac{1}{2}P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = \frac{0.6826 + 0.9544}{2} = 0.8185,$$

则有 $0.8185 \times 100 = 81.85 \approx 82$,

所以质量在 $(498, 504]$ 内的袋数约为82.

故选: A

变式 3-2. 若随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$), 则有如下结论:

$$P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.6826, P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9544, P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) = 0.9974, \text{ 高三 (1)}$$

班有 40 名同学, 一次数学考试的成绩服从正态分布, 平均分为 120, 方差为 100, 理论上说在 130 分以上人数约为 ()

A. 19 B. 12 C. 6 D. 5

【答案】C

【分析】

正态总体的取值关于 $X=120$ 对称, 在 130 分以上的概率近似为 $\frac{1}{2}(1 - 0.6826) = 0.1587$, 得到要求的结果.

【详解】

∵ 数学成绩近似地服从正态分布 $N(120, 10^2)$,

$$\text{又 } P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.6826$$

$$\therefore P(120 - 10 < X \leq 120 + 10) = 0.6826$$

根据正态曲线的对称性知: 理论上说在 130 分以上的概率为 $\frac{1}{2}(1 - 0.6826) = 0.1587$

∴ 理论上说在 130 分以上人数约为 $0.1587 \times 40 \approx 6$.

故选: C

变式 3-3. 某小区有 1000 户, 各户每月的用电量近似服从正态分布 $N(300, 5^2)$, 则用电量在 310 度以上的用户数约为 ()

参考数据: 若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma \leq \xi \leq \mu + \sigma) = 68.26\%$,

$$P(\mu - 2\sigma \leq \xi \leq \mu + 2\sigma) = 95.44\%, \quad P(\mu - 3\sigma \leq \xi \leq \mu + 3\sigma) = 99.74\%.$$

A. 17 B. 23 C. 34 D. 46

【答案】B

【分析】

利用正态分布曲线 $N(\mu, \sigma^2)$ 关于直线 $x = \mu$ 对称和所给的概率求解.

【详解】

若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(300, 5^2)$, 则 $P(300 \leq \xi \leq 300 + 10) = \frac{1}{2} P(300 - 10 \leq \xi \leq 300 + 10) = 47.72\%$,

因为这 1000 户中每户每月的用电量 ξ 近似服从正态分布 $N(300, 5^2)$,

且,

所以在这 1000 户中, 用电量在 310 度以上的用户数约为 23.

故选: B.

考点四 正态分布的实际应用

典例 4. 在某校举行的数学竞赛中, 全体参赛学生的竞赛成绩近似地服从正态分布 $N(70, 100)$. 已知成绩在 90 分以上(含 90 分)的学生有 12 人.

(1) 试问此次参赛学生的总数约为多少人?

(2) 若成绩在 80 分以上(含 80 分)为优, 试问此次竞赛成绩为优的学生约为多少人?

附正态分布 3σ 概率表:

$$P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827, \quad P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545, \quad P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$$

【答案】(1) 527 人; (2) 84 人.

【分析】

(1) 利用正态分布的性质得到成绩在 90 分以上(含 90 分)的概率, 进而求得总人数;

(2) 利用正态分布的性质得到成绩在 80 分以上(含 80 分)的概率, 进而结合 (1) 中所得总人数求得.

【详解】

(1) 设参赛学生的成绩为 X , 因为 $X \sim N(70, 100)$,

所以 $\mu = 70$, $\sigma = 10$.

$$\text{则 } P(X \geq 90) = P(X \leq 50) = \frac{1}{2} [1 - P(50 < X < 90)]$$

$$= \frac{1}{2} [1 - P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)] \approx \frac{1}{2} \times (1 - 0.9545)$$

$$= 0.02275,$$

$$12 \div 0.02275 \approx 527(\text{人}).$$

因此，此次参赛学生的总数约为 527 人.

$$(2) \text{ 由 } P(X \geq 80) = P(X \leq 60) = \frac{1}{2} [1 - P(60 < X < 80)]$$

$$= \frac{1}{2} [1 - P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)] \approx \frac{1}{2} \times (1 - 0.6827)$$

$$= 0.15865,$$

$$527 \times 0.15865 \approx 84(\text{人}).$$

因此，此次竞赛成绩为优的学生约为 84 人.

变式 4-1. 在某次数学考试中，考生的成绩 ξ 服从一个正态分布，即 $\xi \sim N(90, 100)$.

(1) 试求考试成绩 ξ 位于区间(70, 110)上的概率是多少？

(2) 若这次考试共有 2000 名考生，试估计考试成绩在(80, 100)间的考生大约有多少人？

$$\text{附： } P(\mu - \sigma < \xi < \mu + \sigma) = 0.6828, \quad P(\mu - 2\sigma < \xi < \mu + 2\sigma) = 0.9544,$$

$$P(\mu - 3\sigma < \xi < \mu + 3\sigma) = 0.9974.$$

【答案】(1) 0.9544; (2) 1365(人)

【分析】

(1) 根据题意求出 μ 和 σ ，然后将区间 (79,110) 改为 $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ ，进而得到答案；

(2) 先算出考生成绩在(80, 100)内的概率，进而估计出考生数量.

【详解】

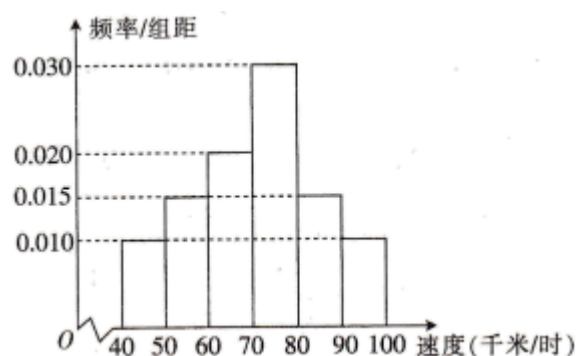
因为 $\xi \sim N(90, 100)$ ，所以 $\mu = 90$ ， $\sigma = 10$.

(1) 由于正态变量在区间 $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ 内取值的概率是 0.9544，而该正态分布中， $\mu - 2\sigma = 90 - 2 \times 10 = 70$ ， $\mu + 2\sigma = 90 + 2 \times 10 = 110$ ，于是考试成绩 ξ 位于区间(70, 110)内的概率是 0.9544.

(2) 由 $\mu = 90$ ， $\sigma = 10$ ，得 $\mu - \sigma = 80$ ， $\mu + \sigma = 100$ ，由于正态变量在区间 $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ 内取值的概率是 0.6826，所以考试成绩 ξ 位于区间(80, 100)内的概率就是 0.6826，一共有 2000 名考生，所以考试成绩在(80, 100)间的考生大约有 $2000 \times 0.6826 \approx 1365(\text{人})$.

变式 4-2. 扶贫期间，扶贫工作组从 A 地到地修建了公路，脱贫后，为了了解 A 地到地公路的交通通行状况，工作组调查了从 A 地到地行经该公路的各种类别的机动车共 4000

辆，汇总行车速度后作出如图所示的频率分布直方图.



(1) 试根据频率分布直方图，求样本中的这 4000 辆机动车的平均车速（同一组中的数据用该组区间的中点值代替）.

(2) 由频率分布直方图可大致认为，该公路上机动车的行车速度 Z 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，其中 μ ， σ^2 分别取调查样本中 4000 辆机动车的平均车速和车速的方差 s^2 （ $s^2 = 204.75$ ）.

(i) 请估计该公路上 10000 辆机动车中车速不低于 84.8 千米/时的车辆数（精确到个位）；

(ii) 现从经过该公路的机动车中随机抽取 10 辆，设车速低于 84.8 千米/时的车辆数为 X ，求的数学期望.

附：若 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(\mu - \sigma < \xi \leq \mu + \sigma) = 0.6827$ ， $P(\mu - 2\sigma < \xi \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$ ，

$P(\mu - 3\sigma < \xi \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$ ，取.

【答案】 (1) 70.5 千米/时；(2) (i) 1587，(ii) 8.4135.

【分析】

(1) 根据平均数的计算方法计算出平均数.

(2) (i) 根据正态分布首先计算出 $P(56.2 < Z \leq 84.8)$ ，然后计算出 $P(Z \geq 84.8)$ ，从而求得估计值.

(ii) 根据二项分布的数学期望计算公式，计算出 $E(X)$.

【详解】

(1) 由题意知

中点值	45	55	65	75	85	95
频率	0.1	0.15	0.2	0.3	0.15	0.1

所以，

所以这 4000 辆机动车的平均车速为 70.5 千米/时.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/917121051010010025>