专题 22.3　二次函数的图象与性质（二）【八大题型】

【人教版】

题型梳理

举一反三

【题型 1　利用二次函数的图象与性质比较函数值的大小】

【例 1】（2023 春·天津滨海新·九年级校考期中）已知点$A(-2,y_1)$，$B(1,y_2)$，$C(5,y_3)$在二次函数$y=-3x^2+k$的图象上，则y_1，y_2，y_3的大小关系是（　　）

A．$y_1<y_2<y_3$　　B．$y_3<y_2<y_1$　　C．$y_3<y_1<y_2$　　D．$y_1<y_3<y_2$

【答案】C

【分析】根据题意可得二次函数$y=-3x^2+k$的图象的对称轴为 y 轴，从而得到点$A(-2,y_1)$关于对称轴的对称点为$(2,y_1)$，再由当$x>0$时，y 随 x 的增大而减小，即可求解．

【详解】解：∵二次函数$y=-3x^2+k$的图象的对称轴为 y 轴，

∴点$A(-2,y_1)$关于对称轴的对称点为$(2,y_1)$，

∵$-3<0$，

∴当$x>0$时，y 随 x 的增大而减小，

∵$1<2<5$，

∴$y_3<y_1<y_2$．

故选：C

【点睛】本题主要考查了二次函数的图象和性质，熟练掌握二次函数的图象和性质是解题的关键．

【变式 1-1】（2023 春·九年级单元测试）若点$C(x_1,m)$、$D(x_2,n)$在抛物线$y=-2(x-3)^2$的图象上，且$x_1>x_2>3$，则 m 与 n 的大小关系为______．

【答案】$m<n$

【分析】根据二次函数解析式，求得二次函数的对称轴，开口方向，再根据二次函数的性质求解即可.

【详解】解：由抛物线$y=-2(x-3)^2$可得，$a<0$，开口向下，对称轴为$x=3$，

∴当$x>3$时，y随x的增大而减小，

又∵$x_1>x_2>3$，

∴$m<n$

故答案为：$m<n$

【点睛】此题考查了二次函数的图象与性质，解题的关键是熟练掌握二次函数的有关性质.

【变式 1-2】（2023 春·福建漳州·九年级统考期末）已知点$(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$都在二次函数$y=ax^2-2ax-3a(a\neq 0)$的图像上，若$-1<x_1<0,1<x_2<2,x_3>3$，则下列关于$y_1$，$y_2$，$y_3$三者的大小关系判断一定正确的是（　）

A．y_1可能最大，不可能最小　　B．y_3可能最大，也可能最小

C．y_3可能最大，不可能最小　　D．y_2不可能最大，可能最小

【答案】B

【分析】求出函数图像的对称轴，与 x 轴的交点，分$a>0$和$a<0$两种情况，根据已知三点与对称轴的距离，结合开口方向分析即可.

【详解】解：在$y=ax^2-2ax-3a(a\neq 0)$中，

对称轴为直线$x=-\frac{-2a}{2a}=1$，

令$ax^2-2ax-3a=0$，解得：$x_1=-1$，$x_2=3$，

∴函数图像与 x 轴交于$(-1,0)$，$(3,0)$，

∵$-1<x_1<0,1<x_2<2,x_3>3$，

∴(x_3,y_3)离对称轴最远，(x_2,y_2)离对称轴最近，

当$a>0$时，开口向上，

∴$y_3>y_1>y_2$；

当$a<0$时，开口向下，

∴$y_3<y_1<y_2$；

∴y_2和y_3可能最大，也可能最小，

故选 B.

【点睛】本题考查了二次函数的图像与性质，解题的关键是根据表达式求出对称轴和与 x 轴交点，利用性

质进行分析．

【变式 1-3】（2023·浙江温州·校考三模）已知二次函数$y=x^2-2x$的图象过$A(a,y_1),B(2a,y_2)$两点，下列选项正确的是（　）

A．若$a<0$，则$y_1>y_2$　　B．若$0<a<\frac{2}{3}$，则$y_1<y_2$

C．若$\frac{2}{3}<a<1$，则$y_1<y_2$　　D．若$a>1$，则$y_1>y_2$

【答案】C

【分析】根据根据二次函数的解析式得到对称轴为直线$x=1$，再利用二次函数的性质对各项判断即可解答．

【详解】解：∵二次函数$y=x^2-2x$的图象过$A(a,y_1),B(2a,y_2)$两点，

∴二次函数的顶点式为：$y=x^2-2x=(x-1)^2-1$，

∴当$x<1$时，y随x的增大而减小，当$x>1$时，y随x的增大而增大；

∵$a<0$，

∴$2a<0$，

∴$a>2a$，

∴$y_1<y_2$，

故A错误；

∵二次函数的顶点式为：$y=x^2-2x=(x-1)^2-1$，

∴抛物线的对称轴为直线$x=1$，

若$\frac{a+2a}{2}=1$，

∴解得：$a=\frac{2}{3}$，

∴当$a=\frac{2}{3}$时，a和$2a$关于$x=1$对称，

∴当$0<a<\frac{2}{3}$时，$y_1>y_2$；当$\frac{2}{3}<a<1$时，$y_1<y_2$，

故B错误，C正确；

当$a>1$时，y随x的增大而增大，

∵$a<2a$，

∴$y_1<y_2$，

故D错误；

故选C．

【点睛】本题考查了二次函数的性质，二次函数的对称轴，掌握二次函数的性质是解题的关键．

【题型 2　利用二次函数的图象特征求参数的值或取值范围】

【例 2】（2023·江苏苏州·模拟预测）若二次函数$y=x^2-2x-3$的图象上有且只有三个点到 x 轴的距离等于 m，则 m 的值为 __________．

【答案】4

【分析】由抛物线解析式可得抛物线对称轴为直线$x=1$，顶点为$(1,-4)$，由图象上恰好只有三个点到 x 轴的距离为 m 可得$m=4$．

【详解】解：$\because y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$，

$\therefore$抛物线开口向上，抛物线对称轴为直线$x=1$，顶点为$(1,-4)$，

$\therefore$顶点到 x 轴的距离为 4，

$\because$函数图象有三个点到 x 轴的距离为 m，

$\therefore m=4$，

故答案为：4．

【点睛】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征，能够理解题意，掌握求二次函数对称轴和顶点坐标的方法是解题的关键．

【变式 2-1】（2023·江苏南通·统考二模）若抛物线$y=-x^2+4x-n$的顶点在x轴的下方，则实数n的取值范围是______．

【答案】$n>4$

【分析】先将抛物线解析式化为顶点式，再利用顶点在x轴下方，即可求出n的范围．

【详解】解：$y=-x^2+4x-n$，

化为顶点式为：$y=-(x-2)^2+4-n$，

$\because$ $4-n<0$，

$\therefore n>4$，

故答案为：$n>4$．

【点睛】本题考查了抛物线的顶点式解析式，解题关键是理解当顶点纵坐标小于0时，顶点位于x轴下方．

【变式 2-2】（2023·黑龙江大庆·大庆一中校考模拟预测）二次函数$y=kx^2-x-4k$（k为常数且$k\neq 0$）的图象始终经过第二象限内的定点A．设点A的纵坐标为m，若该函数图象与$y=m$在$1<x<3$内没有交点，则k的取值范围是______．

【答案】$0<k<1$或$-1<k<0$

【分析】先计算二次函数过两个定点，确定$m=2$，根据函数图象与$y=m$在$1<x<3$内没有交点，分$k>0$和$k<0$两种情况列不等式即可解答.

【详解】解：∵ $y=kx^2-x-4k=k(x^2-4)-x$，

$\therefore x^2-4=0$，

$\therefore x=\pm 2$，

当$x=2$时，$y=-2$，

当$x=-2$时，$y=2$，

∴二次函数$y=kx^2-x-4k$（k为常数且$k\neq 0$）的图象始终经过定点$\left(-2，2\right)$，$\left(2，-2\right)$，

$\therefore m=2$，

∵函数$y=kx^2-x-4k$的图象与$y=2$在$1<x<3$内没有交点，

∴分两种情况：

①当$k>0$时，$x=3$时，$y<2$，

即$9k-3-4k<2$，

$\therefore k<1$，

$\therefore 0<k<1$，

②当$k<0$时，当$x=1$时，$y<2$，

即$k-1-4k<2$，

$\therefore k>-1$，

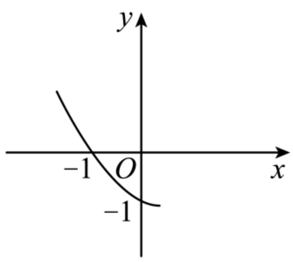
$\therefore -1<k<0$，

综上所述，k的取值范围是$0<k<1$或$-1<k<0$，

故答案为：$0<k<1$或$-1<k<0$.

【点睛】本题主要考查了二次函数图象上点的坐标特征，解题的关键是理解题意，计算定点A的坐标.

【变式 2-3】（2023·陕西西安·陕西师大附中校考模拟预测）如图，抛物线$y=ax^2+bx+c$的图象过点$(-1,0)$和$(0,-1)$，则$a+b+c$的取值范围是（　）



A. $-2<a+b+c<0$　　B. $-2<a+b+c<-1$

C. $-\frac{3}{2}<a+b+c<0$　　D. $-\frac{3}{2}<a+b+c<-1$

【答案】A

【分析】由函数图象的开口方向可知$a>0$，由抛物线与y轴的交点判断c的值，当$x=1$时，二次函数的值小于零，由此可求出a的取值范围，将$a+b+c$用a表示即可得出答案．

【详解】由图象开口向上，可得$a>0$，

∵图象过点$(0,-1)$，

∴$c=-1$，

∵图象过点$(-1,0)$，

∴$a-b-1=0$，

∴$b=a-1$，

∵对称轴在y轴的右侧，

∴当$x=1$时，$y=a+b+c=a+a-1-1=2a-2<0$，

∴$a<1$，

∴$0<a<1$，

∴$-2<2a-2<0$，即$-2<a+b+c<0$，

故选：A．

【点睛】本题考查了二次函数图象和性质，二次函表达式系数符号的确定，熟练掌握知识点是解题的关键．

【题型 3　根据规定范围内二次函数函数的最值求参数的值】

【例 3】（2023 春·九年级单元测试）二次函数$y=ax^2-4x+1$有最小值-3，则 a的值为（　）

A．1　　B．-1　　C．± 1　　D．2

【答案】A

【分析】把二次函数$y=ax^2-4x+1$变成顶点式，根据二次函数的图象性质，得出结论．

【详解】∵ $y=ax^2-4x+1$

∴ $y=ax^2-4x+1=a\left(x-\frac{2}{a}\right)^2-\frac{4}{a}+1$

∵二次函数$y=ax^2-4x+1$有最小值-3,

∴ $\begin{cases} a>0 \\ -\frac{4}{a}+1=-3 \end{cases}$

∴ $a=1$

故选：A

【点睛】本题主要考查了二次函数图象的性质，把二次函数的一般式变成顶点式，求二次函数的最值，熟练掌握二次函数图象的相关性质是解本题的关键．

【变式3-1】（2023春·浙江·九年级校联考期中）已知函数$y=-x^2+bx-3$（b为常数）的图象经过点$(-6,-3)$．当$m\le x\le 0$时，若y的最大值与最小值之和为2，则m的值为（　）

A．-2或$-3+\sqrt{10}$　　　　B．-2或-4

C．-2或$-3-\sqrt{10}$　　　　D．$-3-\sqrt{10}$

【答案】C

【分析】将点$(-6,-3)$代入$y=-x^2+bx-3$即可求得b的值，进而求得抛物线的最大值，结合二次函数图象的性质，分类讨论得出m的取值范围即可．

【详解】把$(-6,-3)$代入$y=-x^2+bx-3$，

得$b=-6$，

∴$y=-x^2-6x-3$，

∵ $y=-x^2-6x-3=-(x+3)^2+6$

∴当$x=-3$时，y有最大值为6；

①当$-3<x\le 0$时，

当$x=0$时，y有最小值为-3，

当$x=m$时，y有最大值为$y=-m^2-6m-3$

∵y的最大值与最小值之和为2，

∴$-m^2-6m-3+(-3)=2$，

∴$m=-2$或$m=-4$(舍去)。

②当$m\le -3$时，

当$x=-3$时，y有最大值为6，

$\because y$ 的最大值与最小值之和为 2，

$\therefore y$ 最小值为-4，

$\therefore -(m+3)^2+6=-4,$

$\therefore m=-3-\sqrt{10}$或$m=-3+\sqrt{10}$(舍去)

综上所述：$m=-2$或$m=-3-\sqrt{10}$

故选：C

【点睛】此题主要考查了待定系数法求二次函数解析式以及二次函数的性质等知识，解题的关键是正确分类讨论得出 m 的取值范围.

【变式 3-2】（2023·河北保定·统考模拟预测）对于二次函数$y=-(x-m)^2+1$，已知$m>3$，当$-1\le x\le 3$时，有下列说法：

①若 y 的最大值为-8，则$m=4$；

②若 y 的最小值为-8，则$m=6$；

③若$m=5$，则 y 的最大值为-3.

则上达说法（　　）

A．只有①正确　　B．只有②正确　　C．只有③正确　　D．均不正确

【答案】C

【分析】根据二次函数$y=-(x-m)^2+1$可得称轴为直线$x=m$，由$a=-1<0$，可得抛物线开口向下，再由$m>3$，所以当$-1\le x\le 3$时，抛物线单调递增，从而可得$x=3$时，y 有最大值，$x=-1$时，y 有最小值，把$x=3$、$y=-8$和$x=-1$、$y=-8$分别代入解析式求得 m 的值，再根据 m 的取值范围进行判断①②即可；把$x=3$、$m=5$，代入解析式求得 y 的最大值即可判断③.

【详解】解：二次函数$y=-(x-m)^2+1$图象的对称轴为直线$x=m$，

$\because a=-1<0$，

$\therefore$抛物线开口向下，

因为$m>3$，所以当$-1\le x\le 3$时，函数$y=-(x-m)^2+1$单调递增，

若 y 的最大值为-8，则$-(3-m)^2+1=-8$，解得$m=6$或$m=0$（舍去），故①错误；

若 y 的最小值为-8，则$-(-1-m)^2+1=-8$，解得$m=2$或$m=-4$，此时不存在 m，故②错误；

若$m=5$，则$y=-(x-5)^2+1$，所以 y 的最大值为$-(3-5)^2+1=-3$，故③正确，

故选 C.

【点睛】本题考查二次函数的图象与性质、二次函数最值，熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.

【变式 3-3】（2023·浙江宁波·统考一模）在平面直角坐标系中，设二次函数$y_1 = x^2 + 2bx + a$，$y_2 = ax^2 + 2bx + 1$（a，b；是实数，$a \neq 0$）的最小值分别为 m 和 n，若$m + n = 0$，则mn的值为(　)

A．0　　B．-1　　C．-2　　D．-4

【答案】A

【分析】先根据题意配出顶点式，可分别写出$m = a - b^2$和$n = \frac{a-b^2}{a}$，再根据$m + n = 0$，写出$(a-b^2)(1 + \frac{1}{a}) = 0$，推出$a - b^2 = 0$，即可求出$m = 0$和$n = 0$，即可求出$mn = 0$．

【详解】解：由题意可知，$y_2 = ax^2 + 2bx + 1$有最小值，

$\therefore a > 0$，

$\because y_1 = x^2 + 2bx + a = (x + b)^2 + a - b^2$，

$\therefore m = a - b^2$，

$\because y_2 = ax^2 + 2bx + 1 = a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{a-b^2}{a}$，

$\therefore n = \frac{a-b^2}{a}$，

$\because m + n = 0$，

$\therefore (a-b^2) + \frac{a-b^2}{a} = 0$，即$(a-b^2)(1 + \frac{1}{a}) = 0$，

$\because 1 + \frac{1}{a} \neq 0$，

$\therefore a - b^2 = 0$，

$\therefore m = 0$，$n = 0$，

$\therefore mn = 0$；

故选：A．

【点睛】本题主要考查的是二次函数的最值，解题关键是用含有a、b的式子表示出m和n．

【题型 4　根据规定范围内二次函数函数的最值求参数取值范围】

【例 4】（2023 春·浙江温州·九年级校考阶段练习）已知二次函数 $y=x^2-4x+1$．若$x \leq a$时，该二次函数的最小值为-3，则实数 a 的取值范围是（　）

A．$a \geq 2$　　B．$a \leq 2$　　C．$a > 2$　　D．$a < 2$

【答案】A

【分析】将二次函数一般式改为顶点式，结合其性质即得出当$a \geq 2$其最小值都为顶点的纵坐标-3．

【详解】$\because y = x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3$，

∴当$x=2$时该函数有最小值-3，

∵a=1>0

∴当$x<2$时，y 随 x 的增大而减小，当$x>2$时，y 随 x 的增大而增大，

∴若使 $x≤a$ 时，该二次函数的最小值为-3，

则$a\geq 2$.

故选 A.

【点睛】本题考查二次函数的图象和性质．熟练掌握二次函数的图象和性质是解题关键．

【变式 4-1】（2023·浙江绍兴·校联考三模）二次函数$y=-x^2+bx+c$的图象经过点$(1,0),(2,3)$，在$a\leq x\leq 6$范围内有最大值为 4，最小值为-5，则 a 的取值范围是（　　）

A．$a\geq 6$　　B．$3\leq a\leq 6$　　C．$0\leq a\leq 3$　　D．$a\leq 0$

【答案】C

【分析】先利用待定系数法求出抛物线的解析式，进而得到抛物线的顶点坐标为$(3,4)$，由于当$x=6$时，$y=-5$，根据抛物线的对称性可得：a 的取值范围是$0\leq a\leq 3$.

【详解】解：∵二次函数$y=-x^2+bx+c$的图象经过点$(1,0),(2,3)$，

∴$\begin{cases}-1+b+c=0\\-4+2b+c=3\end{cases}$，

解得$\begin{cases}b=6\\c=-5\end{cases}$，

∴抛物线的解析式是$y=-x^2+6x-5=-(x-3)^2+4$，

∴抛物线的顶点坐标为$(3,4)$，

∴当$x=3$时，抛物线有最大值 4，

由于当$x=6$时，$y=-(6-3)^2+4=-5$，且在$a\leq x\leq 6$范围内有最大值为 4，最小值为-5，

∴根据抛物线的对称性可得：a 的取值范围是$0\leq a\leq 3$；

故选：C.

【点睛】本题考查了利用待定系数法求二次函数的解析式，二次函数的图象与性质，正确理解题意、熟练掌握抛物线的相关知识是解题关键.

【变式 4-2】（2023 春·北京顺义·九年级校考期中）如果二次函数$y=(m-1)x^2+2mx+m+3$的最小值是正数，则m的取值范围是______.

【答案】$m>\frac{3}{2}$

【分析】先将二次函数解析式化为顶点式，根据函数有最小值，可知二次函数图象开口向上，最小值为正

数，可知其顶点的纵坐标为正数，据此列不等式组即可求解．

【详解】将$y=(m-1)x^2+2mx+m+3$化为顶点式为：$y=(m-1)\left(x+\frac{m}{m-1}\right)^2+\frac{2m-3}{m-1}$，

∵二次函数的最小值为正数，

$\therefore\begin{cases}m-1>0\\ \frac{2m-3}{m-1}>0\end{cases}$

解得：$m>\frac{3}{2}$，

故答案为：$m>\frac{3}{2}$．

【点睛】本题主要考查了二次函数的图象与性质，将二次函数解析式化为顶点式等知识，掌握二次函数的图象与性质是解答本题的关键．

【变式 4-3】（2023·浙江绍兴·统考一模）已知函数$y=x^2-8x+8$，当$0\le x<m$时，函数的最大值是 8，最小值是-8，则m的值可能是（　）

A．1　　B．4　　C．7　　D．10

【答案】C

【分析】根据$y=x^2-8x+8=(x-4)^2-8$，结合$0\le x<m$，当$x=4$时，取得最小值是-8，判定$m>4$；$8=x^2-8x+8=(x-4)^2-8$，得到$x=8$，确定$4\le m\le 8$，判定即可．

【详解】∵$y=x^2-8x+8=(x-4)^2-8$，$0\le x<m$，

∴当$x=4$时，取得最小值是-8，

∴$m\ge 4$；

∵$8=x^2-8x+8=(x-4)^2-8$，

解得$x=8$，$x=0$，

当$x=8$，$x=0$时，取得最大值是 8，

∴$4\le m\le 8$，

故选 C．

【点睛】本题考查了抛物线的最值，正确理解最值的意义是解题的关键．

【题型 5　根据二次函数的性质求最值】

【例 5】（2023 春·浙江杭州·九年级统考期末）已知二次函数$y=x^2-3x+1$，当$m\le x\le 1$时，函数有最大值$4-m$，则$m=$________．

【答案】-1

【分析】根据二次函数$y=x^2-3x+1$的图象开口向上，对称轴为直线$x=\frac{3}{2}$，可知当$m\le x\le 1$时，y随x的增大而减小，所以当$x=m$时，函数有最大值$4-m$，可得$m^2-3m+1=4-m$，即可求出答案.

【详解】$\because$二次函数$y=x^2-3x+1$的图象开口向上，对称轴为直线$x=\frac{3}{2}$，

$\therefore$当$m\le x\le 1$时，y随x的增大而减小，

$\therefore$当$x=m$时，函数有最大值$4-m$，

$\therefore m^2-3m+1=4-m$，

解得$m=-1$或 3，

$\because m<1$，

$\therefore m=-1$.

故答案为：-1.

【点睛】本题考查了二次函数的图象与性质，二次函数的增减性以及二次函数的最值，熟练运用二次函数的图象和性质是解题的关键.

【变式 5-1】（2023 春·浙江宁波·九年级统考期末）已知点$P(m,n)$在二次函数$y=x^2+4$的图象上，则$m-n$的最大值等于________.

【答案】$-\frac{15}{4}$

【分析】代入解析式得$n=m^2+4$，用含 m 的式子表示出$m-n$，找到最大值即可.

【详解】解：把$P(m,n)$代入$y=x^2+4$，则$n=m^2+4$

$\therefore m-n=m-(m^2+4)=-\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{15}{4}$

$\because -1<0$，

$\therefore$当$m=\frac{1}{2}$时，有最大值，最大值为$-\frac{15}{4}$

故答案为：$-\frac{15}{4}$.

【点睛】本题考查二次函数的最值，能用含 m 的式子表示$m-n$是解题的关键.

【变式 5-2】（2023 春·江苏南通·九年级统考期中）已知二次函数$y=x^2-2x$，当$a\le x\le b$时，其最小值为-1，最大值为 3，则$b-a$的最大值是 ___________.

【答案】4

【分析】先根据$y=-1$和$y=3$，求出 x 的值，结合二次函数的性质，得当$-1\le x\le 3$时，函数的最小值为-1，最大值为 3，即可求出$b-a$的最大值是$3-(-1)=4$.