

## 第 03 讲 6.2.3 组合+6.2.4 组合数

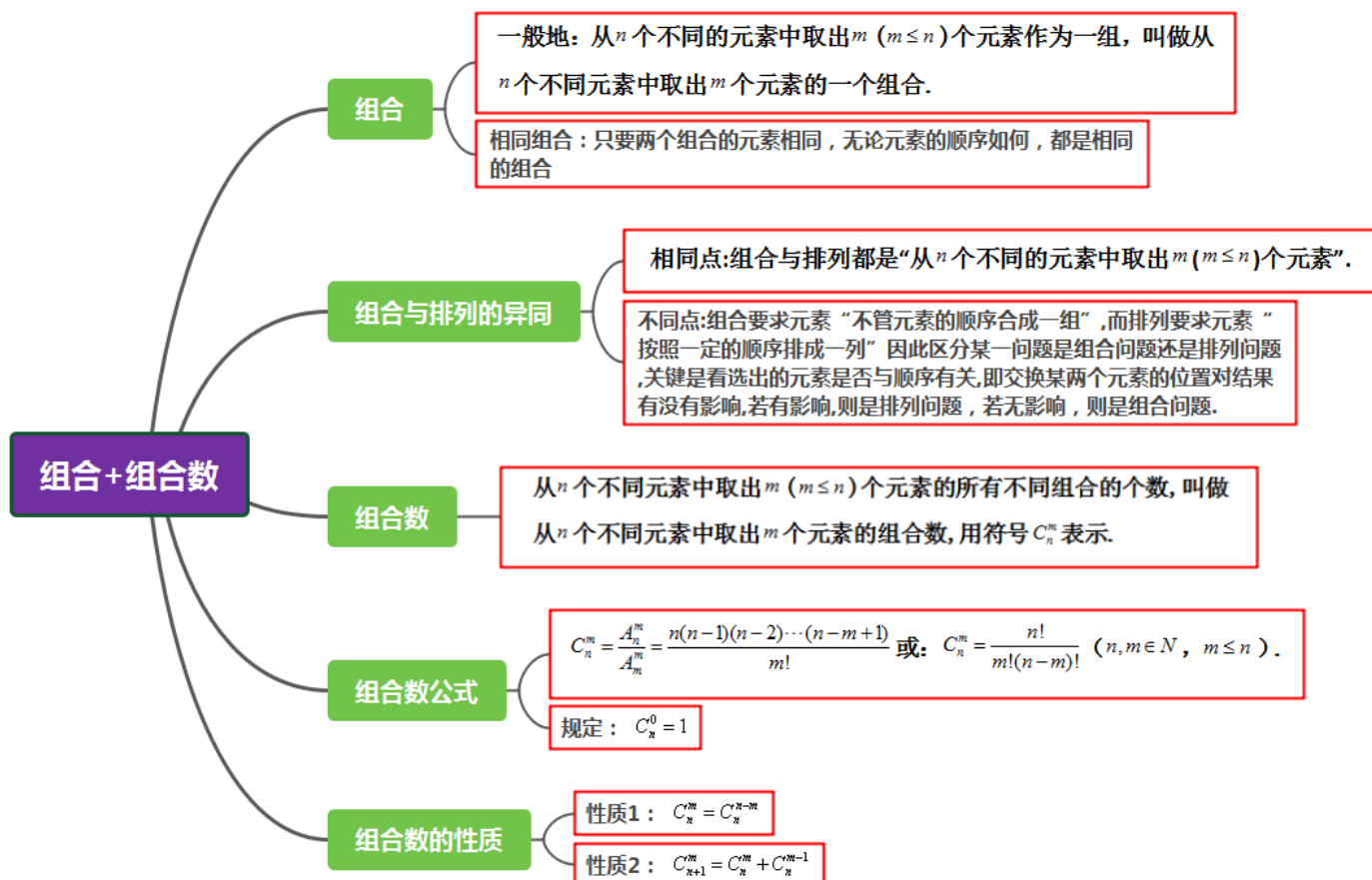
### 01

### 学习目标

| 课程标准                                                                                                                                                     | 学习目标                                                                 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| <p>①了解组合、组合数的意义。</p> <p>②掌握常见的组合处理方法。</p> <p>③会用组合的相关方法解决简单的组合问题。</p> <p>④熟练运用组合数的相关公式及性质解决与组合有关的问题。</p> <p>⑤在实际问题中能区分排列与组合的关系，准确选择恰当的方法解决排列组合的相关问题。</p> | <p>1.掌握组合、组合数的意义；</p> <p>2.能解决简单的组合问题；</p> <p>3.并能解决简单的排列组合综合问题；</p> |

### 02

### 思维导图



### 知识点 01: 组合

(1) 定义: 一般地: 从  $n$  个不同的元素中取出  $m$  ( $m \leq n$ ) 个元素作为一组, 叫做从  $n$  个不同元素中取出  $m$  个元素的一个组合.

(2) 相同组合: 只要两个组合的元素相同, 无论元素的顺序如何, 都是相同的组合.

#### (3) 组合与排列的异同

相同点: 组合与排列都是“从  $n$  个不同的元素中取出  $m$  ( $m \leq n$ ) 个元素”.

不同点: 组合要求元素“不管元素的顺序合成一组”, 而排列要求元素“按照一定的顺序排成一列”. 因此区分某一问题是组合问题还是排列问题, 关键是看选出的元素是否与顺序有关, 即交换某两个元素的位置对结果有没有影响, 若有影响, 则是排列问题, 若无影响, 则是组合问题.

### 知识点 02: 组合数与组合数公式

(1) 组合数的定义: 从  $n$  个不同元素中取出  $m$  ( $m \leq n$ ) 个元素的所有不同组合的个数, 叫做从  $n$  个不同元素中取出  $m$  个元素的组合数, 用符号  $C_n^m$  表示.

(2) 组合数公式

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} \text{ 或: } C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (n, m \in \mathbf{N}, m \leq n).$$

规定:  $C_n^0 = 1$

【即学即练 1】(2023 上·高二课时练习) 计算:

(1)  $C_{15}^3$ ;      (2)  $C_8^3 - C_7^3$ ;      (3)  $C_{200}^{198}$ .

【答案】(1)455      (2)21      (3)19900

【详解】(1)  $C_{15}^3 = \frac{15!}{3!(15-3)!} = \frac{15 \times 14 \times 13}{6} = 455$ ;

(2)  $C_8^3 - C_7^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} - \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{6} - \frac{7 \times 6 \times 5}{6} = 21$ ;

(3)  $C_{200}^{198} = \frac{200!}{198!(200-198)!} = \frac{200 \times 199}{2} = 19900$

### 知识点 03: 组合数的性质

(1) 性质 1:  $C_n^m = C_n^{n-m}$

(2) 性质 2:  $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$

【即学即练 2】(2022 下·广东梅州·高二校考阶段练习) 已知  $C_{n+1}^7 = C_n^7 + C_n^8$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ), 则  $n = ( \quad )$

A. 14

B. 15

C. 13

D. 12

【答案】A

【详解】由组合数性质知， $C_n^7 + C_n^8 = C_{n+1}^8$ ，

所以  $C_{n+1}^7 = C_{n+1}^8$ ，

所以  $7+8 = n+1$ ，得  $n=14$ 。

故选：A。

【即学即练3】（多选）（2023上·辽宁·高二校联考阶段练习）满足方程  $C_{16}^{x^2-x} = C_{16}^{5x-5}$  的  $x$  值为（ ）

A. 1

B. 3

C. 5

D. 7

【答案】AB

【详解】因为  $C_n^m = C_n^{n-m}$ ，所以  $x^2 - x = 5x - 5$  或  $x^2 - x + 5x - 5 = 16$

解得： $x=1$  或  $x=5$  或  $x=-7$  或  $x=3$ ，

当  $x=5$  时， $5x-5=20>16$ ，故舍去；

当  $x=-7$  时， $5x-5=-40<0$ ，故舍去；

当  $x=1$  时， $x^2-x=5x-5=0$ ；

当  $x=3$  时， $x^2-x=6, 5x-5=10$ ；

故选：AB

## 04

## 题型精讲

### 题型 01 组合的概念

【典例1】（2023下·新疆乌鲁木齐·高二乌鲁木齐市第六十八中学校考期中）下列四个问题属于组合问题的是（ ）

A. 从4名志愿者中选出2人分别参加导游和翻译的工作

B. 从1、2、3、4这4个数字中选取3个不同的数字排成一个三位数

C. 从全班同学中选出3名同学参加学校运动会开幕式

D. 从全班同学中选出2名同学分别担任班长、副班长

【答案】C

【详解】对于A选项，从4名志愿者中选出2人分别参加导游和翻译的工作，将2人选出后，还要安排导游或翻译的工作，与顺序有关，这个问题为排列问题；

对于B选项，从1、2、3、4这4个数字中选取3个不同的数字排成一个三位数，选出三个数字之后，还要将这三个数安排至个位、十位、百位这三个数位，

与顺序有关，这个问题为排列问题；

对于C选项，从全班同学中选出3名同学参加学校运动会开幕式，只需将三名同学选出，与顺序无关，这个问题为组合问题；

对于 D 选项，从全班同学中选出 2 名同学分别担任班长、副班长，  
将 2 人选出后，还要安排至班长、副班长两个职务，与顺序有关，这个问题为排列问题。  
故选：C.

【典例 2】（多选）（2023 下·河北石家庄·高二校考阶段练习）下列问题是组合问题的是（ ）

- A. 把 5 本不同的书分给 5 个学生，每人一本
- B. 从 7 本不同的书中取出 5 本给某个同学
- C. 10 个人相互发一微信，共发几次微信
- D. 10 个人互相通一次电话，共通了几次电话

【答案】BD

【详解】A. 因为书不同，每个同学拿到的也不同，与顺序有关，故不是组合问题；  
B. 从 7 本不同的书中取出 5 本给某个同学，每种取法中取出的书不考虑顺序，故是组合问题；  
C. 10 个人相互发一微信，与顺序有关，故不是组合问题；  
D. 因为互相通一次电话与顺序无关，故是组合问题；

故选：BD

【典例 3】（多选）（2023 下·高二单元测试）下列是组合问题的是（ ）

- A. 平面上有 5 个点，其中任意三个点不共线，这 5 个点最多可确定多少条直线？
- B. 10 支球队以单循环进行比赛（每两队比赛一次），共进行多少场次？
- C. 从 10 个人中选出 3 个为代表去开会，有多少种选法？
- D. 从 10 个人中选出 3 个为不同学科的课代表，有多少种选法？

【答案】ABC

【详解】A 是组合问题，因为两点确定一条直线，与点的顺序无关；  
B 是组合问题，因为每两个队比赛一次，并不需要考虑谁先谁后，没有顺序的区别；  
C 是组合问题，因为三个代表之间没有顺序的区别；  
D 是排列问题，因为三个人中，担任哪一科的课代表是有顺序区别的。

故选：ABC.

【典例 4】（2022·高二课时练习）判断下列问题是组合问题还是排列问题.

- (1) 若集合  $A = \{a, b, c, d\}$ ，则集合 A 的含有 3 个元素的子集有多少个？
- (2) 某铁路线上有 4 个车站，则这条铁路上需准备多少种车票？
- (3) 从 7 本不同的书中取出 5 本给某同学；
- (4) 三个人去做 5 种不同的工作，每人做 1 种，有多少种分工方法？
- (5) 把 3 本相同的书分给 5 个学生，每人最多得一本，有多少种分配方法？

【答案】(1) 组合问题 (2) 排列问题 (3) 组合问题  
(4) 排列问题 (5) 组合问题

【详解】(1) 因为集合 A 的任一个含 3 个元素的子集与元素顺序都无关，所以它是组合问题.

- (2) 因为车票与起点、终点顺序有关, 例如“甲 $\rightarrow$ 乙”与“乙 $\rightarrow$ 甲”的车票不同, 所以它是排列问题.
- (3) 因为从 7 本不同的书中取出 5 本给某同学, 取出的 5 本书并不考虑书的顺序, 所以它是组合问题.
- (4) 因为从 5 种不同的工作中选出 3 种, 按一定顺序分给三个人去做, 所以它是排列问题.
- (5) 因为 3 本书是相同的, 把这 3 本书无论分给哪三个人都不需要考虑顺序, 所以它是组合问题.

**【变式 1】** (2022 下·黑龙江齐齐哈尔·高二龙江县第一中学校考阶段练习) 下面问题中, 是排列问题的是 ( )

- A. 由 1, 2, 3 三个数字组成无重复数字的三位数
- B. 从 40 人中选 5 人组成篮球队
- C. 从 100 人中选 2 人抽样调查
- D. 从 1, 2, 3, 4, 5 中选 5 个数组成集合

**【答案】** A

**【详解】**解: 对于 A, 由 1, 2, 3 三个数字组成无重复数字的三位数, 则共有  $A_3^3$  种排法, 是排列问题;

对于 B, 从 40 人中选 5 人组成篮球队, 有  $C_{40}^5$  种选法, 是组合问题;

对于 C, 从 100 人中选 2 人抽样调查, 有  $C_{100}^2$  种选法, 是组合问题;

对于 D, 从 1, 2, 3, 4, 5 中选 5 个数组成集合, 有  $C_5^5$  种选法, 是组合问题.

故选: A.

**【变式 2】** (2023 上·高二课时练习) 判断下列问题分别是排列问题还是组合问题:

- (1) 从 10 名学生中任选 5 名去参观一个展览会, 求有多少种不同的选法;
- (2) 从 1、2、3、4、5 这 5 个数字中, 每次任取 2 个不同的数作为一个点的坐标, 求所有不同点的个数;
- (3) 一个黄袋中装有四张分别写有 1、3、5、7 的卡片, 另一个红袋中装有四张分别写有 2、8、16、32 的卡片. 从红袋和黄袋中各任取一张卡片, 问这两张卡片上的数相加所得的和有多少种;
- (4) 有四本不同的书要分别送给四个人, 每人一本, 问一共有多少种不同的送法.

**【答案】** (1) 组合问题 (2) 排列问题 (3) 组合问题 (4) 排列问题

**【详解】** (1) 从 10 名学生中任选 5 名去参观一个展览会, 选出的学生不用排序, 所以这是组合问题.

(2) 从 1、2、3、4、5 这 5 个数字中, 每次任取 2 个不同的数作为一个点的坐标, 由于坐标有横纵坐标之分, 所以选出的 2 个不同的数需要排序, 故这是排列问题.

(3) 从红袋和黄袋中各任取一张卡片, 求这两张卡片上的数相加所得的和, 因为加法满足交换律, 故选出的卡片不用排序, 所以这是组合问题.

(4) 因为四本不同的书送给四个人, 要求每人一本,

所以这四本书需要排序，故这是排列问题.

【变式 3】（2023 下·高二课时练习）判断下列问题是组合问题还是排列问题：

(1) 某铁路线上有 4 个车站，则这条铁路线上共需准备多少种车票？

(2) 把 5 本不同的书分给 5 个学生，每人一本；

(3) 从 7 本不同的书中取出 5 本给某个学生.

【答案】(1) 排列问题 (2) 排列问题 (3) 组合问题

【详解】(1) 因为一种火车票与起点、终点顺序有关，如甲→乙和乙→甲的车票是不同的，所以它是排列问题.

(2) 由于书不同，每人每次拿到的书也不同，有顺序之分，因此它是排列问题.

(3) 从 7 本不同的书中，取出 5 本给某个学生，在每种取法中取出的 5 本并不考虑书的顺序，故它是组合问题.

## 题型 02 组合数的计算、化简与证明

【典例 1】（2024·全国·高三专题练习） $5A_5^2 + 4C_4^2 = ( \quad )$

A. 74

B. 98

C. 124

D. 148

【答案】C

【详解】 $5A_5^2 + 4C_4^2 = 5 \times 5 \times 4 + 4 \times \frac{4 \times 3}{2} = 124$ .

故选：C.

【典例 2】（多选）（2024 上·吉林·高二长春市第二实验中学联考期末）下列有关排列数、组合数的等式中，正确的是 ( )

A.  $C_n^m = \frac{A_n^m}{n!}$

B.  $C_n^m = C_n^{n-m}$

C.  $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$

D.  $2^n = C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n$

【答案】BC

【详解】A 选项， $C_n^m = \frac{A_n^m}{m!}$ ，A 错误；

B 选项，根据组合公式得到  $C_n^m = C_n^{n-m}$ ，B 正确；

C 选项， $C_{n+1}^{m+1} = \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m)!}$ ,  $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ ,  $C_n^{m+1} = \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}$ ,

$$C_n^m + C_n^{m+1} = \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} = \frac{n!(m+1+n-m)}{(m+1)!(n-m)!} = \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m)!},$$

故  $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$ ，C 正确；

D 选项， $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n$ ，D 错误.

故选：BC

【典例 3】（2023 下·新疆乌鲁木齐·高二乌鲁木齐市第六十八中学校考期中）（1）计算： $\frac{4A_8^4 + 2A_8^5}{A_8^8 - A_9^5}$ ；

（2）证明： $C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = C_n^m \cdot C_m^k$ 。

【答案】（1） $\frac{4}{5}$ ；（2）证明见解析。

【分析】（1）利用排列数公式可求得所求代数式的值；

（2）利用组合数公式可证得结论成立。

【详解】（1） $\frac{4A_8^4 + 2A_8^5}{A_8^8 - A_9^5} = \frac{4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 + 2 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}{8! - 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9} = \frac{4+8}{24-9} = \frac{4}{5}$ ；

（2）证明： $C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!} = \frac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!}$ ，

$$C_n^m \cdot C_m^k = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!}，$$

因此， $C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = C_n^m \cdot C_m^k$ 。

【变式 1】（多选）（2023 下·河北石家庄·高二石家庄市第十八中学校考阶段练习）下列等式中，正确的是（ ）

A.  $\frac{n!}{n(n-1)} = (n-2)!$

B.  $A_n^m = \frac{n!}{m!}$

C.  $(n+1)A_n^m = A_{n+1}^{m+1}$

D.  $mC_n^m = nC_{n-1}^{m-1}$

【答案】ACD

【详解】A:  $\frac{n!}{n(n-1)} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots 1}{n(n-1)} = (n-2)!$ ，正确；

B:  $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \neq \frac{n!}{m!}$ ，错误；

C:  $(n+1)A_n^m = \frac{(n+1) \cdot n!}{(n-m)!} = \frac{(n+1)!}{[n+1-(m+1)]!} = A_{n+1}^{m+1}$ ，正确；

D:  $mC_n^m = \frac{m \cdot n!}{m!(n-m)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(m-1)![(n-1)-(m-1)]!} = nC_{n-1}^{m-1}$ ，正确；

故选：ACD

【变式 2】（2023 上·江西南昌·高二南昌十中校考期中）（1）计算： $\frac{4A_8^4 + 2A_8^5}{A_8^8 - A_9^5}$ ；

（2）求值： $C_n^{5-n} + C_{n+1}^{9-n}$ 。

【答案】（1） $\frac{4}{5}$ ；（2）5 或 16

【详解】(1)  $\frac{4A_8^4 + 2A_8^5}{A_8^8 - A_9^5} = \frac{4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 + 2 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}{8! - 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9} = \frac{4+8}{24-9} = \frac{4}{5};$

(2) 由组合数的定义知:  $\begin{cases} 0 \leq 5-n \leq n \\ 0 \leq 9-n \leq n+1 \end{cases}$ , 解得  $4 \leq n \leq 5$ , 又  $n \in \mathbf{N}^*$ ,

$\therefore n=4$  或  $n=5$ .

当  $n=4$  时  $C_n^{5-n} + C_{n+1}^{9-n} = C_4^1 + C_5^5 = 5$ ;

当  $n=5$  时  $C_n^{5-n} + C_{n+1}^{9-n} = C_5^0 + C_6^4 = 16$ .

所以  $C_n^{5-n} + C_{n+1}^{9-n}$  的值为 5 或 16.

【变式 3】(2023 上·高二课时练习)  $m$  是自然数,  $n$  为正整数, 且  $m+1 \leq n$ , 求证:  $C_n^m = \frac{m+1}{n-m} C_n^{m+1}$ .

【答案】证明见解析

【详解】根据组合数公式, 可以得到  $\frac{m+1}{n-m} C_n^{m+1} = \frac{m+1}{n-m} \cdot \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m$ .

### 题型 03 组合数方程与不等式

【典例 1】(2023 上·河南驻马店·高二统考期末) 关于  $x$  的方程  $C_{11}^{2x} = C_{11}^{3x-4}$  的解为 ( )

- A.  $x=3$       B.  $x=4$       C.  $x=3$  且  $x=4$       D.  $x=3$  或  $x=4$

【答案】D

【详解】因为  $C_{11}^{2x} = C_{11}^{3x-4}$ , 则  $2x = 3x-4$  或  $2x+3x-4=11$ , 解得  $x=4$  或  $x=3$ ,

若  $x=4$ , 可得  $C_{11}^8 = C_{11}^8$ , 符合题意;

若  $x=3$ , 可得  $C_{11}^6 = C_{11}^5$ , 符合题意;

综上所述:  $x=3$  或  $x=4$ .

故选: D.

【典例 2】(2023 上·山东德州·高二校考阶段练习) (1) 解关于  $x$  的不等式  $A_8^x < 6A_8^{x-2}$ .

(2) 求等式  $\frac{C_{n-1}^5 + C_{n-3}^3}{C_{n-3}^3} = \frac{19}{5}$  中的  $n$  值.

【答案】(1)  $x=8$ ; (2)  $n=9$ .

【详解】(1) 由  $A_8^x < 6A_8^{x-2}$ , 得  $3 \leq x \leq 8, x \in \mathbf{N}^*$ ,  $8 \times 7 \times \cdots \times (8-x+1) < 6 \times 8 \times 7 \times \cdots \times (8-x+3)$ ,

于是  $(8-x+2)(8-x+1) < 6$ , 整理得  $x^2 - 19x + 84 < 0$ , 解得  $7 < x < 12$ ,

所以  $x=8$ .

(2) 原方程变形为  $\frac{C_{n-1}^5}{C_{n-3}^3} + 1 = \frac{19}{5}$ , 即  $C_{n-1}^5 = \frac{14}{5} C_{n-3}^3$ , 显然  $n \geq 6, n \in \mathbf{N}^*$ ,

因此  $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{5!} = \frac{14}{5} \cdot \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{3!}$ ,

化简整理, 得  $n^2 - 3n - 54 = 0$ , 而  $n \geq 6$ , 解得  $n=9$ ,

所以  $n=9$ .

【典例 3】(2024·全国·高三专题练习) (1) 解不等式  $A_6^x < 4A_6^{x-2}$ .

(2) 若  $C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 + \dots + C_n^2 = 55$ , 求正整数  $n$ .

【答案】(1)  $\{6\}$ ; (2)  $n=7$ .

【详解】(1) 由  $A_6^x < 4A_6^{x-2}$ , 可得 
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 6 \\ 0 \leq x-2 \leq 6, \text{ 可得 } 2 \leq x \leq 6, x \in \mathbf{N} \\ x \in \mathbf{N} \end{cases}$$

可得  $\frac{6!}{(6-x)!} < 4 \times \frac{6!}{(8-x)!}$ ,

所以  $\frac{4}{(8-x)(7-x)} > 1$ , 即  $x^2 - 15x + 52 < 0$ ,

因为  $2^2 - 15 \times 2 + 52 > 0$ ,  $3^2 - 15 \times 3 + 52 > 0$ ,  $4^2 - 15 \times 4 + 52 > 0$ ,

$5^2 - 15 \times 5 + 52 > 0$ ,  $6^2 - 15 \times 6 + 52 < 0$ ,

所以  $x=6$ ;

$$\begin{aligned} (2) & C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 + \dots + C_n^2 \\ &= C_3^3 + C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 + \dots + C_n^2 - 1 \\ &= C_4^3 + C_4^2 + C_5^2 + \dots + C_n^2 - 1 \\ &= C_5^3 + C_5^2 + \dots + C_n^2 - 1 \\ &= C_{n+1}^3 - 1 = 55, \end{aligned}$$

故  $C_{n+1}^3 = 56 = C_8^3$ , 解得  $n=7$ .

【变式 1】(2023 上·高二课时练习) 不等式  $C_{10}^{n-3} < C_{10}^{n-2}$  的解为\_\_\_\_\_.

【答案】 $\{3, 4, 5, 6, 7\}$

【详解】依题意 
$$\begin{cases} 0 \leq n-3 \leq 10 \\ 0 \leq n-2 \leq 10 \end{cases}$$
, 所以  $3 \leq n \leq 12$  且  $n \in \mathbf{N}^*$ ,

由  $C_{10}^{n-3} < C_{10}^{n-2}$  得  $\frac{10!}{(n-3)! \times (13-n)!} < \frac{10!}{(n-2)! \times (12-n)!}$ ,

$$\frac{1}{13-n} < \frac{1}{n-2}, n-2 < 13-n, 3 \leq n < 7.5,$$

所以不等式的解为  $\{3, 4, 5, 6, 7\}$ .

故答案为:  $\{3, 4, 5, 6, 7\}$

【变式 2】(2023 下·河北石家庄·高二校考阶段练习) 若  $C_8^{m-1} > 3C_8^m$ , 求  $m$ .

【答案】7 或 8

【详解】依题意, 得  $0 \leq m-1 \leq 8$  且  $0 \leq m \leq 8$ , 所以  $1 \leq m \leq 8$ ,

由  $C_8^{m-1} > 3C_8^m$ ，可得  $\frac{8!}{(m-1)!(9-m)!} > \frac{3 \times 8!}{m!(8-m)!}$ ，即  $\frac{1}{9-m} > \frac{3}{m}$ ，解得  $\frac{27}{4} < m \leq 8$ ，

又因为  $m \in \mathbb{N}$ ，所以  $m=7$  或  $m=8$ 。

【变式3】（2024 上·辽宁沈阳·高二校联考期末）（1）已知  $C_6^m = C_6^{3m-2} (m \neq 1)$ ，计算  $C_6^m + C_6^{m+1} + C_7^{m+2} + C_8^{m+3}$ ；

（2）解方程： $3C_{x-3}^{x-7} = 5A_{x-4}^2$ 。

【答案】（1）126；（2） $x=11$ 。

【详解】（1）因为  $C_6^m = C_6^{3m-2} (m \neq 1)$ ，则  $m+3m-2=6$ ，解得  $m=2$ ，经验证符合题意，

所以  $C_6^m + C_6^{m+1} + C_7^{m+2} + C_8^{m+3} = C_7^{m+1} + C_7^{m+2} + C_8^{m+3}$

$= C_8^{m+2} + C_8^{m+3} = C_9^{m+3} = C_9^5 = 126$ 。

（2）由  $3C_{x-3}^{x-7} = 5A_{x-4}^2$ ，得  $3 \cdot \frac{(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)}{4!} = 5(x-4)(x-5)$ ，

即  $(x-3)(x-6) = 40$ ，而由  $3C_{x-3}^{x-7} = 5A_{x-4}^2$ ，知  $x \geq 7, x \in \mathbb{N}^*$ ，解得  $x=11$ ，

所以原方程的解为  $x=11$ 。

## 题型 04 组合数的性质及其应用

【典例1】（2023 下·甘肃白银·高二统考开学考试） $C_6^2 + C_6^3 + C_7^4 + C_8^5 + C_9^6 = ( )$

A. 84

B. 120

C. 126

D. 210

【答案】D

【详解】因为  $C_n^{m-1} + C_n^m = C_{n+1}^m$ ，

所以  $C_6^2 + C_6^3 + C_7^4 + C_8^5 + C_9^6 = C_7^3 + C_7^4 + C_8^5 + C_9^6 = C_8^4 + C_8^5 + C_9^6 = C_9^5 + C_9^6 = C_{10}^6 = 210$ 。

故选：D

【典例2】（2023 下·山东济宁·高二统考期中）若  $C_9^3 = C_9^x$ ，则  $x$  的值为 ( )

A. 3

B. 6

C. 9

D. 3 或 6

【答案】D

【详解】因为  $C_9^3 = C_9^x$ ，所以  $x=3$  或  $3+x=9$ ，解得  $x=3$  或  $x=9$ 。经检验符合题意

故选：D

【典例3】（多选）（2023 下·江苏南京·高二南京师大附中校考期中）若  $C_8^{2x-1} = C_7^{x-1} + C_7^x$ ，则正整数  $x$  的值是 ( )

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】AC

【详解】因为  $C_7^{x-1} + C_7^x = C_8^x$ ，所以  $C_8^{2x-1} = C_8^x$ ，即  $2x-1=x$  或  $2x-1+x=8$ ，

解得  $x=1$  或  $3$ ，经检验均满足要求。

故选：AC

【典例 4】（2023 下·河北邢台·高二邢台一中校考阶段练习）若  $C_{20}^{2n+6} = C_{20}^{n+2}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ )，则  $n =$ \_\_\_\_\_.

【答案】4

【详解】由题意可知  $2n+6=20-(n+2)$ ，解得  $n=4$ ，

或  $2n+6=n+2$ ，解得  $n=-4$ ，舍去，

综上： $n=4$ 。

故答案为：4

【变式 1】（2023 下·江苏徐州·高二徐州高级中学校考期中）若  $C_{n+1}^6 - C_n^6 = C_n^7$ ，则  $n$  的值为（ ）

A. 10

B. 11

C. 12

D. 13

【答案】C

【详解】若  $C_{n+1}^6 - C_n^6 = C_n^7$ ，则  $C_{n+1}^6 = C_n^6 + C_n^7 = C_{n+1}^7$ ，

所以  $n+1=6+7=13$ ，解得  $n=12$ 。

故选：C.

【变式 2】（多选）（2023 下·山西运城·高二统考期中）若  $C_{21}^{m+2} = C_{21}^{2m-5}$ ，则  $m$  的值可以是（ ）

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

【答案】BC

【详解】因为  $C_{21}^{m+2} = C_{21}^{2m-5}$ ，所以  $m+2=2m-5$  或  $m+2+2m-5=21$ ，解得  $m=7$  或  $8$ 。

故选：BC

【变式 3】（2023 上·福建龙岩·高二校考阶段练习）若  $C_n^{10} = C_n^9$ ，则  $C_{21}^n$  的值为\_\_\_\_\_.

【答案】210

【详解】由  $C_n^{10} = C_n^9$ ，

$$\therefore \frac{n!}{10!(n-10)!} = \frac{n!}{9!(n-9)!}, \text{ 即 } 10 = n-9,$$

$$\therefore n = 19,$$

$$C_{21}^n = \frac{21 \times 20}{2} = 210,$$

故答案为：210.

## 题型 05 有限制条件的组合问题

【典例 1】（2024·全国·高三专题练习）用 2 个 0，2 个 1 和 1 个 2 组成一个五位数，则这样的五位数有（ ）

A. 8 个

B. 12 个

C. 18 个

D. 24 个

【答案】C

【详解】当首位为 2 时，这样的五位数有  $\frac{A_4^4}{A_2^2 A_2^2} = 6$  个；

当首位为 1 时，这样的五位数有  $\frac{A_4^4}{A_2^2} = 12$  个.

综上，这样的五位数共有  $6 + 12 = 18$  个.

故选：C.

**【典例 2】**（2024 上·上海·高二校考期末）2020 年底以来，我国多次在重要场合和政策文件中提及碳中和，碳中和指的是二氧化碳排放量和吸收量可以正负抵消，实现二氧化碳“零排放”.二氧化碳的分子是由一个碳原子和两个氧原子构成的，其结构式为  $O=C=O$ .已知氧有  $^{16}O$ 、 $^{17}O$ 、 $^{18}O$  三种天然同位素，碳有  $^{12}C$ 、 $^{13}C$ 、 $^{14}C$  三种天然同位素，则由上述同位素可构成的不同二氧化碳分子共有\_\_\_\_\_个.

**【答案】18**

**【详解】**分以下两种情况讨论：

若两个氧原子相同，此时二氧化碳分子共有  $3 \times 3 = 9$  种；

若两个氧原子不同，此时二氧化碳分子共有  $C_3^2 \times 3 = 9$  种.

由分类加法计数原理可知，由上述同位素可构成的不同二氧化碳分子共有  $9 + 9 = 18$  种.

故答案为：18

**【典例 3】**（2024·全国·高三专题练习）某校为促进拔尖人才培养开设了数学、物理、化学、生物、信息学五个学科竞赛课程，现有甲、乙、丙、丁四位同学要报名竞赛课程，由于精力和时间限制，每人只能选择其中一个学科的竞赛课程，则恰有两位同学选择数学竞赛课程的报名方法数为\_\_\_\_\_.

**【答案】96**

**【详解】**由题知先安排甲、乙、丙、丁四位同学的 2 名选择数学竞赛课程，

则有：  $C_4^2 = 6$  种情况，

剩下 2 名同学在选择物理、化学、生物、信息学四个学科竞赛课程时有：

① 2 名同学选择 1 个学科竞赛则有：  $C_4^1 = 4$  种情况，

② 2 名同学各选择 1 个学科竞赛则有  $C_4^1 C_3^1 = 12$  种情况，

所以恰有两位同学选择数学竞赛课程的报名方法数为：

$6 \times (12 + 4) = 96$  种情况，

故答案为：96.

**【变式 1】**（2024 上·海南海口·高三海南中学校考阶段练习）甲乙两位同学从 6 种课外读物中各自选读 3 种，则这两人选读的课外读物中恰有 1 种相同的选法共有（ ）

A. 30 种

B. 60 种

C. 180 种

D. 240 种

**【答案】C**

**【详解】**甲乙两位同学从 6 种课外读物中各自选读 3 种，

则这两人选读的课外读物中恰有 1 种相同的选法共有  $C_6^1 C_5^2 C_3^2 = 6 \times 10 \times 3 = 180$  种.

故选：C

【变式 2】(2024·全国·高三专题练习)中国空间站的主体结构包括天和核心实验舱、问天实验舱和梦天实验舱,假设空间站要安排甲、乙等 5 名航天员开展实验,三舱中每个舱至少一人至多二人,则甲乙不在同一实验舱的种数有 ( )

A. 60

B. 66

C. 72

D. 80

【答案】C

【详解】5 名航天员安排三舱,每个舱至少一人至多二人,共有  $C_5^1 C_3^1 C_4^2 = 90$  种安排方法,

若甲乙在同一实验舱的种数有  $C_3^1 C_3^1 C_2^1 = 18$  种,

故甲乙不在同一实验舱的种数有  $90 - 18 = 72$  种.

故选: C.

【变式 3】(2024·全国·高三专题练习)从 1, 2, 3, 4, 5, 6 中选取 4 个数字,组成各个数位上的数字既不全相同,也不两两互异的四位数,记四位数中各个数位上的数字从左往右依次为  $a, b, c, d$ , 且要求  $a \leq b \leq c \leq d$ , 则满足条件的四位数的个数为\_\_\_\_\_.

【答案】105

【详解】由题意可知,只用 2 个不同的数字时,有  $C_6^2 = 15$  (种)选法,

按照位数要求,每种数字组合组成的符合要求的四位数有 3 个,比如数字 1 和 2,可以构成的四位数有 1222, 1122, 1112, 所以共有  $15 \times 3 = 45$  (个)符合要求的四位数.

只用 3 个不同的数字时,有  $C_6^3 = 20$  (种)选法,

按照位数要求,每种数字组合组成的符合要求的四位数有 3 个,比如数字 1, 2, 3, 可以构成的四位数有 1123, 1223, 1233, 所以共有  $20 \times 3 = 60$  (个)符合要求的四位数.

故符合要求的四位数总共有  $45 + 60 = 105$  (个).

故答案为: 105

## 题型 06 排列、组合的综合应用

【典例 1】(2024·全国·高三专题练习)将六位数“124057”重新排列后得到不同的六位偶数的个数为 ( )

A. 152

B. 180

C. 216

D. 312

【答案】D

【详解】由题意,

末尾是 2 或 4,

不同偶数个数为  $C_2^1 C_4^1 A_4^4 = 192$ ,

末尾是 0,

不同偶数个数为  $A_5^5 = 120$ ,

所以共有 312 个.

故选: D

【典例 2】(2024·全国·高三专题练习)中国空间站 (China Space Station

的主体结构包括天和核心舱、问天实验舱和梦天实验舱.2022 年 10 月 31 日 15: 37 分, 我国将“梦天实验舱”成功送上太空, 完成了最后一个关键部分的发射, “梦天实验舱”也和“天和核心舱”按照计划成功对接, 成为“T”字形架构, 我国成功将中国空间站建设完毕.2023 年, 中国空间站将正式进入运营阶段.假设空间站要安排甲、乙等 6 名航天员开展实验, 三舱中每个舱至少一人至多三人, 则不同的安排方法有 ( )

- A. 450 种      B. 72 种      C. 90 种      D. 360 种

【答案】A

【详解】由题知, 6 名航天员安排三舱,  
三舱中每个舱至少一人至多三人,  
可分两种情况考虑:

第一种: 分人数为 1-2-3 的三组, 共有  $C_6^1 C_5^2 C_3^3 \cdot A_3^3 = 360$  种;

第二种: 分人数为 2-2-2 的三组, 共有  $\frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{A_3^3} \cdot A_3^3 = 90$  种;

所以不同的安排方法共有  $360 + 90 = 450$  种.

故选: A.

【典例 3】(2024·全国·高三专题练习) 2022 年 11 月, 第五届中国国际进口博览会即将在上海举行, 组委会准备安排 5 名工作人员去 A, B, C, D 这 4 所场馆, 其中 A 场馆安排 2 人, 其余场馆各 1 人, 则不同的安排方法种数为\_\_\_\_.

【答案】60

【详解】分为两步, 第一步: 安排 2 人去 A 场馆有  $C_5^2$  种结果, 第二步: 安排其余 3 人到剩余 3 个场馆, 有  $A_3^3$  种结果, 所以不同的安排方法种数为  $C_5^2 A_3^3 = 60$ .

故答案为: 60.

【典例 4】(2024·全国·高三专题练习) 2023 年杭州亚运会需招募志愿者, 现从某高校的 8 名志愿者中任意选出 3 名, 分别担任语言服务、人员引导、应急救助工作, 其中甲、乙 2 人不能担任语言服务工作, 则不同的选法共有\_\_\_\_\_种.

【答案】252

【详解】解: 先从甲、乙之外的 6 人中选取 1 人担任语言服务工作,  
再从剩下的 7 人中选取 2 人担任人员引导、应急救助工作,  
则不同的选法共有  $C_6^1 A_7^2 = 252$  种.

故答案为: 252

【变式 1】(2024·全国·高三专题练习) 安排包括甲、乙在内的 4 名大学生去 3 所不同的学校支教, 每名大学生只去一个学校, 每个学校至少去 1 名, 甲、乙不能安排在同一所学校, 则不同的安排方法有 ( )

- A. 36 种      B. 30 种      C. 24 种      D. 12 种

【答案】B

【详解】若每名大学生只去一个学校，每个学校至少去 1 名，则不同的安排方法有  $C_4^2 A_3^3 = 36$  种，

若甲、乙安排在同一所学校，则不同的安排方法有  $A_3^3 = 6$  种，

所以甲、乙不能安排在同一所学校，则不同的安排方法有  $36 - 6 = 30$  种.

故选：B.

【变式 2】（2024 上·河北邯郸·高三磁县第一中学校考阶段练习）国际高峰论坛上，组委会要从 6 个国内媒体团和 3 个国外媒体团中选出 3 个媒体团进行提问，要求这 3 个媒体团中既有国内媒体团又有国外媒体团，且国内媒体团不能连续提问，则不同的提问方式的种数为（ ）

A. 306

B. 198

C. 268

D. 378

【答案】B

【详解】由题可知选出的 3 个媒体团的构成有如下两类：

①选出的 3 个媒体团中只有一个国内媒体团，有  $C_6^1 C_3^2 A_3^3 = 108$  种不同的提问方式；

②选出的 3 个媒体团中有两个国内媒体团，有  $C_6^2 C_3^1 A_2^2 = 90$  种不同的提问方式.

综上，共有  $108 + 90 = 198$  种不同的提问方式.

故选：B.

【变式 3】（2024·全国·高三专题练习）从 5 男 3 女共 8 名学生中选出组长 1 人，副组长 1 人，普通组员 3 人组成 5 人志愿组，要求志愿组中至少有 3 名男生，且组长和副组长性别不同，则共有\_\_\_\_\_种不同的选法.（用数字作答）

【答案】480

【详解】由题意可知，当志愿组有 3 名男生，2 名女生时，有  $C_5^3 C_3^2 C_3^1 C_2^1 A_2^2 = 360$  种方法；

当志愿组有 4 名男生，1 名女生时，有  $C_5^4 C_3^1 C_4^1 A_2^2 = 120$  种方法，

由分类计数原理得，共有  $360 + 120 = 480$  种不同的选法.

故答案为：480.

【变式 4】（2024·全国·高三专题练习）从 2 个不同的红球，2 个不同的黄球，2 个不同的蓝球共 6 个球中任取 2 个，放入红、黄、蓝色的三个袋子中，每个袋子至多放入 1 个球，且球色与袋色不同，则不同的放法有\_\_\_\_\_种.

【答案】42

【详解】根据题意，分两类情况：

①若取出 2 个球全是同一种颜色，有 3 种可能，若为红色只需把它们放入蓝和黄即可，有  $A_2^2 = 2$ （种），此时有  $3 \times 2 = 6$ （种）；

②若取出的 2 个球为两种颜色的球，有  $3C_2^1 \cdot C_2^1 = 12$ （种），若为一红一黄，每个袋子至多放入一个球，且球色与袋色不同，有 3 种方法，此时共有  $12 \times 3 = 36$ （种），

因此不同的放法有  $6 + 36 = 42$  种.

故答案为：42.

---

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/918031110073006072>