初等数论练习题

一、填空题

1、 d(2420)=12；　　(2420)= 880

2、 设 a,n 是大于 1 的整数，若 a^n-1 是质数，则 a=_2.

3、 模 9 的绝对最小完全剩余系是　{-4，-3, -2, -1,0,123,4}.

4、 同余方程 9x+12= 0(mod 37)的解是 x 三 11(mod 37)。

5、 不定方程 18x-23y=100 的通解是 x=900+23t, y=700+18t t Z。

6 分母是正整数 m 的既约真分数的个数为(m 。

8、 $\frac{65}{103}$ =-1。

7、18^{100}被 17^2 除的余数是_256。

9、若 p 是素数，则同余方程 $x^{p\ 1}$ 1(mod p)的解数为 p-1　　　　　。

二、计算题

1、 解同余方程：$3x^2 11x 20$ 0 (mod 105)。

解：因 105 = 357，

同余方程　$3x^2 11x 20$ 0 (mod 3)　的解为 x　1 (mod 3),

同余方程　3x 11x38 0 (mod 5)　的解为 x　0，3　(mod 5),

同余方程　$3x^2 11x 20$ 0 (mod 7)　的解为 x　2，6　(mod 7),

故原同余方程有 4 解。

作同余方程组：x　b_1(mod 3)　，x b (mod 5)　，x　b_a　(mod 7),

其中 b_1 = 1，b_2　= 0，3，　b_3 = 2　，6，

由孙子定理得原同余方程的解为 x 13，55，58，100 (mod 105)。

2、 判断同余方程 x^2 三 42(mod 107)是否有解？

故同余方程 x^2 三 42(mod 107)有解。

3、 求$(1271^{56}+34)^{28}$除以 111 的最小非负余数。

解：易知 1271 三 50 (mod 111)。

由 50^2 三 58 (mod 111) , 50^3 三 58 X 50 三 14 (mod 111), 50^9 三 14^3 三 80 (mod 111) 知

50^{28} 三$(50^9)^3$X 50 三 80^3 X 50 三 80^3X 50 三 68X 50 三 70 (mod 111)

从而 50^{56} 三 16 (mod 111)。

故$(1271^{56}+34)^{28}$三$(16+34)^{28}$三 50^{28}三 70 (mod 111)

三、证明题

1、已知 p 是质数，(a,p) =1,证明：

(1) 当 a 为奇数时，$a^{p-1}+(p-1)^{a}$= 0 (mod p);

2、设 a 为正奇数, n 为正整数，试证 2^{n} 三 1(mod 2^{n+2})。 (1) 成立。

(2) 当 a 为偶数时，$a^{p-1}-(p-1)^{a}$= 0 (mod p)。

证明：由欧拉定理知 a^{p-1} = 1 (mod p)及$(p-1)^{a}$= -1 (mod p)立得(1)和(2)

证明设 a = 2 m 1，当 n = 1 时，有

2 2 3

设原式对于 n = k 成立，则有 a^{2k} 1 (mod 2^{k+2}) 2^{k} q2

a = (2 m 1) = 4 m(m 1) 1 1 (mod 2)，即原式成立。

*1 2 k + 2 2 k + 3 k + 3

其中 q 是某个整数。这说明式 (1)当 n = k 1 也成立。

其中 qZ，所以 a = (1 q2) = 1 q 2 1 (mod 2)，

由归纳法知原式对所有正整数 n 成立。

3、设 p 是一个素数，且 Kk<p-1。证明：C_{p-1} (-1) ^{k}(mod p)。

证明：设 A=C_{p-1} ~~p 1(p 2) (p k)~~得：p k!

k! • A = (p-1) (p-2)...(p-k) = (-1) (-2) •••(-k) (mod p)

又(k!，p) =1，故 A = C_{p-1} (-1) ^{k}(mod p)

4、 设 p 是不等于 3 和 7 的奇质数，证明：p^{6}= 1(mod 84)。

说明：因为 84=4X 3X 7,所以，只需证明：

p^{6}= 1(mod 4) p^{6}= 1(mod3) p^{6}= 1(mod 7)同时成立即可。

证明：因为 84=4X 3X 7 及 p 是不等于 3 和 7 的奇质数，所以

(p，4) =1，(p，3) =1，(p，7) =1。