2023-2024学年河北省唐山市高三上学期五调考试数学

模拟试题

本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分.共4页，总分150分，考试时间120分钟.

第I卷（选择题共60分）

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知i为虚数单位，$a,b\in\mathbf{R}$，集合$A=\{z|\ z|=a+(2a-1)\mathrm{i}\},B=\{z\ \ z=b-2+b\mathrm{i}\}$，则$A\cap B=$（　　）

A. $\{2\mathrm{i}\}$　　B. $\{1+3\mathrm{i}\}$　　C. $\{3+5\mathrm{i}\}$　　D. $\{2+4\mathrm{i}\}$

2.已知等边三角形的边长为2，用斜二测画法画出该三角形的直观图，则所得直观图的面积为（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　B. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{6}$

3.已知$\vec{a}$为直线l的方向向量，$\vec{m},\vec{n}$分别为两个不同平面$\alpha\cdot\beta$的法向量，则下列说法正确的是（　　）

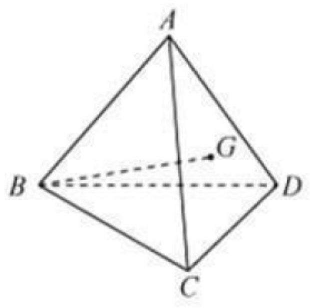
A.若$\vec{a}\perp\vec{m},\vec{m}\ //\ \vec{n}$，则$l\ //\ \beta$

B.若$\vec{a}\ //\ \vec{m},\vec{a}\ //\ \vec{n}$，则$\alpha\perp\beta$

C.若$\vec{a}\perp\vec{m},\vec{a}\perp\vec{n}$，则$\alpha\ //\ \beta$

D.若$\vec{a}\ //\ \vec{m},\vec{a}\perp\vec{n}$，则$\alpha\perp\beta$

4.如图，在四面体$ABCD$中，G为$\triangle ACD$的重心，若$\overrightarrow{BG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AD}$，则$x+y+z=$（　　）

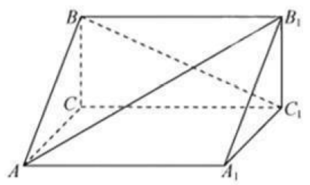


A. $-\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{2}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

5.已知两圆锥的底面积分别为$\frac{\pi}{16},\pi$，其侧面展开图中圆心角之和为$\frac{3\pi}{2}$，则两圆锥的母线长之和的最小值为（　　）

A.2 B. $\frac{5}{2}$ C.3 D. $\frac{7}{2}$

6.如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$BC\perp$平面$ACC_1A_1,CA=CC_1=2CB$，则异面直线BC_1与AB_1夹角的余弦值为（　　）



A. $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

7.已知棱长为6的正方体内有一个棱长为m的正四面体，且该正四面体可以在正方体内任意转动，则实数m的最大值为（　　）

A. $\sqrt{3}$ B.3 C. $2\sqrt{6}$ D. $3\sqrt{3}$

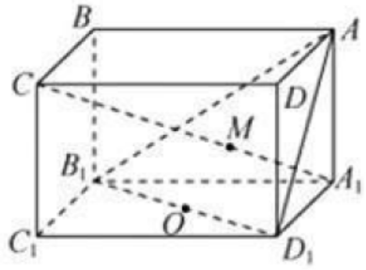
8.设$a=\ln 2,b=1.09,c=\mathrm{e}^{0.3}$，则（　　）

A. $a<b<c$ B. $a<c<b$

C. $c<a<b$ D. $c<b<a$

二、多选题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9.如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，O是B_1D_1的中点，直线A_1C交平面AB_1D_1于点M，则下列结论正确的是（　　）



A. B,B_1,O,M四点共面　　B. A,M,O,A_1四点共面

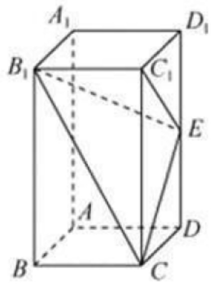
C. A,O,C,M四点共面　　D. A,M,O三点共线

10.已知函数$f\left(x\right)=\log_2\left(4^x+2^{x+1}+1\right)-\dfrac{1}{x^2+1}-x$，则（　　）

A. $f\left(x\right)$在区间$\left(-\infty,0\right)$上单调递增　　B. $f\left(x\right)$是偶函数

C. $f\left(x\right)$的最小值为 1　　D.方程$f\left(x\right)=2x$无解

11.如图，若长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的底面是边长为 2 的正方形，高为 4，E是DD_1的中点，则下列说法不正确的是（　　）



A. $B_1E\perp A_1B$

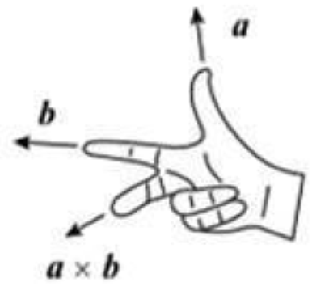
B.平面B_1CE // 平面A_1BD

C.三棱锥C_1-B_1CE的体积为$\dfrac{8}{3}$

D.三棱锥$C_1-B_1CD_1$的外接球的表面积为24π

12.在三维空间中，定义：$\vec{a}\times\vec{b}$叫做向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的外积，它是一个向量，满足下列两个条件：

①$\vec{a}\perp\left(\vec{a}\times\vec{b}\right),\vec{b}\perp\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$，且$\vec{a},\vec{b}$和$\vec{a}\times\vec{b}$构成右手系（即三个向量的方向依次与右手的拇指、食指、中指的指向一致，如图所示）；



②$\vec{a}\times\vec{b}$的模$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$（$\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle$表示向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角）.在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，以下四个结论，正确的是（　　）

A. $\left|\overrightarrow{AB_1}\times\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AD_1}\times\overrightarrow{DB}\right|$

B. $\overrightarrow{A_1C_1}\times\overrightarrow{A_1D}$与$\overrightarrow{BD_1}$共线

C. $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AB}$

D. $6\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{AC}\right|$与正方体表面积的数值相等

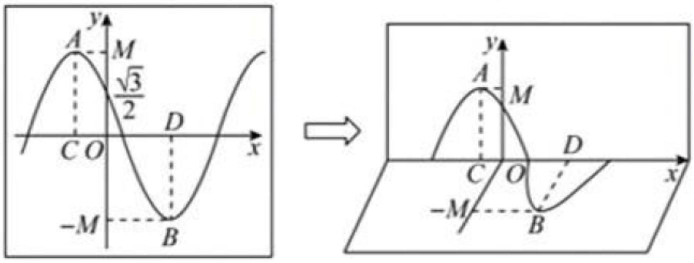
第 II 卷（非选择题共 90 分）

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

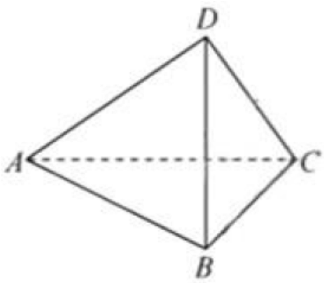
13.在空间直角坐标系中，$A\left(1,-2,a\right),B\left(0,3,1\right),C\left(b,-1,2\right)$，若$A,B,C$三点共线，则$ab=$_________.

14.在数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1=-1,a_2=0,a_{n+2}+a_n=a_{n+1}$，则$\sum_{i=1}^{2024}a_i=$_________.

15.如图，将绘有函数$f\left(x\right)=M\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\varphi\right)(M>0,0<\varphi<\pi)$部分图象的纸片沿$x$轴折成直二面角，若此时$A,B$两点之间的空间距离为$\sqrt{10}$，则$f\left(6\right)=$_________.



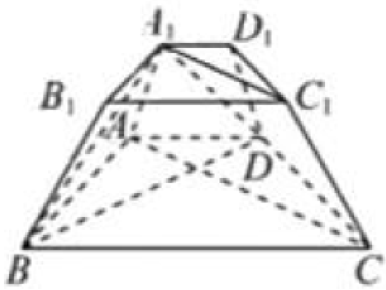
16.如图，已知四面体 $ABCD,\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 是边长为 2 的等边三角形，$CD=\sqrt{3},P$ 是该四面体表面及其内部的动点.若 $PA=PB,PC=PD$，则点 P 轨迹的长度为_________；若 P 在 $\triangle ABD$ 内（含边界）且 $PA\perp BC$，则点 P 轨迹的长度为_________.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

如图，在四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，上、下底面为等腰梯形，$AD\parallel BC,AB=\sqrt{10}$，$BC=2AD=4,A_1D_1=1,AA_1\perp BD$.



（1）证明：平面 $A_1ACC_1\perp$ 平面 $ABCD$；

（2）若 $AA_1=2,\angle A_1AC=45^\circ$，求点 C 到平面 A_1BD 的距离.

18.（12 分）

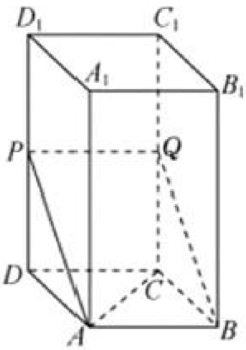
记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，已知 $\cos B=\tan A\sin B+\dfrac{c}{3a}$.

（1）证明：$c^2=a^2+2b^2$；

（2）若 $C=\dfrac{2\pi}{3},b=2$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

19.（12 分）

如图，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，侧棱 $AA_1\perp$ 底面 $ABCD$，过 AB 的截面与侧面 DD_1C_1C 交于 PQ，点 P 在棱 DD_1 上，点 Q 在棱 CC_1 上，且 $AB=1,AC=\sqrt{3},BC=2$.



（1）证明：$PQ \parallel D_1C_1$；

（2）若 P 为棱 DD_1 的中点，AP 与平面 DD_1C_1C 所成的角为 $\dfrac{\pi}{6}$，求侧棱 DD_1 的长.

20.（12 分）

已知函数 $f\left(x\right)=-x^2+x-\sin x-a\cos x$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（1）当 $0<a\leqslant 1$ 时，求 $f\left(x\right)$ 的极值；

（2）若不等式 $f\left(x\right)+x^2\leqslant 1$ 对任意 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 恒成立，求 a 的取值范围.

21.（12 分）

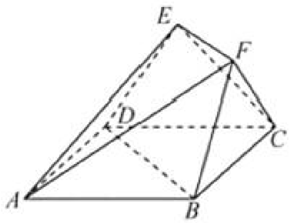
已知等比数列 $\left\{a_n\right\}$ 的公比 $q>1$，若 $a_2+a_3+a_4=14$，且 a_2,a_3+1,a_4 分别是等差数列 $\left\{b_n\right\}$ 的第 1，3，5 项.

（1）求数列 $\left\{a_n\right\}$ 和 $\left\{b_n\right\}$ 的通项公式；

（2）记 $c_n=\dfrac{b_n}{a_n}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

22.（12 分）

如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，平面 $ABCD$ 为正方形，$AB=2, AE=3, DE=\sqrt{5}$，二面角 $E-AD-C$ 的平面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，且 $EF \parallel BD$.



（1）证明：平面 $ABCD\perp$ 平面 DCE；

（2）若 $\overrightarrow{EF}=\lambda\overrightarrow{DB}(\lambda>0)$，求平面 ABF 与平面 CEF 所成锐二面角的余弦值的取值范围.

参考答案及解析

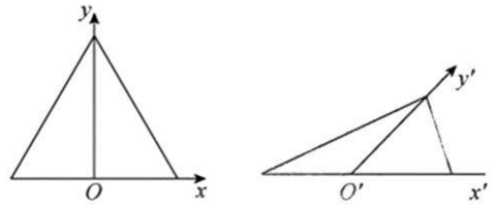
一、选择题

1.C　解析：由题得 $a+\left(2a-1\right)\mathrm{i}=b-2+b\mathrm{i}$，

所以 $\begin{cases}a=b-2,\\2a-1=b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=3,\\b=5.\end{cases}$ 所以 $A\cap B=\left\{3+5\mathrm{i}\right\}$.

2.B　解析：如图.等边三角形的高为 $\sqrt{3}$，根据斜二测画法的知识可知，

直观图的面积为 $\left(\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\times2=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.



3.D　解析：因为 $\vec{a}\perp\vec{m},\vec{m}\,//\,\vec{n}$，所以 $\vec{a}\perp\vec{n}$，则 $l\,//\,\beta$ 或 $l\subset\beta$，故 A 错误；

因为 $\vec{a}\,//\,\vec{m},\vec{a}\,//\,\vec{n}$，所以 $\vec{m}\,//\,\vec{n}$，所以 $\alpha\,//\,\beta$，故 B 错误；

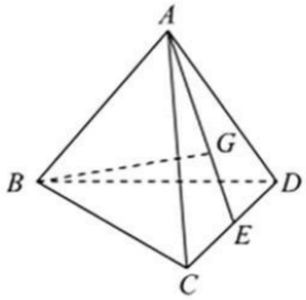
因为 $\vec{a}\perp\vec{m},\vec{a}\perp\vec{n}$，所以 $\vec{m},\vec{n}$ 可能平行，也可能不平行，所以 $\alpha\,//\,\beta$ 或 α,β 相交，故 C 错误；

因为 $\vec{a}\,//\,\vec{m},\vec{a}\perp\vec{n}$，所以 $\vec{m}\perp\vec{n}$，所以 $\alpha\perp\beta$，故 D 正确.

4.A　解析：如图，连接 AG 并延长交 CD 于点 E.则 E 为 CD 的中点，

所以 $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AG}=-\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right)=-\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，所

以 $x-y+z=-\frac{1}{3}$.



5.C　解析：设两圆锥的侧面展开图的圆心角分别为 α，β，母线长分别为 m,n，

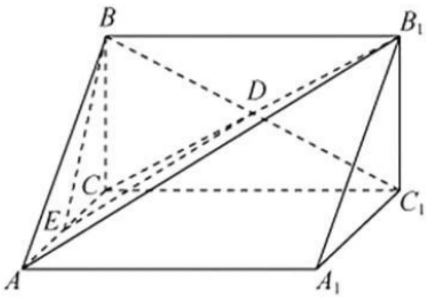
由题知两个圆锥的底面半径分别为 $\frac{1}{4}$，1，所以 $\alpha=\frac{\pi}{2m},\beta=\frac{2\pi}{n}$，

所以 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2m}+\frac{2\pi}{n}=\frac{3\pi}{2}$，即 $\frac{1}{m}+\frac{4}{n}=3$，所以

$$m+n=\frac{1}{3}(m+n)\left(\frac{1}{m}+\frac{4}{n}\right)=\frac{1}{3}\left(5+\frac{n}{m}+\frac{4m}{n}\right)\geq\frac{1}{3}\left(5+2\sqrt{\frac{n}{m}\times\frac{4m}{n}}\right)=3,$$

当且仅当 $m=1,n=2$ 时等号成立.

6.C　解析：如图，连接 CB_1 交 BC_1 于 D，取 AC 的中点 E，连接 BE,ED，



由 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直棱柱，各侧面四边形为矩形，易知 D 是 CB_1 的中点，所以 $ED\parallel AB_1$，故异面直线 BC_1 与 AB_1 的夹角即为 ED 与 BC_1 的夹角 $\angle BDE$ 或其补角.设 $BC=1$.则

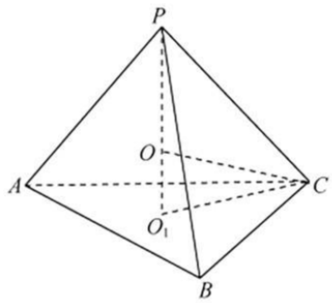
$CE=1,BD=CD=\frac{\sqrt{5}}{2},BC\perp$ 平面 $ACC_1A_1,EC\subset$ 平面 ACC_1A_1，则 $CB\perp CE$，又 $EC\perp CC_1,BC\cap CC_1=C,BC,CC_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，故 $EC\perp$ 平面 BCC_1B_1，又 $CD\subset$ 平

面 BCC_1B_1，所以 $CE\perp CD$.所以 $ED=\sqrt{CD^2+CE^2}=\frac{3}{2},BE=\sqrt{CB^2+CE^2}=\sqrt{2}$，在

$\triangle BDE$ 中，

$$\cos\angle BDE=\frac{BD^2+ED^2-BE^2}{2BD\cdot ED}=\frac{\frac{5}{4}+\frac{9}{4}-2}{2\times\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

7.C　解析：由题意知，当正四面体在正方体的内切球内时，正四面体可以在正方体内任意转动，故当该正四面体内接于球时，其棱长最长.因为正方体的棱长为 6，则其内切球的半径为 3，如图所示，



设正四面体为 $P-ABC,O_1$ 为底面 $\triangle ABC$ 的中心，设正四面体外接球的球心为 O，连接 PO_1,O_1C,OC，则 $PO_1\perp$ 平面

$ABC,O_1C=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}m=\frac{\sqrt{3}}{3}m,O_1P=\sqrt{PC^2-O_1C^2}=\sqrt{m^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}m\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}m$.又

$OP=OC=3$，所以在 $Rt\triangle OO_1C$ 中，$\left(\frac{\sqrt{6}}{3}m-3\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}m\right)^2=9$，解得 $m=2\sqrt{6}$.

8.A　解析：$a=\ln2-\ln e=1<b,c=e^{0.3}>e^0=1>a$.令 $f(x)=e^x-x^2-1$，则 $f'(x)=e^x-2x$，令 $g(x)=e^x-2x$，则 $g'(x)=e^x-2$.当 $x\in(-\infty,\ln2)$ 时，$g'(x)<0,f'(x)$ 单调递减；当 $x\in(\ln2,+\infty)$ 时，$g'(x)>0,f'(x)$ 单调递增，所以 $f'(x)\geqslant f'(\ln2)=2(1-\ln2)>0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $f(0.3)>f(0)=0$，即 $e^{0.3}>1.09$，所以 $c>b$.综上，$a<b<c$.

二、多选题

9.BCD　解析：对于 A，如图.连接 AO,A_1C_1,AC.

在长方形 $A_1B_1C_1D_1$ 中，由 O 为对角线 B_1D_1 的中点，则 $A_1C_1\cap B_1D_1=O$，则平面 $ACC_1A_1\cap$ 平面 $AB_1D_1=AO$，由 $M\in$ 平面 $AB_1D_1, M\in A_1C\subset$ 平面 ACC_1A_1，得 $M\in AO$.在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$BB_1\subset$ 平面 ABB_1A_1，因为 $AO\cap$ 平面 $ABB_1A_1=A$，所以 BB_1 与 MO 异面，故 A 错误；对于 B，由选项 A 可知，$M\in AO, A_1C_1\cap B_1D_1=O$，易知 $A,M,O,A_1\subset$ 平面 ACC_1A_1，故 B 正确；对于 C，由选项 A 可知，$M\in AO, A_1C_1\cap B_1D_1=O$，易知 $A,M,O,C\subset$ 平面 ACC_1A_1，故 C 正确；对于 D，由选项 A 可知，$M\in AO$.故 D 正确.

10.BC　解析：因为

$f\left(x\right)=\log_2\left(4^x+2^{x+1}+1\right)-\log_2 2^x-\dfrac{1}{x^2+1}=\log_2\left(2^x+2^{-x}+2\right)-\dfrac{1}{x^2+1}$，所以

$f\left(-x\right)=\log_2\left(2^x+2^{-x}+2\right)-\dfrac{1}{x^2+1}=f\left(x\right)$，所以 $f\left(x\right)$ 为偶函数，B 正确；令 $t=2^x$，当 $x<0$ 时，函数

$y=\log_2\left(2^x+2^{-x}+2\right)$ 与 $y=-\dfrac{1}{x^2+1}$ 均为减函数，所以 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(-\infty,0\right)$ 上单调递减，A 错误；由偶函数对称性可知，$f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f\left(0\right)=1$，$C$ 正确；令 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-2x$，所以

$g(0)=1>0, g(1)=\log_2\dfrac{9}{8}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\log_2\dfrac{81}{64}-1\right)<0$，由零点存在定理可知方程 $f\left(x\right)=2x$ 有解，D 错误.

11.AB　解析：如图，建立空间直角坐标系，