第九章 振动

概述

振动、波动 — 横跨物理学所有领域

一. — 物理量在中心值附近作周期性变化

1. 机械振动 位置或位移

特征
- 运动学— 周期性
- 动力学— 恢复力

形态
- 轨迹 — 直线或曲线
- 形式 — 平动(质点) 或转动(刚体)

2. 非机械振动 电磁振荡、交流电……

以上具有相似物理规律和研究方法

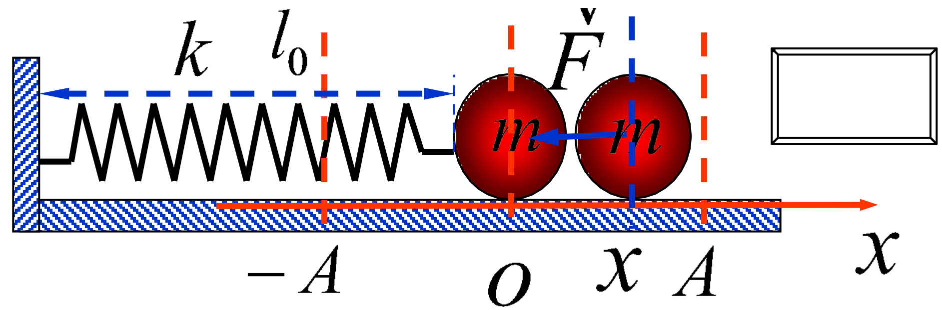
二. 最基本的振动 —— 简谐运动

简谐运动 $\underset{\text{分解}}{\overset{\text{叠加}}{\rightleftharpoons}}$ 复杂振动

理想模型
- 一维平动 — 弹簧振子
- 一维转动 — 复摆（含单摆）

9—1 简谐运动 振幅 周期与频率 相位

一. 简谐运动



弹簧振子(一维平动

集中质量+弹性系统)

以平衡位置为原点、建立图示坐标系

偏离x $\sum F = F = -kx$ 动力学方程

k：劲度系数、一般为振动常数

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$$ 运动微分方程

ω：角频率 $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$ — 系统属性

$x = A\cos(\omega t + \varphi)$ 运动方程

等价判别式

A、φ：积分常数 — 初始条件

注

a. x — 平衡位置 量度

b. k、ω — 固有性质 与初始条件无关

A、φ — 初始条件 与固有性质无关

c.

$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\underbrace{A\omega}_{v_{\mathrm{m}}}\sin(\omega t+\varphi)$$

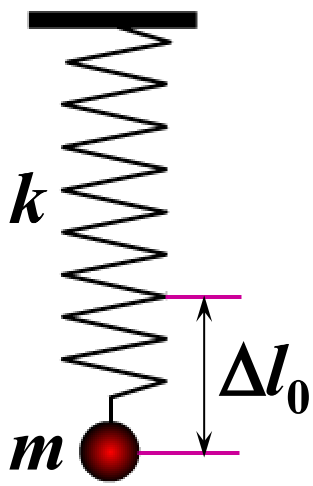
$$a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\underbrace{A\omega^2}_{a_{\mathrm{m}}}\cos(\omega t+\varphi)$$

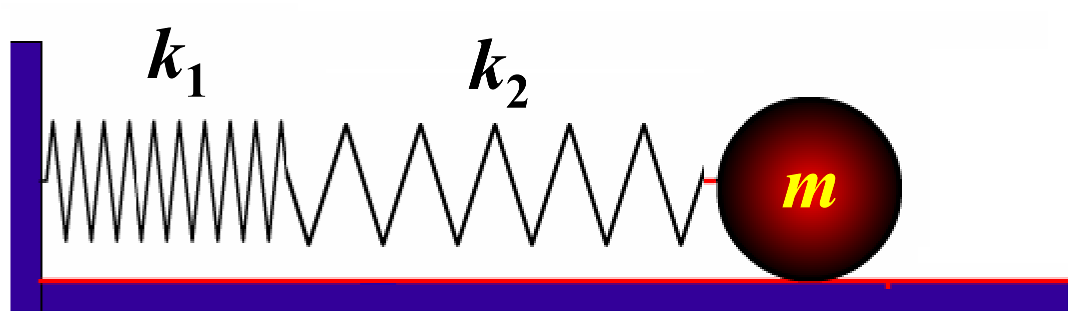
t 或($\omega t+\varphi$) 周期性函数

d. 推广 — 角谐振动($\theta < 5°$) (9−3)

[例] 证明下列振动仍为简谐振动,并求固有量(k, ω)（1）将弹簧振子竖直悬挂，已知平衡时弹簧伸长量为Δl_0

（2）如图所示，两弹簧串联，水平面光滑





讨论:

动力学分析 — 判断振动性质，求固有量

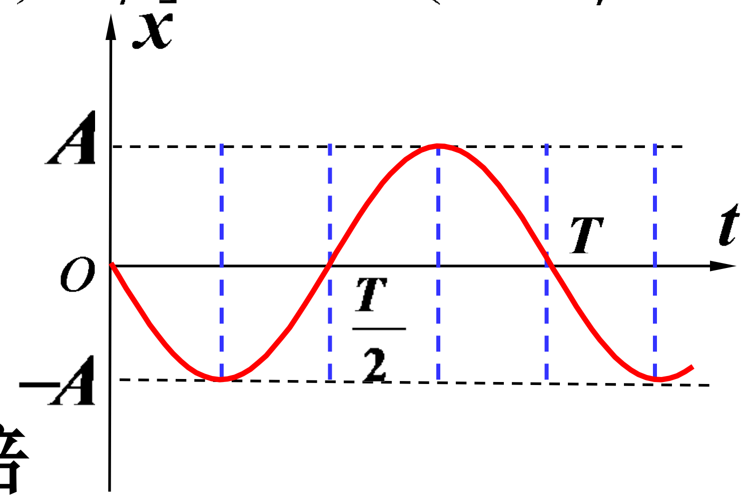
(动和静)平衡位置，偏离量x (θ)、力(矩)分析…

二. 简谐运动的运动学描述

1.振幅 A 　最大位移 $A=|x_{\max}|$ 　表征能量

2.周期与频率

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)=A\cos[\omega(t+T)+\varphi]=A\cos(\omega t+\varphi+2\pi)$$



比较 $\omega T=2\pi$

即 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2\pi\nu$

单位时间, 全振动次数的2π倍

ω、T、ν— 固有量，取决振动系统动力学特征

弹簧振子固有周期 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

3. 相位

$$\text{由前知}\left.\begin{array}{l} x \\ v \\ a \end{array}\right\} f[(\omega t+\varphi)] \Rightarrow \text{“}\omega t+\varphi\text{”— } t \text{ 时状态(相)}$$

$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\left.\begin{array}{ll}
x = A,\ v = 0 & \omega t+\varphi = \pm 2k\pi \quad k = 0,1,2,\ldots \\
x = 0,\ v < 0 & \omega t+\varphi = \dfrac{\pi}{2} \pm 2k\pi \\
x = -A,\ v = 0 & \omega t+\varphi = \pi \pm 2k\pi \\
x = 0,\ v > 0 & \omega t+\varphi = \dfrac{3\pi}{2} \pm 2k\pi \\
 & \left(\text{或} -\dfrac{\pi}{2}\right)
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}\text{一般取 } k = 0 \text{ 描述} \\ \pm 2k\pi\text{—重复性}\end{array}$$

如 $t = 0$ 则 φ — 初始状态

4. 常数A、φ的确定(解析法)

$$t=0\quad\begin{cases}x_0=A\cos\varphi\\ v_0=-A\omega\sin\varphi\end{cases}$$

$$\begin{cases}A=\sqrt{x_0^2+(\dfrac{v_0}{\omega})^2}\\ \varphi=\arctan(\dfrac{-v_0}{\omega x_0})\end{cases}$$ —— 任意角(4个象限)

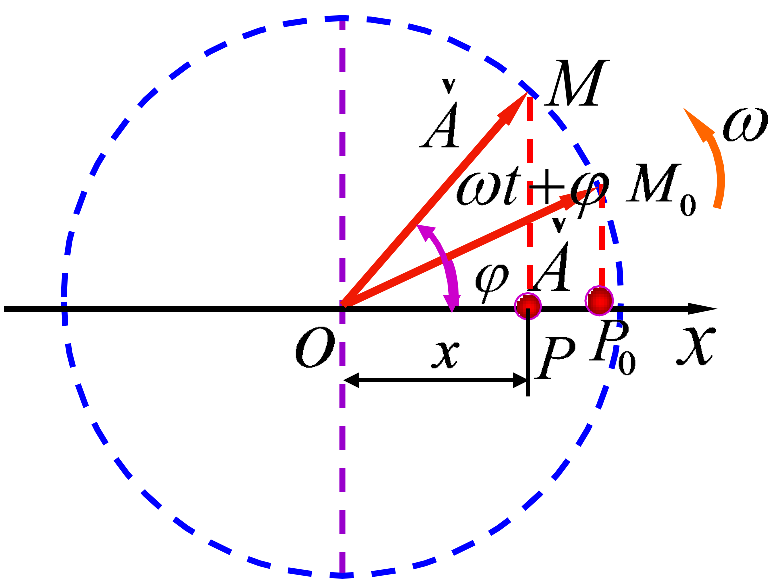
或 $\varphi=\arccos\dfrac{x_0}{A}$ 再结合v_0(>0、= 0、<0)判断

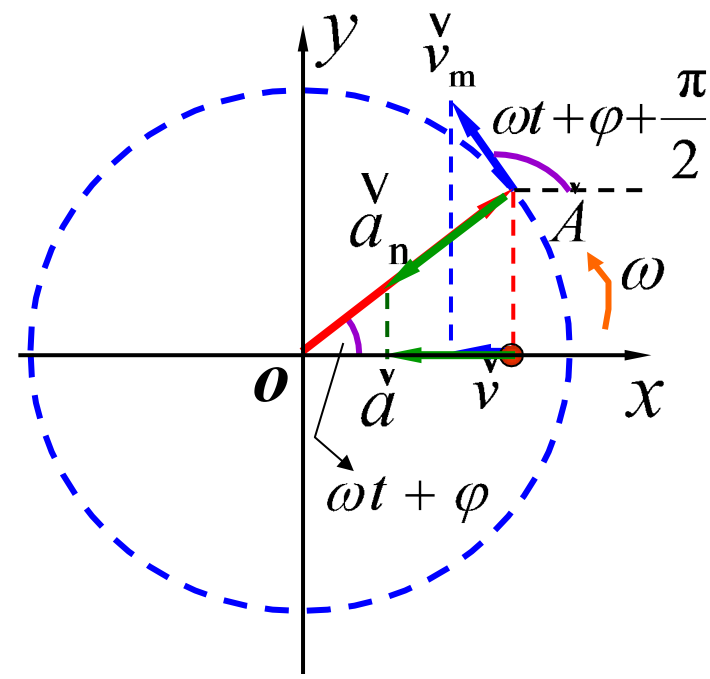
9－2　旋转矢量

一. 简谐运动与匀速圆周运动

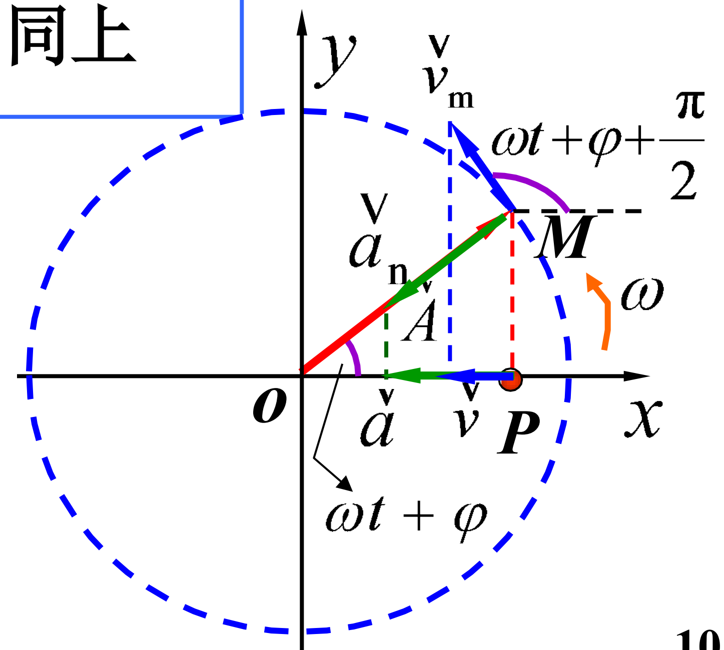
如图所示　旋转矢量 $\vec{A}$

$$t=0\,(M_0,P_0)\longrightarrow t\,(M,P)$$

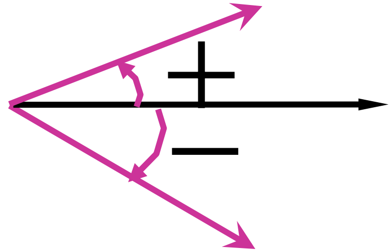




	矢端M	投影点P	关系
运动性质	匀速率圆周运动	简谐振动	合与分
ω	角速度(逆)	角频率	数值相等
$(\omega t+\varphi)$	t时角位置	相位	同上
φ	$t=0$角位置	初相位	同上



a. 规定



一般：

Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ象限　正角，

Ⅳ象限　负角

b. 旋矢图

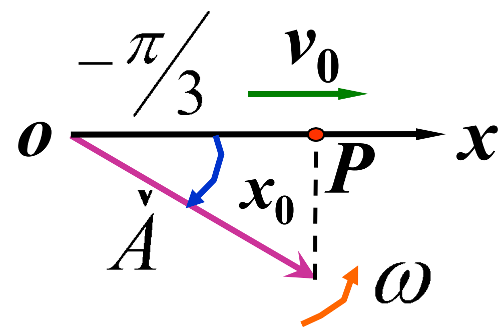
状态 —— 相位

一一对应

二. 旋转矢量法

1. 表示谐振动（三要素）

$$x = A\cos(\omega t - \frac{\pi}{3})$$



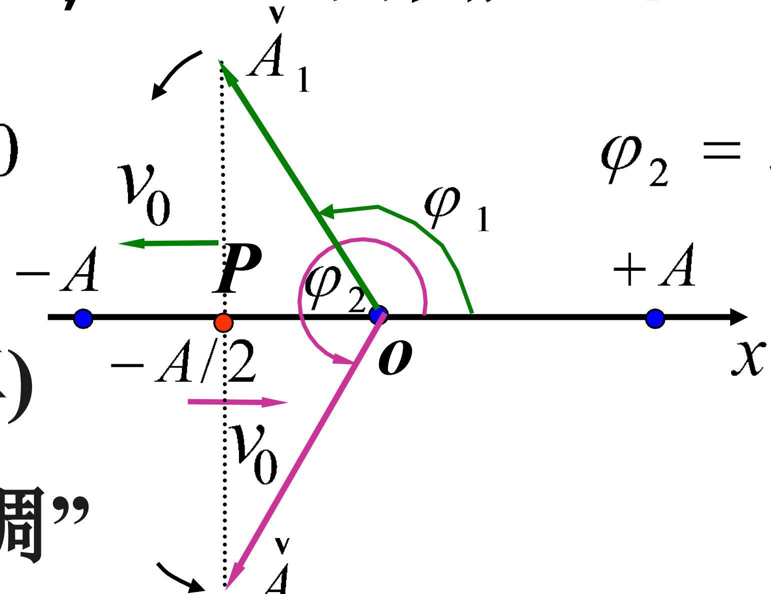
2. 描绘$x-t$ 曲线

3. 确定初相位φ(或相位) (几何法)

讨论：如振子P，$t=0$ 时处于下状态，求φ

(1) $x_0=-\dfrac{A}{2}\quad v_0<0$；　由图知 $\varphi_1=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$

(2) $x_0=-\dfrac{A}{2}\quad v_0>0$　　$\varphi_2=\pi+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{4\pi}{3}$

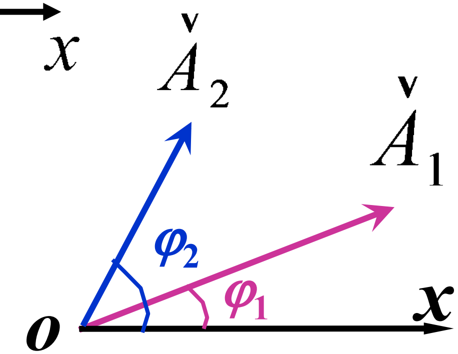


4. 相位差 (同频率)

— 两振动“步调”

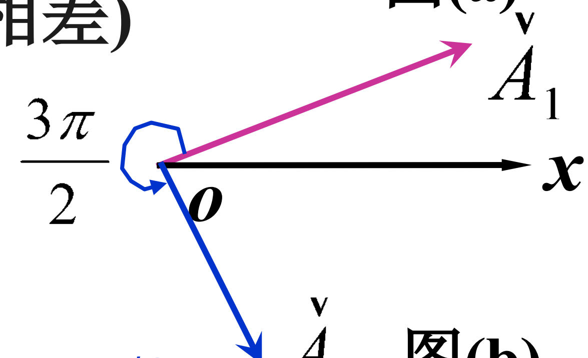
相位差

$$\Delta\varphi=(\omega t+\varphi_2)-(\omega t+\varphi_1)=\varphi_2-\varphi_1\ \text{(初相差)}$$



图(a)

规定 $|\Delta\varphi|\le\pi$ 逆时针在前为超前



图(b)

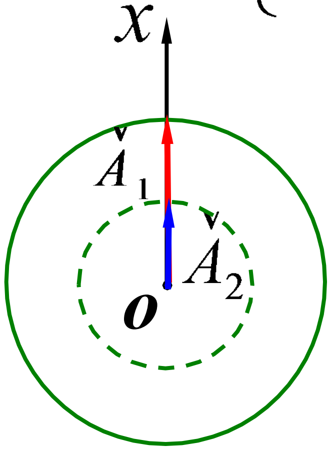
对(a)图　x_2超前x_1　$(\varphi_2-\varphi_1)\le\pi$

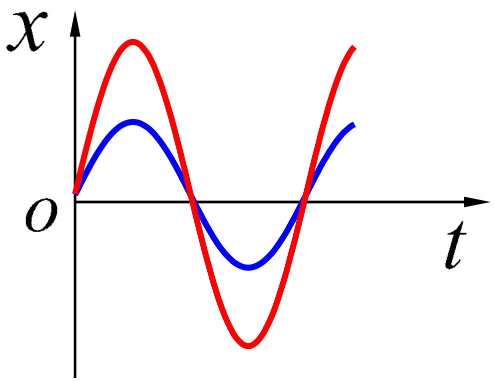
(b)图　x_1 超前 x_2　$\pi/2$　或 x_2滞后 x_1　$\pi/2$

如 $\Delta\varphi=\begin{cases}\pm 2k\pi \\ \pm(2k+1)\pi\end{cases}$ $K=0,1,2,\text{L}$

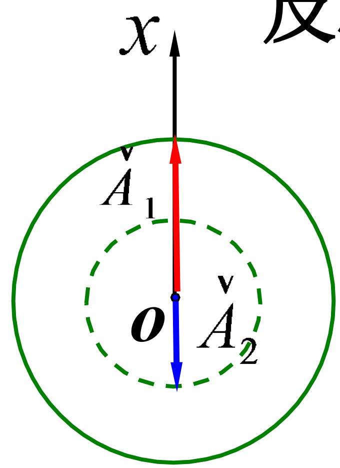
同相 “步调一致”

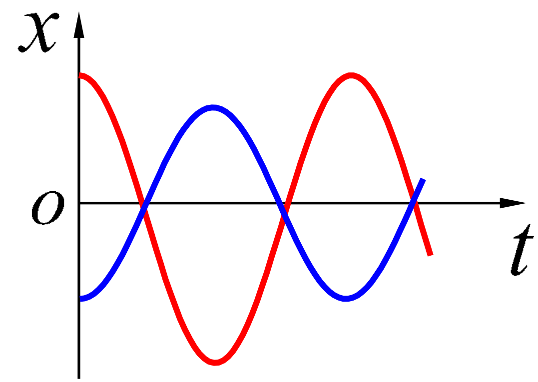
反相 “步调相反”





$\varphi_1=\varphi_2=0$





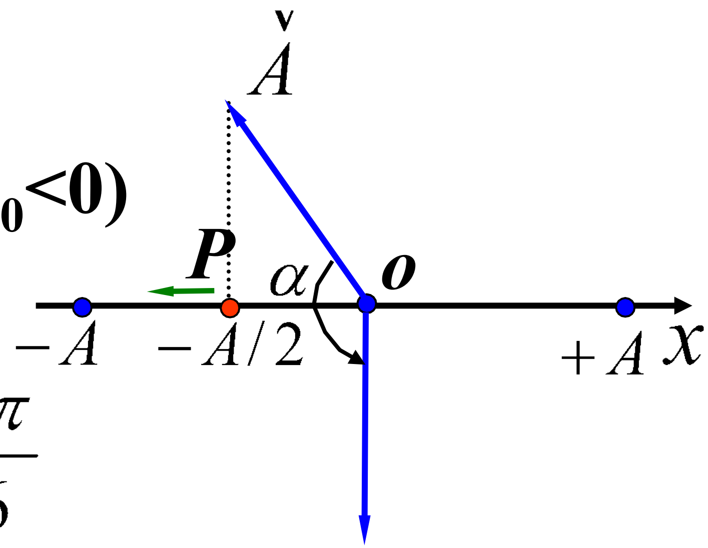
$\varphi_1=0,\varphi_2=\pi$

5. Δt 或 ω

如振子由初始状态（$x_0=-A/2$，$v_0<0$）

回到平衡位置(第一次)

由旋矢图知 $\omega\Delta t=\alpha=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{5\pi}{6}$



6. 谐振动合成(9—5)

由此 ω与Δt 可互求

三. 谐振动的运动学分析

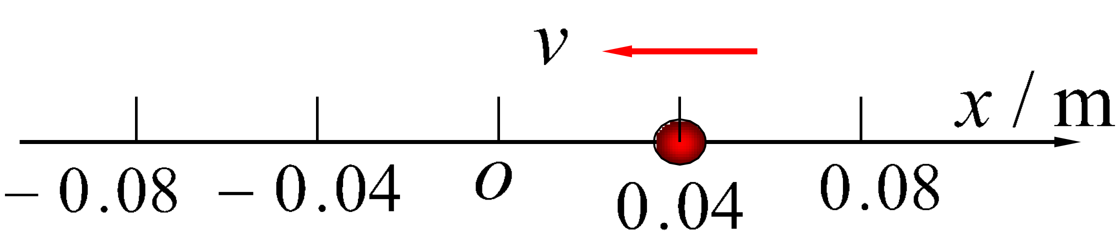
1. 已知运动方程→ 一系列物理量

2. 由已知条件→运动方程(确定三要素) →其它物理量

[例1] 一质量为0.01 kg的物体作简谐运动，其振幅为0.08 m, 周期为4 s, 起始时刻物体在 $x = 0.04$ m处, 向ox 轴负方向运动（如图）. 试求:

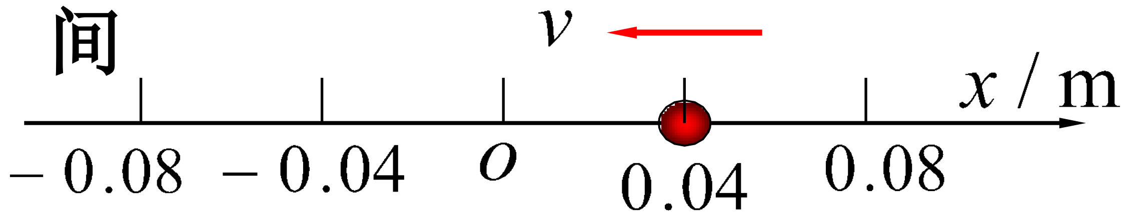
(1) t=1.0 s时, 物体所处的位置和所受的力;

(2) 由起始位置运动到 x = -0.04m处所需要的最短时间.



$m=0.01\,\mathrm{kg}, A=0.08\,\mathrm{m}, T=4\,\mathrm{s}, t=0, x=0.04\,m, v_0<0$

求(1) $t=1.0\,\mathrm{s}, x, F$　　(2) $x=0.04$ m 到-0.04 m最短时间



分析:

a. 先求运动方程(三要素) ,其中φ为关键

b. φ和Δt 求解 → 解析法 / 旋转矢量法

如φ:

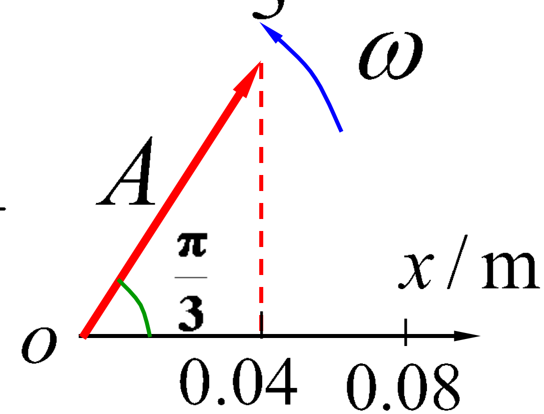
解析法 由 $x_0=0.04=0.08\cos\varphi \longrightarrow \varphi=\pm\dfrac{\pi}{3}$

$v_0=-A\omega\sin\varphi<0\rightarrow\sin\varphi>0$

判断 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$

旋矢法　由旋矢图

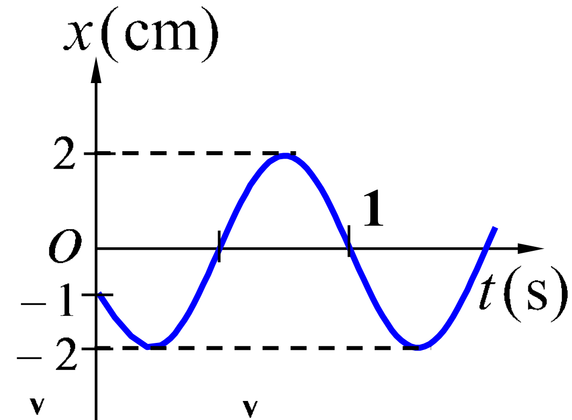
知 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$



[例2] 一简谐运动的 $x - t$ 曲线，如图所示，求：

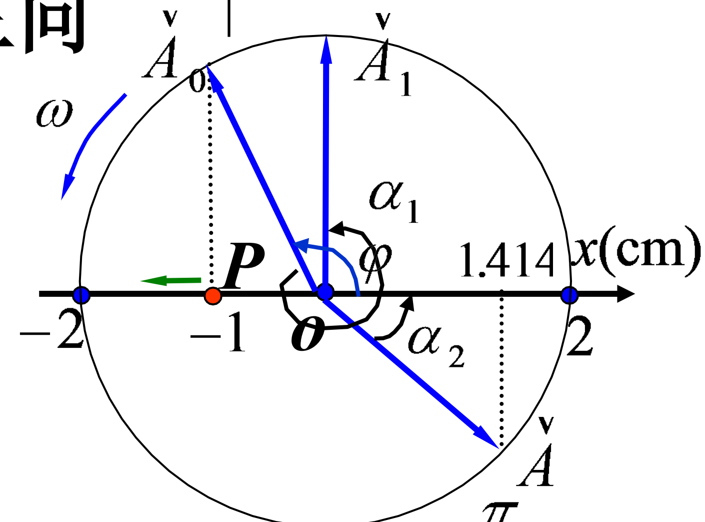
(1) 初相 φ ； (2) 求运动方程,并用旋矢表示之;

(3) 第一次到达 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}A$ 处的速度和加速度。



分析: a. 简便路径: 用旋矢法求 φ 和 ω ,并结合相位法求第三问

b. 旋矢图



由图知 $\varphi=\frac{2\pi}{3}$

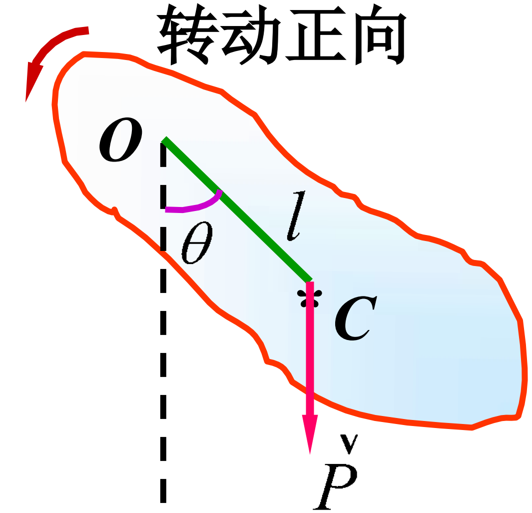
$$\alpha_1=\frac{11\pi}{6}=\omega\Delta t=\omega$$

第一次到达次 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}A$ 处相位 $\omega t+\varphi=\alpha_2=-\frac{\pi}{4}$

讨论: 比较：解析法、旋矢法、相位法

9—3 单摆和复摆

一. 复摆(物理摆) — 一维角谐振动模型



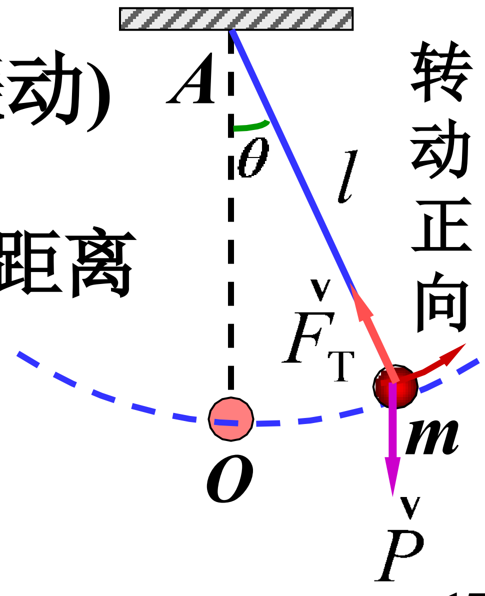
如图 偏离平衡位置θ

$M = -mgl\sin\theta$ 如 $\theta < 5^{\circ}$ $\sin\theta \approx \theta$

（C点为质心）

有
$$\begin{cases} M = -(mgl)\theta & (K = mgl) \\ \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -(\dfrac{mgl}{J})\theta & (\omega^2 = \dfrac{mgl}{J}) \\ \theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi) & \end{cases}$$
运动方程 (准谐振动)

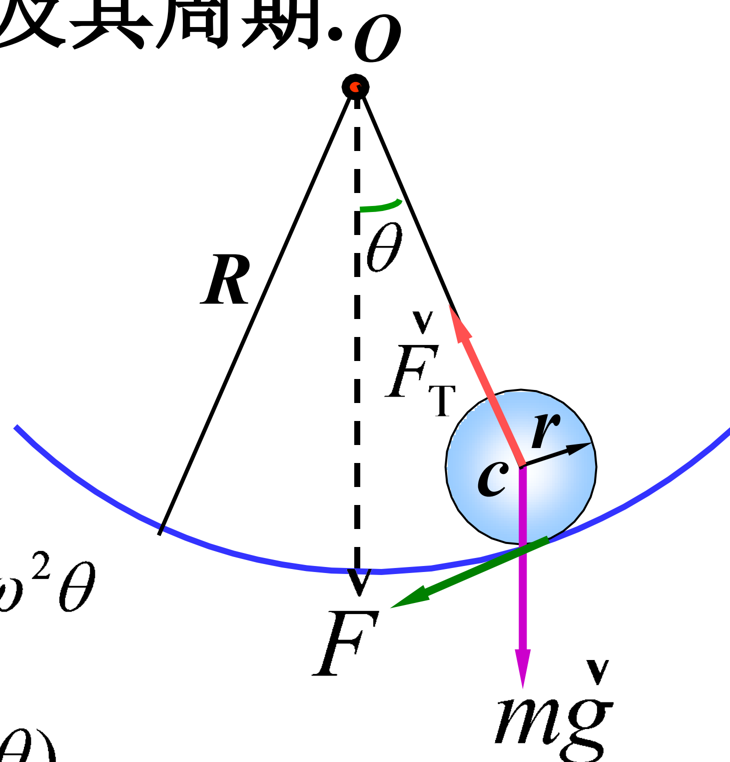
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}$$
l — 质心 c 至转轴 o 距离



二. 单摆(数学摆) — 复摆一个特例

$J = ml^2$ $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

[例1]一半径为 r 的均质球,可沿半径为 R 的固定大球壳的内表面作纯滚动(如图)试求圆球绕平衡位置作微小运动的动力学方程及其周期.



分析: 偏离 θ 力(矩)分析

$$\left.\begin{aligned} -(mg\sin\theta + F) &= ma_t \\ Fr &= \frac{2}{5}mr^2\alpha \\ a_t &= (R-r)\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \\ a_t &= r\alpha \end{aligned}\right\} \quad \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2\theta \quad (\sin\theta \approx \theta)$$

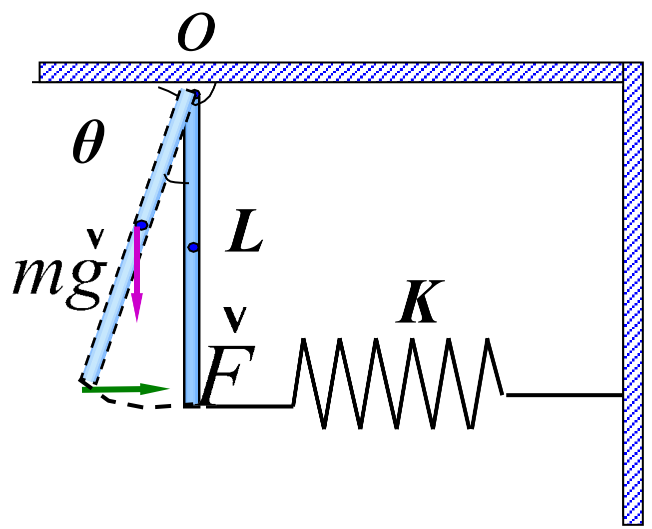
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)l}{5g}}$$

[例2] 细杆(m,l)竖直时，水平轻质弹簧(k)处于自然状态，求细杆作小幅摆动时的周期T。

分析： 偏离θ

对o：$-[mg\dfrac{l}{2}\sin\theta + kl\sin\theta(l\cos\theta)] = \dfrac{1}{3}ml^2\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$

θ很小时，$\sin\theta\approx\theta \quad \cos\theta\approx 1$



有 $-(mg\dfrac{l}{2} + kl^2)\theta = \dfrac{1}{3}ml^2\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$

$$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{2ml}{3(mg+2kl)}}$$

讨论： 动力学分析步骤?

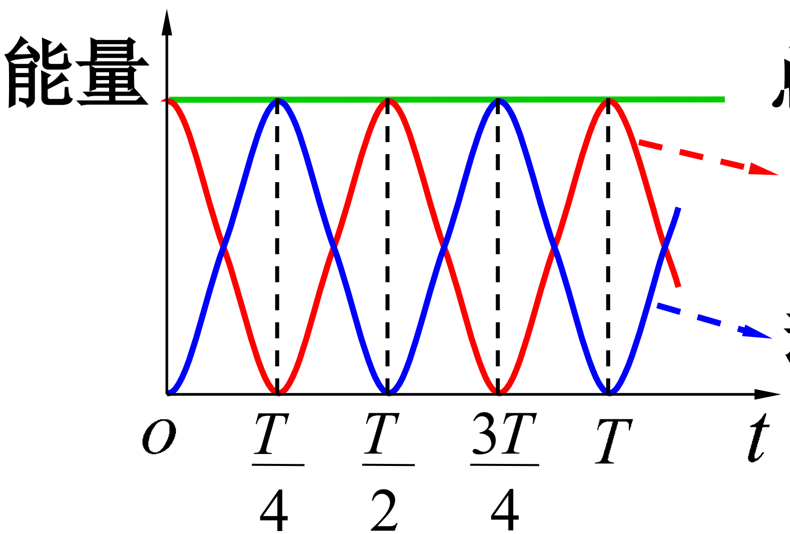
9—4 简谐运动的能量

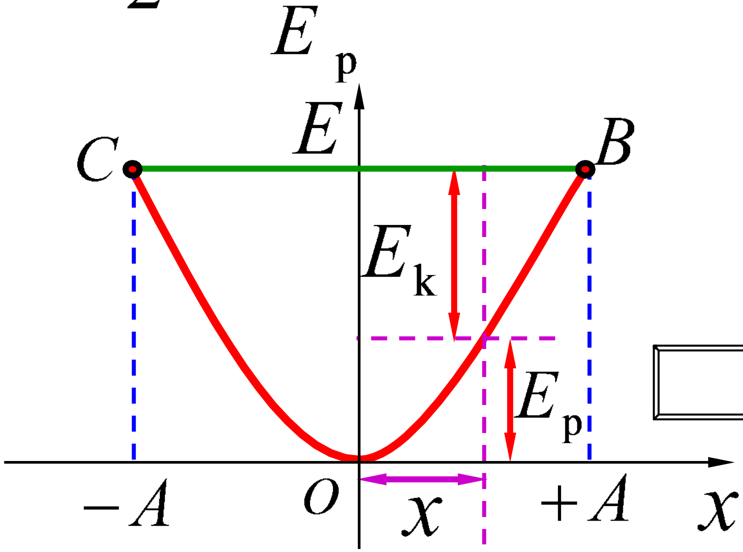
以弹簧振子为例

t:系统能量 $E_{\mathrm{k}}=\dfrac{1}{2}mv^{2}=\dfrac{1}{2}m\omega^{2}A^{2}\sin^{2}(\omega t+\varphi)$

$$E_{\mathrm{P}}=\frac{1}{2}kx^{2}=\frac{1}{2}m\omega^{2}A^{2}\cos^{2}(\omega t+\varphi)$$

$$E=E_{\mathrm{k}}+E_{\mathrm{P}}=\frac{1}{2}mv^{2}+\frac{1}{2}kx^{2}=\frac{1}{2}kA^{2}=C$$ 守恒





讨论:

能量法 —— 判断广义简谐运动

简谐运动——能量特征——能量守恒

以弹簧振子为例:

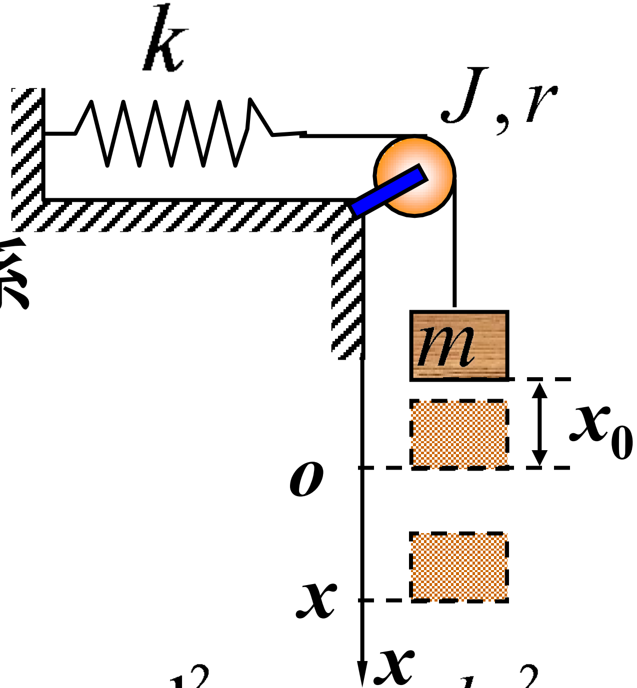
振子偏离平衡位置 x 时

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = C$$

两边对 t 求导

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

[例] 求图示系统的振动频率ν. 设轻绳与定滑轮间无相对滑动.



分析:

a. 寻找平衡位置，建立图示坐标系

$$mg = kx_0$$

b. Ⅰ法　动力学法

偏离x　　平动与转动隔离

对m： $mg - F_T = ma$

对J： $F_T r - k(x_0 + x) = J\alpha$

m与J： $a = r\alpha$

$\rightarrow$

对m： $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{kr^2}{mr^2 + J}x$

对J： $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{kr^2}{mr^2 + J}\theta$

$$\omega^2 = \frac{kr^2}{mr^2 + J} \qquad \nu = \frac{\omega}{2\pi}$$ ——系统固有性质