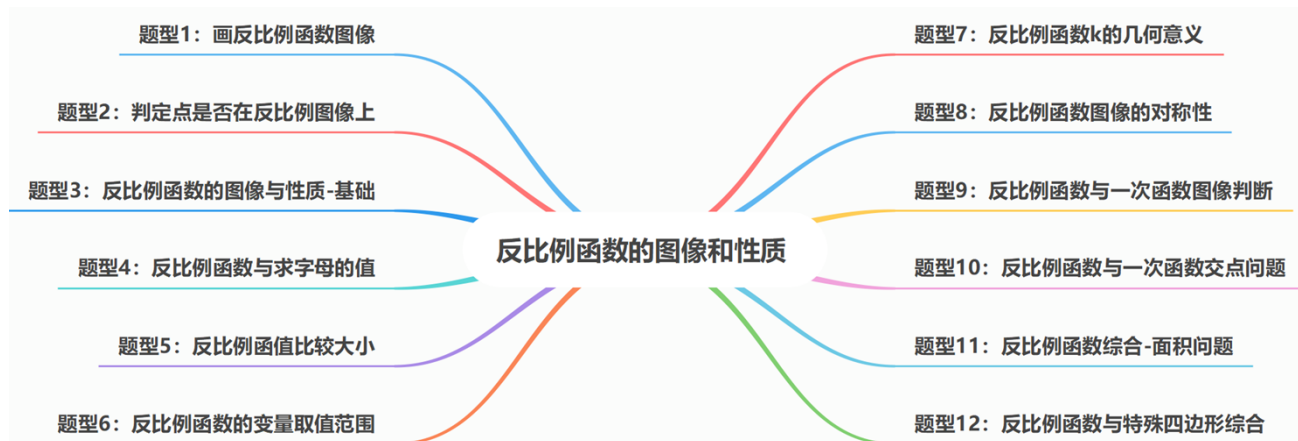


26.1.2 反比例函数的图像和性质



题型汇总



重要笔记 反比例函数的图像特征:

反比例函数的图象是双曲线，它有两个分支，这两个分支分别位于第一、三象限或第二、四象限；反比例函数的图象关于原点对称，永远不会与 x 轴、 y 轴相交，只是无限靠近两坐标轴。

注意：(1) 若点 (a, b) 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上，则点 $(-a, -b)$ 也在此图象上，所以反比例函数的图象关于原点对称；

(2) 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数， $k \neq 0$) 中，由于 $x \neq 0$ 且 $y \neq 0$ ，所以两个分支都无限接近但永远不能达到 x 轴和 y 轴。

题型 1: 画反比例函数图像

例题 1. 分别画出函数 $y = \frac{6}{x}$ 和 $y = \frac{-6}{x}$ 的图象。

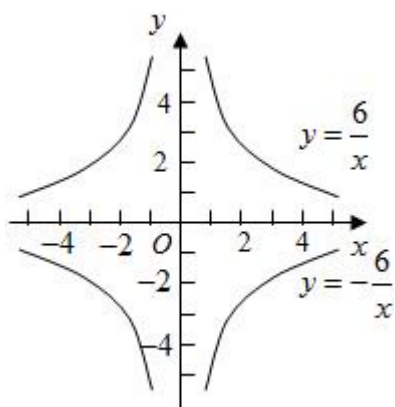
【分析】 从正数，负数中各选几个值作为 x 的值，进而得到 y 的值，描点，连线即可。

【解答】 解：①列表：

x	-3	-2	-1	1	2	3
$y = \frac{6}{x}$	-2	-3	-6	6	3	2
$y = \frac{-6}{x}$	2	3	6	-6	-3	-2

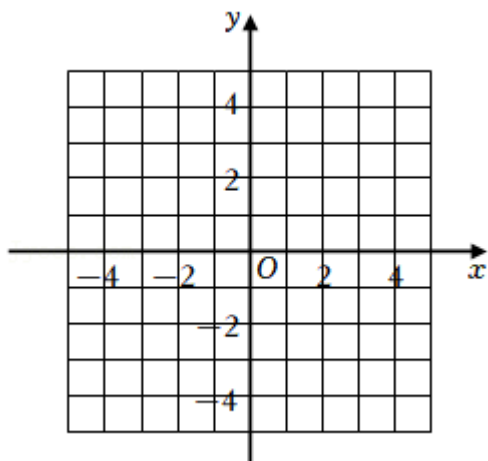
②描点：把表中的对应的数值作为点的坐标在坐标系中描出来，

③连线：用平滑的线顺次连起来.



【点评】此题考查列反比例函数图象，注意自变量的取值为不为 0 的任意实数，反比例函数的图象为在一三象限或二四象限的双曲线.

【变式 1-1】用描点法画出反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 和 $y = -\frac{2}{x}$ 的图象.



(1) 列表:

x	...	<u>-3</u>	<u>-2</u>	<u>-1</u>	<u>$-\frac{1}{2}$</u>	<u>$-\frac{1}{2}$</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	...
$y = \frac{2}{x}$	...	<u>$-\frac{2}{3}$</u>	<u>-1</u>	<u>-2</u>	<u>-4</u>	<u>4</u>	<u>2</u>	<u>1</u>	<u>$\frac{2}{3}$</u>	...
$y = -\frac{2}{x}$	...	<u>$-\frac{2}{3}$</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>4</u>	<u>-4</u>	<u>-2</u>	<u>-1</u>	<u>$-\frac{2}{3}$</u>	...

(2) 在如图坐标系中描点，并用光滑曲线顺次连结各点.

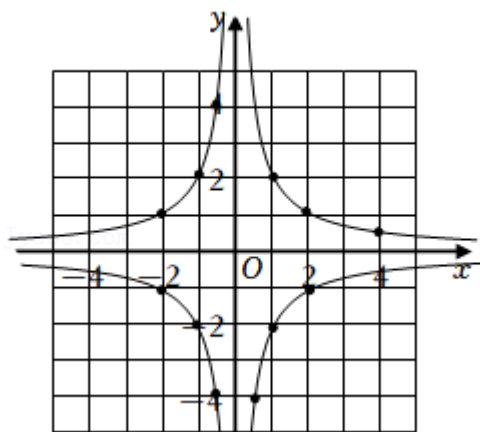
【分析】(1) 分别将 x 的值代入反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 和 $y = -\frac{2}{x}$ 的解析式即可得出结论;

(2) 在图中描点画出图象即可.

【解答】解：（1）分别将 x 的值代入反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 和 $y=-\frac{2}{x}$ 的解析式代入可得下表：

x	...	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	...
$y=\frac{2}{x}$	...	$-\frac{2}{3}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{2}{3}$	...
$y=-\frac{2}{x}$	...	$\frac{2}{3}$	1	2	4	-4	-2	-1	$-\frac{2}{3}$	...

（2）用光滑曲线可得出图象如下所示：



【点评】本题考查了图象的作法，比较简单，属于基础题，熟练掌握反比例函数的性质以及函数图象的作法是解题的关键。

【变式 1-2】已知函数 $y=(m-2)x^{m^2-5}$ 是反比例函数。

（1）求 m 的值；

（2）画出函数的图象。

【分析】（1）根据反比例函数的定义确定 m 的值即可；

（2）利用描点法作出函数的图象即可；

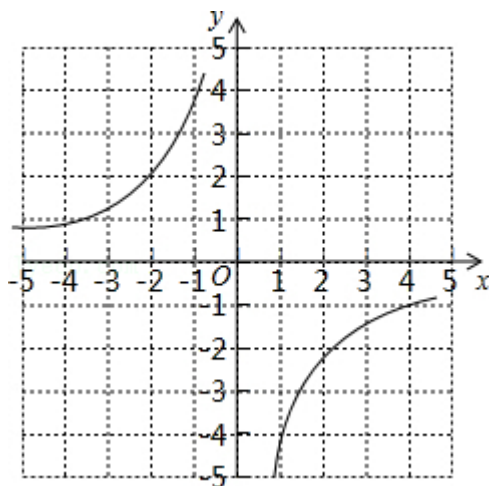
【解答】解：（1） $\because$ 函数 $y=(m-2)x^{m^2-5}$ 是反比例函数，

$$\therefore \begin{cases} m^2-5=-1, \\ m-2 \neq 0 \end{cases},$$

$$\therefore m=-2;$$

(2) 当 $m = -2$ 时反比例函数的解析式为 $y = -\frac{4}{x}$,

图象为:



【点评】本题考查了反比例函数的图象及反比例函数的定义，解题的关键是能够利用反比例函数的定义确定反比例函数的解析式，难度不大.

题型 2: 判定点是否在反比例图像上

例题 2. 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 经过点 $(-1, 4)$, 则下列各点也在这个函数图象上的是 ()

- A. $(-1, -4)$ B. $(1, 4)$ C. $(-2, -2)$ D. $(2, -2)$

【分析】由点在反比例函数图象上可求出 k 的值，再求出四个选项中点的横纵坐标之积，比照后即可得出结论.

【解答】解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 经过点 $(-1, 4)$,

$$\therefore k = -1 \times 4 = -4.$$

$$A、-1 \times (-4) = 4; B、1 \times 4 = 4; C、-2 \times (-2) = 4; D、2 \times (-2) = -4.$$

故选: D.

【点评】本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征，解题的关键是求出 $k = -4$. 本题属于基础题，难度不大，解决该题型题目时，根据点的坐标利用反比例函数图象上点的坐标特征求出反比例函数系数 k 的值是关键.

【变式 2-1】已知反比例函数 $y = \frac{k-1}{x}$ (k 常数, $k \neq 1$).

(1) 若点 $A(1, -2)$ 在这个函数的图象上, 求 k 的值;

(2) 若 $k=5$, 试判断点 $B(-\frac{1}{2}, -8)$ 是否在这个函数的图象上, 并说明理由.

【分析】(1) 将 A 点坐标代入反比例函数关系式中, 即可求出 k 的值.

(2) 通过点 B 坐标得出 $k-1=4$, 从而得出 $k=5$, 即可得出点 B 在函数图象上.

【解答】解: (1) $\because$ 点 $A(1, -2)$ 在这个函数的图象上,

$$\therefore -2 = \frac{k-1}{1},$$

解得: $k = -1$

(2) 点 $B(-\frac{1}{2}, -8)$ 在这个函数的图象上,

$$\therefore -\frac{1}{2} \times (-8) = 4,$$

$$k-1=4,$$

$$\therefore k=5,$$

又 $\because k=5$,

$\therefore$ 点 $B(-\frac{1}{2}, -8)$ 在这个函数的图象上.

【点评】本题主要考查了反比例函数图象上点的坐标, 解题的关键在于熟练掌握反比例函数图象的性质.

【变式 2-2】反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象过 $A(2, 3)$.

(1) 求这个函数解析式;

(2) 点 $(-1, m)$ 在函数图象上, 求 m 值;

(3) 判断 $B(1, 6)$ 是否在函数图象上? $C(-2, 3)$ 呢?

【分析】(1) 把点 A 的坐标代入函数解析式来求 k 的值;

(2) 把 $(-1, m)$ 代入 (1) 中得到的函数解析式来求 m 的值;

(3) 把点 B 、 C 的坐标分别代入进行验证即可.

【解答】解: (1) 把 $A(2, 3)$ 代入反比例函数 $y = \frac{k}{x}$, 得

$$k = xy = 2 \times 3 = 6,$$

$$\text{故 } y = \frac{6}{x};$$

(2) $\because$ 点 $(-1, m)$ 在函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图象上,

$$\therefore m = \frac{6}{-1} = -6;$$

(3) $\because 1 \times 6 = k, -2 \times 3 = -6 \neq k,$

$\therefore$ 点 $B(1, 6)$ 在函数图象上, 点 $C(-2, 3)$ 不在函数图象上.

【点评】本题考查了待定系数法求反比例函数解析式, 解决该题型题目时, 根据反比例函数图象上点的坐标特征得出与点的坐标有关的方程是关键.

反比例函数的性质

(1) 如图 1, 当 $k > 0$ 时, 双曲线的两个分支分别位于第一、三象限, 在每个象限内, y 值随 x 值的增大而减小;

(2) 如图 2, 当 $k < 0$ 时, 双曲线的两个分支分别位于第二、四象限, 在每个象限内, y 值随 x 值的增大而增大;

注意: 反比例函数的增减性不是连续的, 它的增减性都是在各自的象限内的增减情况, 反比例函数的增减性都是由反比例系数 k 的符号决定的; 反过来, 由双曲线所在的位置和函数的增减性, 也可以推断出 k 的符号.

题型 3: 反比例函数的图像与性质-基础

例题 3. 下列函数: ① $y = -5x$; ② $y = 3x - 2$; ③ $y = -\frac{3}{x} (x > 0)$; ④ $y = 3x^2 (x < 0)$, 其中 y 的值随 x 的

增大而增大的函数为 ②③. (填序号)

【分析】根据函数的增减性, 逐一判断.

【解答】解: ① 对于 $y = -5x$, y 随 x 的增大而减小;

② 对于 $y = 3x - 2$, y 随 x 的增大而增大;

③ 当 $x > 0$ 时, 函数 $y = -\frac{3}{x}$, y 随 x 的增大而增大;

④ $y = 3x^2$, 当 $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而减小.

故答案为: ②③.

【点评】本题考查了一次函数、反比例函数、二次函数的增减性, 熟知一次函数、二次函数, 反比例函数的性质是解题的关键.

【变式 3-1】已知函数 $y = \frac{k-1}{x}$ 的图象位于第二、第四象限, 则 k 的取值范围为 $k < 1$.

【分析】根据反比例函数的图象可知 $k-1 < 0$ ，求解即可.

【解答】解：∵反比例函数 $y = \frac{k-1}{x}$ 的图象位于第二、第四象限，

$$\therefore k-1 < 0,$$

$$\therefore k < 1,$$

故答案为： $k < 1$.

【点评】本题考查了反比例函数的图象，熟练掌握反比例函数的图象与系数的关系是解题的关键.

【变式 3-2】已知反比例函数 $y = \frac{4-k}{x}$ ，分别根据下列条件求出字母 k 的取值范围.

(1) 函数的图象位于一、三象限；

(2) 在第二象限内， y 随 x 的增大而增大.

【分析】根据反比例函数的性质， $k > 0$ 时，函数图象位于一三象限， y 随 x 的增大而减小； $k < 0$ 时，函数图象位于二四象限， y 随 x 的增大而增大.

【解答】解：(1) 函数图象位于第一、三象限；根据反比例函数的性质， $4-k > 0$ ， $k < 4$ ；

(2) 在每一象限内， y 随 x 的增大而增大；根据反比例函数的性质， $4-k < 0$ ， $k > 4$.

【点评】本题考查了反比例函数的性质，应注意 $y = \frac{k}{x}$ 中 k 的取值.

题型 4：反比例函数与求字母的值

【例题】4. 设 $y = (2n+1)x^{n^2+n-1}$

(1) 当 n 为何值时， y 与 x 是正比例函数，且图象经过一、三象限；

(2) 当 n 为何值时， y 与 x 是反比例函数，且在每个象限内 y 随着 x 的增大而增大.

【分析】(1) 根据正比例函数的定义结合正比例函数的性质即可得出关于 n 的一元一次不等式以及一元二次方程，解之即可得出结论；

(2) 根据反比例函数的定义结合反比例函数的性质即可得出关于 n 的一元一次不等式以及一元二次方程，解之即可得出结论.

【解答】解：(1) ∵ y 与 x 是正比例函数，且图象经过一、三象限，

$$\therefore \begin{cases} 2n+1 > 0 \\ n^2+n-1=1 \end{cases}, \text{解得: } n=1,$$

∴ 当 n 为 1 时， y 与 x 是正比例函数，且图象经过一、三象限；

(2) ∵ y 与 x 是反比例函数，且在每个象限内 y 随着 x 的增大而增大，

$$\therefore \begin{cases} 2n+1 < 0 \\ n^2+n-1=-1 \end{cases}, \text{解得: } n = -1,$$

$\therefore$ 当 n 为 -1 时, y 与 x 是反比例函数, 且在每个象限内 y 随着 x 的增大而增大.

【点评】本题考查了正比例函数的定义、正比例函数的性质、反比例函数的定义以及反比例函数的性质, 熟练掌握正、反比例函数的性质是解题的关键.

【变式 4-1】已知反比例函数 $y = (m-2)x^{m^2-m-7}$

(1) 若它的图象位于第一、三象限, 求 m 的值;

(2) 若它的图象在每一象限内 y 的值随 x 值的增大而增大, 求 m 的值.

【分析】(1) 根据反比例函数的定义与性质, 得出 $\begin{cases} m^2-m-7=-1 \\ m-2 > 0 \end{cases}$, 进而求解即可;

(2) 根据反比例函数的定义与性质, 得出 $\begin{cases} m^2-m-7=-1 \\ m-2 < 0 \end{cases}$, 进而求解即可.

【解答】解: (1) 由题意, 可得 $\begin{cases} m^2-m-7=-1 \\ m-2 > 0 \end{cases}$,

解得 $m=3$;

(2) 由题意, 可得 $\begin{cases} m^2-m-7=-1 \\ m-2 < 0 \end{cases}$,

解得 $m=-2$.

【点评】本题考查了反比例函数的性质; 用到的知识点为: 反比例函数 $y=kx$ ($k \neq 0$) 的图象是双曲线; 当 $k > 0$, 双曲线的两支分别位于第一、第三象限, 在每一象限内 y 随 x 的增大而减小; 当 $k < 0$, 双曲线的两支分别位于第二、第四象限, 在每一象限内 y 随 x 的增大而增大. 也考查了反比例函数的定义.

【变式 4-2】已知反比例函数 $y = (m-2)x^{m^2-m-7}$.

(1) 当反比例函数的图象位于第一、三象限时, 求 m 的值?

(2) 当反比例函数的图象位于第二、四象限时, 求 m 的值?

【分析】(1) 根据反比例函数的定义和性质列出方程求解即可.

(2) 根据反比例函数的定义和性质列出方程求解即可

【解答】解: (1) 根据题意得: $\begin{cases} m-2 > 0 \\ m^2-m-7=-1 \end{cases}$,

解得: $m=3$;

(2) 根据题意得:
$$\begin{cases} m-2 < 0 \\ m^2-m-7=0 \end{cases},$$

解得: $m = -2$.

【点评】本题考查了反比例函数的性质. 对于反比例函数 $y = \frac{k}{x}$, 当 $k > 0$ 时, 在每一个象限内, 函数值 y 随自变量 x 的增大而减小; 当 $k < 0$ 时, 在每一个象限内, 函数值 y 随自变量 x 增大而增大.

题型 5: 反比例函数比较大小

例题 5. 已知点 $(4, y_1)$, $(6, y_2)$, 在反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图象上, 则 y_1, y_2 的大小关系为 ()

- A. $y_1 > y_2$ B. $y_1 < y_2$ C. $y_1 = y_2$ D. 无法判断

【分析】利用反比例函数图象上点的坐标特征计算出 y_1 和 y_2 的值, 然后比较它们的大小.

【解答】解: $\because$ 点 $(4, y_1)$, $(6, y_2)$, 在反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图象上,

$$\therefore y_1 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, y_2 = \frac{6}{6} = 1,$$

$$\therefore y_1 < y_2.$$

故选: B.

【点评】本题考查的是反比例函数图象上点的坐标特征, 熟知反比例函数图象上各点的坐标一定适合此函数的解析式是解答此题的关键.

【变式 5-1】 若点 $A(-3, y_1)$, $B(-2, y_2)$, $C(3, y_3)$ 在反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象上, 则 y_1, y_2, y_3

大小关系是 ()

- A. $y_1 < y_2 < y_3$ B. $y_1 < y_3 < y_2$ C. $y_2 < y_1 < y_3$ D. $y_3 < y_1 < y_2$

【分析】根据反比例函数图象上点的坐标特征求出 y_1, y_2, y_3 的值, 比较后即可得出结论.

【解答】解: $\because$ 点 $A(-3, y_1)$, $B(-2, y_2)$, $C(3, y_3)$ 在反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象上,

$$\therefore y_1 = -\frac{1}{3}, y_2 = -\frac{1}{2}, y_3 = \frac{1}{3},$$

$$\text{又} \because -\frac{1}{3} < -\frac{1}{2} < \frac{1}{3},$$

$$\therefore y_3 < y_1 < y_2.$$

故选: D.

【点评】本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征, 利用反比例函数图象上点的坐标特征求出 y_1, y_2, y_3 的值是解题的关键.

【变式 5-2】点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ 都在反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象上, 若 $x_1 < x_2 < 0 < x_3$,

则 y_1, y_2, y_3 大小关系是 $y_2 < y_1 < y_3$ (用 “ $<$ ” 连接)

【分析】根据反比例函数性质, 反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象分布在第一、三象限, 再根据 $x_1 < x_2 < 0 < x_3$ 即可得出结论.

【解答】解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象分布在第一、三象限,

$\therefore$ 在每一象限 y 随 x 的增大而减小,

$\because x_1 < x_2 < 0 < x_3$,

$\therefore C$ 点在第一象限, A, B 点在第三象限,

$\therefore y_2 < y_1 < y_3$.

故答案为: $y_2 < y_1 < y_3$.

【点评】本题考查的是反比例函数图象上点的坐标特点, 熟知反比例函数的性质是解答此题的关键.

题型 6: 反比例函数的变量取值范围

【例题】6. 已知 y 是 x 的反比例函数, 且 $x=3$ 时, $y=8$.

(1) 写出 y 与 x 之间的函数关系式;

(2) 如果自变量 x 的取值范围为 $3 \leq x \leq 4$. 求 y 的取值范围.

【分析】(1) 根据反比例函数的定义设出表达式, 再利用待定系数法解出系数则可;

(2) 分别代入 x 的值求得 y 值后即可求得 y 的取值范围;

【解答】解: (1) 设反比例函数是 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$),

当 $x=3$ 时, $y=8$, 代入可解得 $k=24$.

所以 $y = \frac{24}{x}$.

(2) 当 $x=3$ 时, $y=8$, 当 $x=4$ 时, $y=6$,

$\therefore$ 自变量 x 的取值范围为 $3 \leq x \leq 4$. y 的取值范围为 $6 \leq y \leq 8$.

【点评】本题考查了反比例函数的性质及反比例函数的定义, 能够利用待定系数法确定反比例函数的解析式是解答本题的关键, 难度不大.

【变式 6-1】若函数 $y = (m-2)x^{m^2-5}$ 是 y 关于 x 的反比例函数.

(1) 求 m 的值;

(2) 函数图象在哪些象限? 在每个象限内, y 随 x 的增大而怎样变化?

(3) 当 $-3 \leq x \leq -\frac{1}{2}$ 时, 求 y 的取值范围.

【分析】(1) 根据反比例函数的定义列出关于 m 的不等式组, 求出 m 的值即可;

(2) 根据反比例函数的性质即可得出结论;

(3) 分别令 $x = -3$, $x = -\frac{1}{2}$, 求出 y 的对应值即可.

【解答】解: (1) $\because$ 函数 $y = (m-2)x^{m^2-5}$ 是 y 关于 x 的反比例函数,

$$\therefore \begin{cases} m-2 \neq 0 \\ m^2-5=-1 \end{cases}, \text{解得 } m = -2;$$

(2) $\because m = -2$,

$\therefore$ 反比例函数的关系式为: $y = -\frac{4}{x}$.

$\because -4 < 0$,

$\therefore$ 函数图象的两个分支分别位于第二四象限, 且在每个象限内, y 随 x 的增大而增大;

(3) $\because$ 反比例函数的关系式为: $y = -\frac{4}{x}$,

$\therefore$ 当 $x = -3$ 时, $y = \frac{4}{3}$; 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, $y = 8$,

$\therefore \frac{4}{3} \leq y \leq 8$.

【点评】本题考查的是反比例函数的性质, 熟知反比例函数的图象与系数的关系是解答此题的关键.

【变式 6-2】作出函数 $y = \frac{12}{x}$ 的图象, 并根据图象回答下列问题:

(1) 当 $x = -2$ 时, 求 y 的值;

(2) 当 $2 < y < 3$ 时, 求 x 的取值范围;

(3) 当 $-4 < x < -2$ 时, 求 y 的取值范围.

【分析】(1) 把 $x = -2$ 代入解析式求得 y 的值;

(2) 求得当 $y = 2$ 和 $y = 3$ 时函数值, 根据函数图象的性质即可确定;

(3) 求得当 $x = -4$ 和 $x = -2$ 时函数值, 根据函数图象的性质即可确定.

【解答】解: (1) 当 $x = -2$ 时, $y = \frac{12}{-2} = -6$;

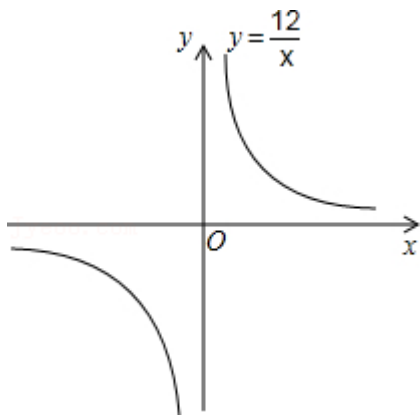
(2) 当 $y = 2$ 时, $x = \frac{12}{2} = 6$, 当 $y = 3$ 时, $x = \frac{12}{3} = 4$,

则 x 的范围是： $4 < x < 6$ ；

(3) 当 $x = -4$ 时， $y = \frac{12}{-4} = -3$ ，

当 $x = -2$ 时， $y = -6$ ，

则 y 的范围是： $-6 < y < -3$ 。



【点评】本题考查了反比例函数的图象的性质，对于反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ，当 $k > 0$ 时，在每一个象限内，函数值 y 随自变量 x 的增大而减小；当 $k < 0$ 时，在每一个象限内，函数值 y 随自变量 x 增大而增大。

【变式 6-3】设函数 $y = -\frac{3}{x}$ 。

- (1) 画出函数的图象；
- (2) 利用图象求 $-3 \leq x \leq -1$ 时，函数值 y 的变化范围；
- (3) 当 $3 \leq x \leq 6$ 时，函数的最大值和最小值各是多少？

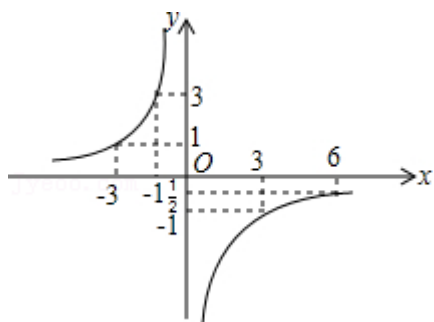
【分析】(1) 根据题意画出图形即可；

(2)、(3) 根据反比例函数的图象即可得出结论。

【解答】解：(1) 如图所示；

(2) 由图可知，当 $-3 \leq x \leq -1$ 时， $1 \leq y \leq 3$ ；

(3) 由函数图象可知，当 $3 \leq x \leq 6$ 时，函数的最大值是 $\frac{1}{2}$ ，最小值是 -1 。

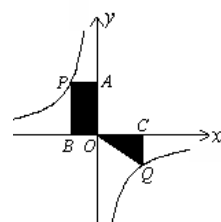


【点评】 本题考查的是反比例函数的性质，能根据题意画出函数图象，利用数形结合求解是解答此题的关键.

反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 中的比例系数 k 的几何意义

过双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 上任意一点作 x 轴、 y 轴的垂线，所得矩形的面积为 $|k|$.

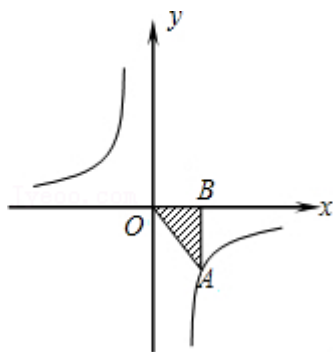
过双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 上任意一点作一坐标轴的垂线，连接该点和原点，所得三角形的面积为 $\frac{|k|}{2}$.



注意：只要函数式已经确定，不论图象上点的位置如何变化，这一点与两坐标轴的垂线和两坐标轴围成的面积始终是不变的.

题型 7：反比例函数 k 的几何意义

例题 7. 如图，点 A 在双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 上， $AB \perp x$ 轴于 B ，且 $\triangle AOB$ 的面积 $S_{\triangle AOB} = 2$ ，则 k 的值为 ()



A. 2

B. 4

C. -2

D. -4

【分析】 根据 k 的几何意义以及函数所在的象限即可确定.

【解答】 解： $\therefore S_{\triangle AOB} = 2$,

$\therefore |k| = 4$,

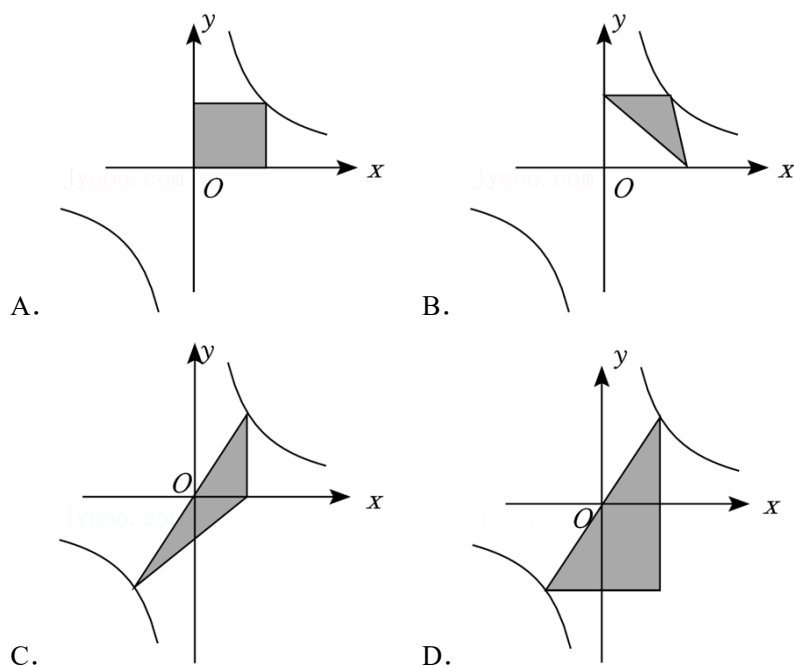
$\therefore$ 函数在二、四象限，

$\therefore k = -4$.

故选：D.

【点评】反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 中 k 的几何意义，是经常考查的一个知识点；这里体现了数形结合的思想，做此类题一定要正确理解 k 的几何意义。

【变式 7-1】若图中反比例函数的表达式均为 $y=\frac{4}{x}$ ，则阴影面积为 2 的是（ ）



【分析】根据反比例函数比例系数 k 的几何意义，反比例函数的性质以及三角形的面积公式，分别求出四个图形中阴影部分的面积，即可求解。

【解答】解：A 选项中，阴影面积为 4，故 A 不符合题意；

B 选项中，阴影面积为 $\frac{1}{2} \times 4 = 2$ ，故 B 符合题意；

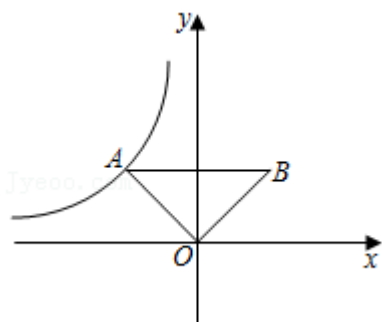
C 选项中，阴影面积为 $2 \times \frac{1}{2} \times 4 = 4$ ，故 C 不符合题意；

D 选项中，阴影面积为 $4 \times \frac{1}{2} \times 4 = 8$ ，故 D 不符合题意；

故选：B。

【点评】本题考查了反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 中 k 的几何意义，即过双曲线上任意一点引 x 轴、 y 轴垂线，所得矩形面积为 $|k|$ ，是经常考查的一个知识点；这里体现了数形结合的思想，解此类题一定要正确理解 k 的几何意义，也考查了反比例函数的对称性，三角形的面积。

【变式 7-2】如图，点 A ， B 关于 y 轴对称， $S_{\triangle AOB}=8$ ，点 A 在双曲线 $y=\frac{2k}{x}$ 上，求 k 的值。



【分析】根据轴对称的性质得出 AB 垂直于 y 轴，且 $AC=BC$ ，即可得出 $S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}S_{\triangle AOB}=4$ ，根据反比例函数系数 k 的几何意义即可求得 k 的值．

【解答】解：∵点 A, B 关于 y 轴对称，

∴ AB 垂直于 y 轴，且 $AC=BC$ ，

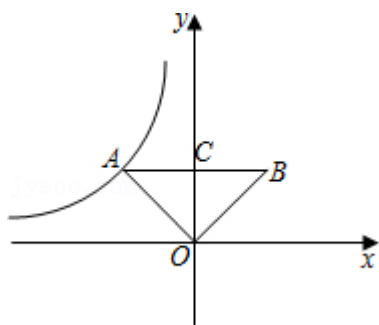
$$\therefore S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}S_{\triangle AOB}=4,$$

$$\therefore S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}|2k|,$$

$$\therefore \frac{1}{2}|2k|=4,$$

∵在第二象限，

$$\therefore k=-4.$$



【点评】本题考查了轴对称的性质，反比例函数系数 k 的几何意义，求得 $\triangle AOC$ 的面积是解题的关键．

题型 8：反比例函数图像的对称性

例题 8. 正比例函数 $y=2x$ 和反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 的一个交点为 $(1, 2)$ ，则另一个交点为 ()

- A. $(-1, -2)$ B. $(-2, -1)$ C. $(1, 2)$ D. $(2, 1)$

【分析】根据反比例函数的关于原点对称的性质知，正比例函数 $y=2x$ 和反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 的另一个交

点与点 $(1, 2)$ 关于原点对称.

【解答】解：∵ 正比例函数 $y=2x$ 和反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 的一个交点为 $(1, 2)$,

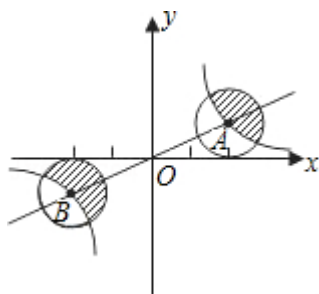
∴ 另一个交点与点 $(1, 2)$ 关于原点对称,

∴ 另一个交点是 $(-1, -2)$.

故选：A.

【点评】本题考查了反比例函数图象的对称性. 关于原点对称的两点的横纵坐标互为相反数.

【变式 8-1】如图，正比例函数与反比例函数的图象相交于 A 、 B 两点，分别以 A 、 B 两点为圆心，画与 x 轴相切的两个圆，若点 A 的坐标为 $(2, 1)$ ，则图中两个阴影部分面积的和是（ ）



A. $\frac{1}{2}\pi$

B. $\frac{1}{4}\pi$

C. π

D. 4π

【分析】先利用切线的性质得到 $\odot A$ 的半径为 1，再根据反比例函数图象的对称性得到点 B 的坐标为 $(-2, -1)$ ，同理得到 $\odot B$ 的半径为 1，则可判断 $\odot A$ 与 $\odot B$ 关于原点中心对称， $\odot A$ 的阴影部分与 $\odot B$ 空白的部分的面积相等，所以图中两个阴影部分面积的和等于 $\odot A$ 的面积，然后根据圆的面积公式计算.

【解答】解：∵ 点 A 的坐标为 $(2, 1)$ ，且 $\odot A$ 与 x 轴相切，

∴ $\odot A$ 的半径为 1，

∵ 点 A 和点 B 是正比例函数与反比例函数的图象的交点，

∴ 点 B 的坐标为 $(-2, -1)$ ，

同理得到 $\odot B$ 的半径为 1，

∴ $\odot A$ 与 $\odot B$ 关于原点中心对称，

∴ $\odot A$ 的阴影部分与 $\odot B$ 空白的部分完全重合，

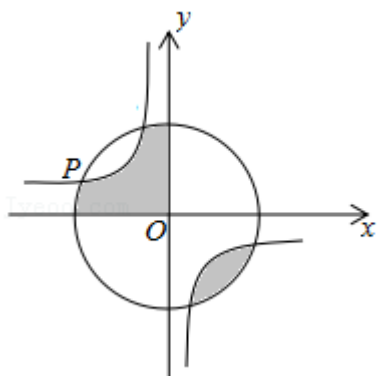
∴ $\odot A$ 的阴影部分与 $\odot B$ 空白的部分的面积相等，

∴ 图中两个阴影部分面积的和 $= \pi \cdot 1^2 = \pi$.

故选：C.

【点评】本题考查了反比例函数图象的对称性：反比例函数图象既是轴对称图形又是中心对称图形，对称轴分别是：①第二、四象限的角平分线 $y = -x$ ；②第一、三象限的角平分线 $y = x$ ；对称中心是：坐标原点.

【变式 8-2】如图，点 $P(-2a, a)$ 是反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象与 $\odot O$ 的一个交点，图中阴影部分的面积为 10π ，则该反比例函数的表达式为（ ）



A. $y = -\frac{8}{x}$

B. $y = -\frac{12}{x}$

C. $y = -\frac{14}{x}$

D. $y = -\frac{16}{x}$

【分析】根据圆的对称性以及反比例函数的对称性可得，阴影部分的面积等于圆的面积 $\frac{1}{4}$ ，即可求得圆的半径，再根据 P 在反比例函数的图象上，以及在圆上，即可求得 k 的值.

【解答】解：设圆的半径是 r ，根据圆的对称性以及反比例函数的对称性可得： $\frac{1}{4}\pi r^2 = 10\pi$.

解得： $r = 2\sqrt{10}$.

$\because$ 点 $P(-2a, a)$ 是反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0$) 与 $\odot O$ 的一个交点.

$$\therefore -2a^2 = k \text{ 且 } \sqrt{(-2a)^2 + a^2} = r.$$

$$\therefore a^2 = 8.$$

$$\therefore k = -2 \times 8 = -16,$$

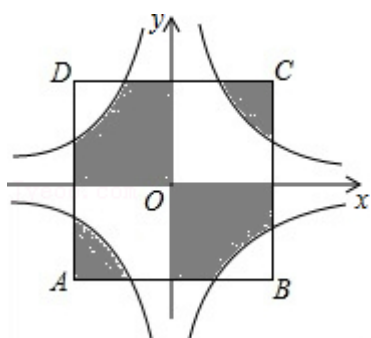
则反比例函数的解析式是： $y = -\frac{16}{x}$.

故选：D.

【点评】本题主要考查反比例函数图象的对称性的知识点，解决本题的关键是利用反比例函数的对称性得到阴影部分与圆之间的关系.

【变式 8-3】边长为 4 的正方形 $ABCD$ 的对称中心是坐标原点 O ， $AB \parallel x$ 轴， $BC \parallel y$ 轴，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$

与 $y = -\frac{\sqrt{2}}{x}$ 的图象均与正方形 $ABCD$ 的边相交，则图中的阴影部分的面积是（ ）



A. 2

B. 4

C. 8

D. 6

【分析】先根据两反比例函数的解析式确定出两函数图象之间的关系，再根据正方形 $ABCD$ 的对称中心是坐标原点 O 可知图中四个小正方形全等，反比例函数的图象与两坐标轴所围成的图形全等，故阴影部分的面积即为两个小正方形即大正方形面积的一半。

【解答】解：由两函数的解析可知：两函数的图象关于 x 轴对称。

∵ 正方形的对称中心是坐标原点 O ，

∴ 四图小正方形全等，每图小正方形的面积 $= \frac{1}{4} \times 4 \times 4 = 4$ ，

∴ 反比例函数的图象与两坐标轴所围成的图形全等，

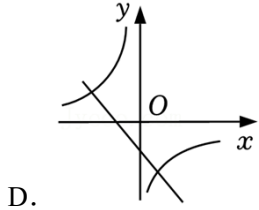
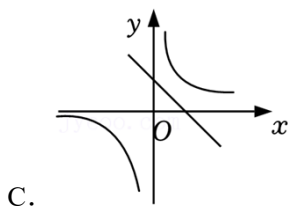
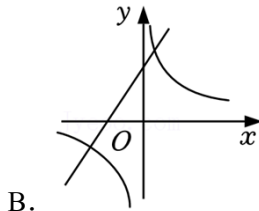
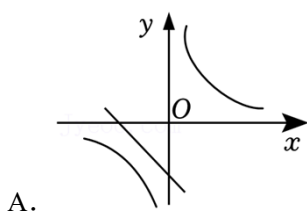
∴ 阴影部分的面积 $= 4 \times 2 = 8$ 。

故选：C。

【点评】本题考查的是关于 x 轴对称的反比例函数解析式的特点，解答此题的关键是根据函数解析式判断出两函数图象的特点，再根据正方形的面积即可解答。

题型 9：反比例函数与一次函数图像判断

例题 9. 函数 $y = \frac{k}{x}$ 和 $y = -kx + 2$ ($k \neq 0$) 在同一平面直角坐标系中的大致图象可能是（ ）



【分析】根据题目中函数的解析式，利用一次函数和反比例函数图象的特点解答本题.

【解答】解：在函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 和 $y = -kx + 2$ ($k \neq 0$) 中，

当 $k > 0$ 时，函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象位于第一、三象限，函数 $y = -kx + 2$ 的图象位于第一、二、四象限，故选项 A、B 错误，选项 C 正确，

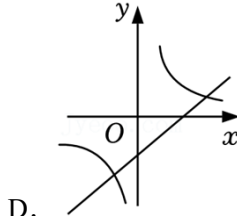
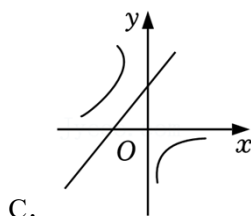
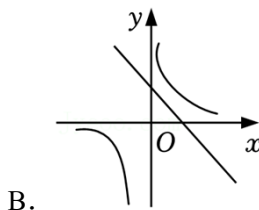
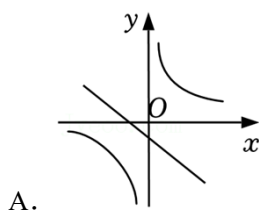
当 $k < 0$ 时，函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象位于第二、四象限，函数 $y = -kx + 2$ 的图象位于第一、二、三象限，故选项 D 错误，

故选：C.

【点评】本题考查反比例函数的图象、一次函数的图象，解答本题的关键是明确题意，利用分类讨论的数学思想解答.

【变式 9-1】在同一平面直角坐标系中，函数 $y = ax + b$ 与 $y = \frac{b}{ax}$ (其中 a, b 是常数， $ab \neq 0$) 的大致图象

是 ()



【分析】根据 a, b 的取值，分别判断出两个函数图象所过的象限，要注意分类讨论.

【解答】解：若 $a > 0, b > 0$,

则 $y = ax + b$ 经过一、二、三象限，反比例函数 $y = \frac{b}{ax}$ ($ab \neq 0$) 位于一、三象限，

若 $a > 0, b < 0$,

则 $y = ax + b$ 经过一、三、四象限，反比例函数 $y = \frac{b}{ax}$ ($ab \neq 0$) 位于二、四象限，

若 $a < 0, b > 0$,

则 $y = ax + b$ 经过一、二、四象限，反比例函数 $y = \frac{b}{ax}$ ($ab \neq 0$) 位于二、四象限，

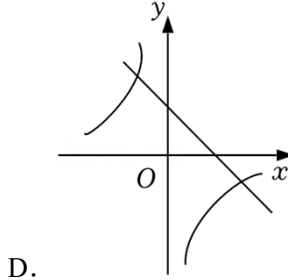
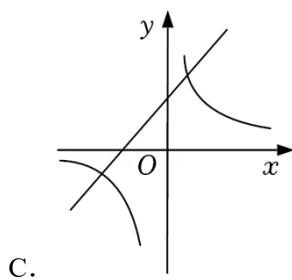
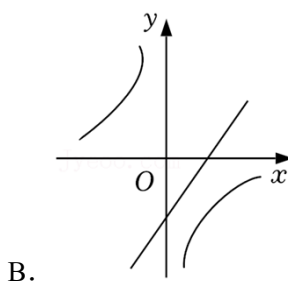
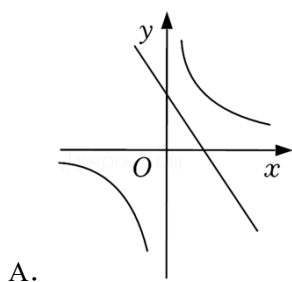
若 $a < 0, b < 0$,

则 $y = ax + b$ 经过二、三、四象限, 反比例函数 $y = \frac{b}{ax}$ ($ab \neq 0$) 位于一、三象限,

故选: A.

【点评】本题主要考查了一次函数和反比例函数的图象, 熟知一次函数、反比例函数的性质是解题的关键.

【变式 9-2】在同一平面直角坐标系中, 函数 $y = kx - k$ 与 $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0$) 的图象大致是 ()



【分析】 $k < 0$ 时的情况下, 根据一次函数和反比例函数图象的特点进行判断即可.

【解答】解: $\because k < 0$,

$\therefore$ 一次函数 $y = kx - k$ 经过一、二、四象限, 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过二、四象限,

故 D 选项的图象符合要求.

故选: D.

【点评】本题考查了反比例函数的图象, 一次函数的图象, 掌握当 $k < 0$ 时, 一次函数和反比例函数的图象都经过第二、四象限是解题的关键.

题型 10: 反比例函数与一次函数交点问题

【例题 10】如图, 正比例函数 $y = 2x$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象有一个交点为 $P(2, m)$.

(1) 求反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 函数表达式;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/918045137034006077>