

2023-2024 学年安徽省“江南十套”下学期高三年级期中考试数学试题试卷

请考生注意：

1. 请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用 0.5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。

2. 答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知向量 $\vec{a} = (1, -2)$, $\vec{b} = (3, -1)$ ，则 ()

- A. $\vec{a} \parallel \vec{b}$ B. $\vec{a} \perp \vec{b}$ C. $\vec{a} \parallel (\vec{a} - \vec{b})$ D. $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b})$

2. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $7S_2 = 4S_4$ ，则公比 q 的值为 ()

- A. 1 B. 1 或 $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a, b, c ，若 $a \tan B = 2b \sin(B + C)$ ，则角 B 的大小为 ()

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{4}$

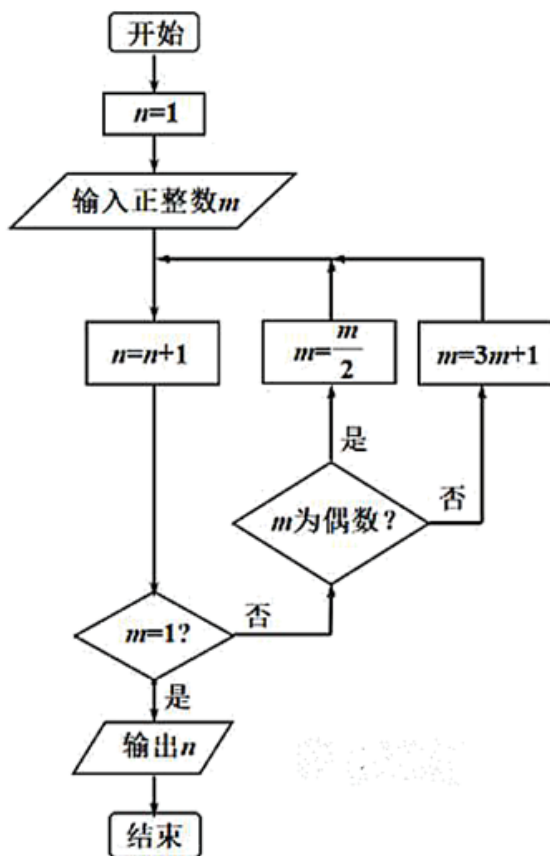
4. 已知函数 $f(x) = 3x + 2\cos x$ ，若 $a = f(3^{\sqrt{2}})$ ， $b = f(2)$ ， $c = f(\log_2 7)$ ，则 a, b, c 的大小关系是 ()

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $b < a < c$ D. $b < c < a$

5. 已知复数 z 满足 $z(1+i) = 1-i$ (i 为虚数单位)，则 z 的虚部为 ()

- A. $-i$ B. i C. 1 D. -1

6. 20 世纪产生了著名的“ $3x+1$ ”猜想：任给一个正整数 x ，如果 x 是偶数，就将它减半；如果 x 是奇数，则将它乘 3 加 1，不断重复这样的运算，经过有限步后，一定可以得到 1. 如图是验证“ $3x+1$ ”猜想的一个程序框图，若输入正整数 m 的值为 40，则输出的 n 的值是 ()



- A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\log_3 a_n + 1 = \log_3 a_{n+1}$ ($n \in N^*$), 且 $a_2 + a_4 + a_6 = 9$, 则 $\log_{\frac{1}{3}}(a_3 + a_5 + a_7)$ 的值是()

- A. 5 B. -3 C. 4 D. $\frac{9}{91}$

8. 已知 $f(x) = ax^2 + bx$ 是定义在 $[a-1, 2a]$ 上的偶函数, 那么 $a+b$ 的值是

- A. $-\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{3}$
C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

9. 已知集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()

- A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ C. $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ D. $\{1, 2\}$

10. 设 $a, b \in (1, +\infty)$, 则“ $a > b$ ”是“ $\log_a b < 1$ ”的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

11. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 和点 $D(2, 0)$, 直线 $x = ty - 2$ 与抛物线 C 交于不同两点 A, B , 直线 BD 与抛物线 C 交于另一点 E . 给出以下判断:

①以 BE 为直径的圆与抛物线准线相离;

②直线 OB 与直线 OE 的斜率乘积为 -2 ;

③设过点 A, B, E 的圆的圆心坐标为 (a, b) , 半径为 r , 则 $a^2 - r^2 = 4$.

其中, 所有正确判断的序号是 ()

- A. ①② B. ①③ C. ②③ D. ①②③

12. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数, 且满足 $f(1+x) = f(1-x)$, 当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) = -e^{ax}$ (其中 e 是自然对数的底数), 若 $f(2020 - \ln 2) = 8$, 则实数 a 的值为 ()

- A. -3 B. 3 C. $-\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. A, B, C 三所学校举行高三联考, 三所学校参加联考的人数分别为 160, 240, 400, 为调查联考数学学科的成绩, 现采用分层抽样的方法在这三所学校中抽取样本, 若在 B 学校抽取的数学成绩的份数为 30, 则抽取的样本容量为 _____.

14. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为棱 AA_1, D_1A_1 的中点, 则直线 EF 与直线 A_1B 所成角的正切值为 _____.

15. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 + 2a_1 = 4$, $a_3^2 = a_5$, 则该数列的前 5 项的和为 _____.

16. 甲、乙、丙、丁 4 名大学生参加两个企业的实习, 每个企业两人, 则“甲、乙两人恰好在同一企业”的概率为 _____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足 $\sqrt{3}a = \sqrt{3}b \cos C - c \sin B$.

(1) 求 B ;

(2) 若 $b = 2\sqrt{3}$, AD 为 BC 边上的中线, 当 $\triangle ABC$ 的面积取得最大值时, 求 AD 的长.

18. (12 分) 等差数列 $\{a_n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 中, a_1, a_2, a_3 分别是下表第一、二、三行中的某一个数, 且其中的任何两个数不在下表的同一列.

	第一列	第二列	第三列
第一行	5	8	2
第二行	4	3	12
第三行	16	6	9

(1) 请选择一个可能的 $\{a_1, a_2, a_3\}$ 组合，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 记 (1) 中您选择的 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，判断是否存在正整数 k ，使得 a_1, a_k, S_{k+2} 成等比数列，若有，请求出 k 的值；若没有，请说明理由.

19. (12 分) 在锐角 $\triangle ABC$ 中， a, b, c 分别是角 A, B, C 所对的边， $\triangle ABC$ 的面积 $S = 2$ ，且满足

$$a \cos B = b(1 + \cos A), \text{ 则 } (c + a - b)(c + b - a) \text{ 的取值范围是 ()}$$

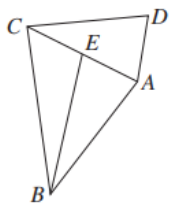
- A. $(8\sqrt{2} - 8, 8)$ B. $(0, 8)$ C. $\left(\frac{8\sqrt{3} - 8}{3}, 8\sqrt{3}\right)$ D. $\left(\frac{8\sqrt{3} - 8}{3}, 8\right)$

20. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3} \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数)，以原点 O 为极点，以 x 轴正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho \sin(\theta + \frac{\pi}{6}) = 2$.

(1) 求曲线 C_1 的普通方程与曲线 C_2 的直角坐标方程；

(2) 设 A, B 为曲线 C_1 上位于第一、二象限的两个动点，且 $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ ，射线 OA, OB 交曲线 C_2 分别于 D, C ，求 $\triangle AOB$ 面积的最小值，并求此时四边形 $ABCD$ 的面积.

21. (12 分) 如图在四边形 $ABCD$ 中， $BA = \sqrt{3}$ ， $BC = 2$ ， E 为 AC 中点， $BE = \frac{\sqrt{13}}{2}$.



(1) 求 AC ；

(2) 若 $D = \frac{\pi}{3}$ ，求 $\triangle ACD$ 面积的最大值.

22. (10 分) 某大型单位举行了一次全体员工都参加的考试，从中随机抽取了 20 人的分数. 以下茎叶图记录了他们的考试分数 (以十位数字为茎，个位数字为叶)：

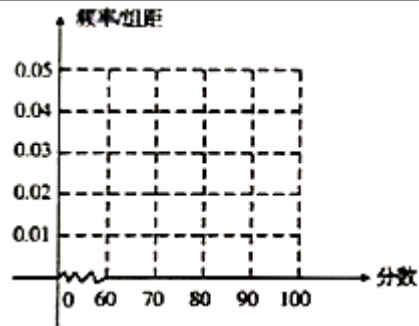
	分数
6	7 5
7	8 6 3 3 3 1
8	9 8 8 7 7 6 3 3
9	8 6 6 5

若分数不低于 95 分，则称该员工的成绩为“优秀”.

(1) 从这 20 人中任取 3 人，求恰有 1 人成绩“优秀”的概率；

(2) 根据这 20 人的分数补全下方的频率分布表和频率分布直方图，并根据频率分布直方图解决下面的问题.

组别	分组	频数	频率	$\frac{\text{频率}}{\text{组距}}$
1	$[60,70)$			
2	$[70,80)$			
3	$[80,90)$			
4	$[90,100]$			



- ①估计所有员工的平均分数（同一组中的数据用该组区间的中点值作代表）；
- ②若从所有员工中任选 3 人，记 X 表示抽到的员工成绩为“优秀”的人数，求 X 的分布列和数学期望.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

由题意利用两个向量坐标形式的运算法则，两个向量平行、垂直的性质，得出结论.

【详解】

∵向量 $\vec{a} = (1, -2)$ ， $\vec{b} = (3, -1)$ ，∴ $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的坐标对应不成比例，故 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 不平行，故排除 A；

显然， $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3+2 \neq 0$ ，故 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 不垂直，故排除 B；

$\therefore \vec{a} - \vec{b} = (-2, -1)$, 显然, $\vec{a}$ 和 $\vec{a} - \vec{b}$ 的坐标对应不成比例, 故 $\vec{a}$ 和 $\vec{a} - \vec{b}$ 不平行, 故排除 C;

$\therefore \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = -2 + 2 = 0$, 故 $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b})$, 故 D 正确,

故选: D.

【点睛】

本题主要考查两个向量坐标形式的运算, 两个向量平行、垂直的性质, 属于基础题.

2、C

【解析】

由 $7S_2 = 4S_4$ 可得 $3(a_1 + a_2) = 4(a_3 + a_4)$, 故可求 q 的值.

【详解】

因为 $7S_2 = 4S_4$, 所以 $3(a_1 + a_2) = 4(S_4 - S_2) = 4(a_3 + a_4)$,

故 $q^2 = \frac{3}{4}$, 因 $\{a_n\}$ 为正项等比数列, 故 $q > 0$, 所以 $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故选 C.

【点睛】

一般地, 如果 $\{a_n\}$ 为等比数列, S_n 为其前 n 项和, 则有性质:

(1) 若 $m, n, p, q \in N^*, m + n = p + q$, 则 $a_m a_n = a_p a_q$;

(2) 公比 $q \neq 1$ 时, 则有 $S_n = A + Bq^n$, 其中 A, B 为常数且 $A + B = 0$;

(3) $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \dots$ 为等比数列 ($S_n \neq 0$) 且公比为 q^n .

3、A

【解析】

由正弦定理化简已知等式可得 $\sin A \tan B = 2 \sin B \sin A$, 结合 $\sin A > 0$, 可得 $\tan B = 2 \sin B$, 结合范围 $B \in (0, \pi)$, 可得 $\sin B > 0$, 可得 $\cos B = \frac{1}{2}$, 即可得解 B 的值.

【详解】

解: $\because a \tan B = 2b \sin(B + C) = 2b \sin A$,

$\therefore$ 由正弦定理可得: $\sin A \tan B = 2 \sin B \sin A$,

$\because \sin A > 0$,

$\therefore \tan B = 2 \sin B$,

$\because B \in (0, \pi)$, $\sin B > 0$,

$$\therefore \cos B = \frac{1}{2},$$

$$\therefore B = \frac{\pi}{3}.$$

故选 A.

【点睛】

本题主要考查了正弦定理在解三角形中的应用，考查了计算能力和转化思想，属于基础题.

4、D

【解析】

根据题意，求出函数的导数，由函数的导数与函数单调性的关系分析可得 $f(x)$ 在 R 上为增函数，又由

$$2 = \log_2 4 < \log_2 7 < 3 < 3^{\sqrt{2}}, \text{ 分析可得答案.}$$

【详解】

解：根据题意，函数 $f(x) = 3x + 2\cos x$ ，其导数函数 $f'(x) = 3 - 2\sin x$ ，

则有 $f'(x) = 3 - 2\sin x > 0$ 在 R 上恒成立，

则 $f(x)$ 在 R 上为增函数；

$$\text{又由 } 2 = \log_2 4 < \log_2 7 < 3 < 3^{\sqrt{2}},$$

则 $b < c < a$ ；

故选：D.

【点睛】

本题考查函数的导数与函数单调性的关系，涉及函数单调性的性质，属于基础题.

5、D

【解析】

根据复数 z 满足 $z(1+i) = 1-i$ ，利用复数的除法求得 z ，再根据复数的概念求解.

【详解】

因为复数 z 满足 $z(1+i) = 1-i$ ，

$$\text{所以 } z = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = -i,$$

所以 z 的虚部为 -1 .

故选：D.

【点睛】

本题主要考查复数的概念及运算，还考查了运算求解的能力，属于基础题.

6、C

【解析】

列出循环的每一步，可得出输出的 n 的值.

【详解】

$n=1$ ，输入 $m=40$ ， $n=1+1=2$ ， $m=1$ 不成立， m 是偶数成立，则 $m=\frac{40}{2}=20$ ；

$n=2+1=3$ ， $m=1$ 不成立， m 是偶数成立，则 $m=\frac{20}{2}=10$ ；

$n=3+1=4$ ， $m=1$ 不成立， m 是偶数成立，则 $m=\frac{10}{2}=5$ ；

$n=4+1=5$ ， $m=1$ 不成立， m 是偶数不成立，则 $m=3\times 5+1=16$ ；

$n=5+1=6$ ， $m=1$ 不成立， m 是偶数成立，则 $m=\frac{16}{2}=8$ ；

$n=6+1=7$ ， $m=1$ 不成立， m 是偶数成立，则 $m=\frac{8}{2}=4$ ；

$n=7+1=8$ ， $m=1$ 不成立， m 是偶数成立，则 $m=\frac{4}{2}=2$ ；

$n=8+1=9$ ， $m=1$ 不成立， m 是偶数成立，则 $m=\frac{2}{2}=1$ ；

$n=9+1=10$ ， $m=1$ 成立，跳出循环，输出 n 的值为10.

故选：C.

【点睛】

本题考查利用程序框图计算输出结果，考查计算能力，属于基础题.

7、B

【解析】

由 $\log_3 a_n + 1 = \log_3 a_{n+1}$ ，可得 $a_{n+1} = 3a_n$ ，所以数列 $\{a_n\}$ 是公比为3的等比数列，

所以 $a_2 + a_4 + a_6 = a_2 + 9a_2 + 81a_2 = 91a_2 = 9$ ，则 $a_2 = \frac{9}{91}$ ，

则 $\log_{\frac{1}{3}}(a_3 + a_5 + a_7) = \log_{\frac{1}{3}}(3a_2 + 27a_2 + 243a_2) = \log_{\frac{1}{3}} 3^3 = -3$ ，故选 B.

点睛：本题考查了等比数列的概念，等比数列的通项公式及等比数列的性质的应用，试题有一定的技巧，属于中档试题，解决这类问题的关键在于熟练掌握等比数列的有关公式并能灵活运用，尤其需要注意的是，等比数列的性质和使用等比数列的前 n 项和公式时，应该要分类讨论，有时还应善于运用整体代换思想简化运算过程.

8、B

【解析】

依照偶函数的定义，对定义域内的任意实数， $f(-x) = f(x)$ ，且定义域关于原点对称， $a-1 = -2a$ ，即可得解.

【详解】

根据偶函数的定义域关于原点对称，且 $f(x)$ 是定义在 $[a-1, 2a]$ 上的偶函数，

得 $a-1=-2a$ ，解得 $a=\frac{1}{3}$ ，又 $f(-x)=f(x)$ ，

$\therefore b=0$ ， $\therefore a+b=\frac{1}{3}$ ．故选 B．

【点睛】

本题考查偶函数的定义，对定义域内的任意实数， $f(-x)=f(x)$ ；奇函数和偶函数的定义域必然关于原点对称，定义域区间两个端点互为相反数．

9、A

【解析】

进行交集的运算即可．

【详解】

$Q A = \{0, 1, 2, 3\}$ ， $B = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$ ，

$\therefore A \cap B = \{0, 1, 2\}$ ．

故选：A．

【点睛】

本题主要考查了列举法、描述法的定义，考查了交集的定义及运算，考查了计算能力，属于基础题．

10、C

【解析】

根据充分条件和必要条件的定义结合对数的运算进行判断即可．

【详解】

$\because a, b \in (1, +\infty)$ ，

$\therefore a > b \Rightarrow \log_a b < 1$ ，

$\log_a b < 1 \Rightarrow a > b$ ，

$\therefore a > b$ 是 $\log_a b < 1$ 的充分必要条件，

故选 C．

【点睛】

本题主要考查充分条件和必要条件的判断，根据不等式的解法是解决本题的关键．

11、D

【解析】

对于①，利用抛物线的定义，利用 $d = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{|BF| + |EF|}{2} > \frac{|BE|}{2} = R$ 可判断；

对于②，设直线 DE 的方程为 $x = my + 2$ ，与抛物线联立，用坐标表示直线 OB 与直线 OE 的斜率乘积，即可判断；

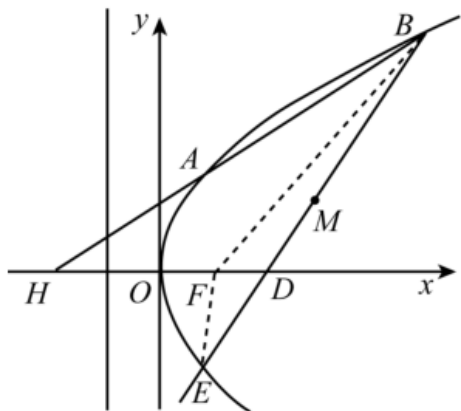
对于③，将 $x = ty - 2$ 代入抛物线 C 的方程可得， $y_A y_1 = 8$ ，从而， $y_A = -y_2$ ，利用韦达定理可得

$|BE|^2 = 16m^4 + 48m^2 + 32$ ，再由 $r^2 = |MN|^2 + \left(\frac{|BE|}{2}\right)^2$ ，可用 m 表示 r^2 ，线段 BE 的中垂线与 x 轴的交点（即圆心

N ）横坐标为 $2m^2 + 4$ ，可得 a ，即可判断。

【详解】

如图，设 F 为抛物线 C 的焦点，以线段 BE 为直径的圆为 M ，则圆心 M 为线段 BE 的中点。



设 B ， E 到准线的距离分别为 d_1 ， d_2 ， $\odot M$ 的半径为 R ，点 M 到准线的距离为 d ，

显然 B ， E ， F 三点不共线，

则 $d = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{|BF| + |EF|}{2} > \frac{|BE|}{2} = R$ 。所以①正确。

由题意可设直线 DE 的方程为 $x = my + 2$ ，

代入抛物线 C 的方程，有 $y^2 - 4my - 8 = 0$ 。

设点 B ， E 的坐标分别为 (x_1, y_1) ， (x_2, y_2) ，

则 $y_1 + y_2 = 4m$ ， $y_1 y_2 = -8$ 。

所以 $x_1 x_2 = (my_1 + 2)(my_2 + 2) = m^2 y_1 y_2 + 2m(y_1 + y_2) + 4 = 4$ 。

则直线 OB 与直线 OE 的斜率乘积为 $\frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = -2$ 。所以②正确。

将 $x = ty - 2$ 代入抛物线 C 的方程可得， $y_A y_1 = 8$ ，从而， $y_A = -y_2$ 。根据抛物线的对称性可知，

A ， E 两点关于 x 轴对称，所以过点 A ， B ， E 的圆的圆心 N 在 x 轴上。

由上，有 $y_1 + y_2 = 4m$ ， $x_1 + x_2 = 4m^2 + 4$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/918033045111006113>