

2023 学年第二学期徐汇区学习能力诊断卷

高三数学试卷

2024.4

考生注意：

1. 本场考试时间 120 分钟，试卷共 4 页，满分 150 分。

2. 每位考生应同时收到试卷和答题卷两份材料，答卷前，在答题卷上填写姓名、考号等相关信息。

3. 所有作答务必填涂在答题卷上与试卷题号对应的区域，不得错位，在试卷上作答一律不得分。

4. 用 2B 铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题。

一、填空题（本大题共有 12 题，满分 54 分，第 1-6 题每题 4 分，第 7-12 题每题 5 分）考生应在答题纸的相应位置直接填写结果。

1. 已知集合 $A = \{y | y = x^2 + 2\}$ ，集合 $B = \{x | x^2 - 4x + 3 \geq 0\}$ ，那么 $A \cap B =$ _____.

【答案】 $[3, +\infty)$

【解析】

【分析】 先求出集合 A ， B ，然后结合集合的交集运算即可求解。

【详解】 因为集合 $A = \{y | y = x^2 + 2\} = [2, +\infty)$ ，集合 $B = \{x | x^2 - 4x + 3 \geq 0\} = \{x | x \geq 3 \text{ 或 } x \leq 1\}$ ，

那么 $A \cap B = [3, +\infty)$ 。

故答案为： $[3, +\infty)$ 。

2. 已知复数 $z = \frac{1-i}{i}$ （ i 为虚数单位），则 $z \cdot \bar{z} =$ _____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 由复数除法求得 z 后，再根据复数的乘法计算。

【详解】 由已知 $z = \frac{1-i}{i} = \frac{(1-i)(-i)}{i \cdot (-i)} = -1-i$ ，

所以 $z \cdot \bar{z} = (-1-i)(-1+i) = 2$ 。

故答案为： 2。

3. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=1$, $\angle C=\frac{2\pi}{3}$, $\angle A=\frac{\pi}{6}$, 则 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为_____.

【答案】1

【解析】

【分析】由正弦定理求解.

【详解】由已知 $\angle B=\frac{\pi}{6}$, 设三角形外接圆半径为 R , 则 $2R=\frac{AC}{\sin B}=\frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}}=2$, 所以 $R=1$.

故答案为: 1.

4. 若正数 a 、 b 满足 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$, 则 $2a+b$ 的最小值为_____.

【答案】 $3+2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】根据基本不等式求解.

【详解】由已知 $2a+b=(2a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=3+\frac{2a}{b}+\frac{b}{a}\geq 3+2\sqrt{2}$, 当且仅当 $\frac{2a}{b}=\frac{b}{a}$, 即

$a=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$, $b=1+\sqrt{2}$ 时等号成立, 故所求最小值是 $3+2\sqrt{2}$.

故答案为: $3+2\sqrt{2}$.

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_n=\frac{3}{2}a_n-\frac{1}{2}$ (n 是正整数), 则 a_5 =_____.

【答案】81

【解析】

【分析】由已知结合数列的和与项的递推关系进行转化, 然后结合等比数列的通项公式即可求解.

【详解】因为 $S_n=\frac{3}{2}a_n-\frac{1}{2}$,

$n\geq 2$ 时, $S_{n-1}=\frac{3}{2}a_{n-1}-\frac{1}{2}$,

两式相减可得, $S_n-S_{n-1}=\frac{3}{2}(a_n-a_{n-1})=a_n$,

即 $a_n=3a_{n-1}$, $n\geq 2$,

因为 $S_1=\frac{3}{2}a_1-\frac{1}{2}$, 解得 $a_1=1$,

故数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 以 3 为公比的等比数列,

所以 $a_5=a_1q^4=3^4=81$.

故答案为：81.

6. 若圆 $x^2 + y^2 = 4$ 与圆 $x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$ 内切，则 a 等于_____.

【答案】 ± 1

【解析】

【分析】 根据两个圆内切时，圆心距和两个圆的半径之间的关系求解.

【详解】 圆 $x^2 + y^2 = 4$ ，圆心为 $(0, 0)$ ，半径为 2；

圆 $x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$ ，转化为标准形式： $(x - a)^2 + y^2 = 1$ ，即圆心为 $(a, 0)$ ，半径为 1；

当两圆内切时，圆心距 $\sqrt{(a - 0)^2 + (0 - 0)^2} = 2 - 1 = 1$ ，解得 $a = \pm 1$

故填： ± 1

【点睛】 本题考查了两个圆的位置关系，当两个圆内切时，圆心距等于两个圆的半径之差的绝对值.

7. 已知 $(x^3 + \frac{1}{x^2})^n$ 的二项展开式中各项系数和为 1024，则展开式中常数项的值为_____.

【答案】 210

【解析】

【分析】 依题意，可求得 $n = 10$ ，再利用 $(x^3 + \frac{1}{x^2})^{10}$ 的二项展开式的通项公式可求得答案.

【详解】 $(x^3 + \frac{1}{x^2})^n$ 的二项展开式中各项系数和为 1024，

即 $(1 + 1)^n = 1024$ ，

故 $n = 10$.

设 $(x^3 + \frac{1}{x^2})^{10}$ 的二项展开式的通项为 T_{r+1} ，则 $T_{r+1} = C_{10}^r x^{-2r} \cdot x^{3(10-r)} = C_{10}^r x^{30-5r}$ ，

令 $30 - 5r = 0$ ，得 $r = 6$ ，

故展开式中常数项的值为 $C_{10}^6 = C_{10}^4 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$.

故答案为：210.

8. 已知函数 $f(x) = x^3 + 2mx^2 - nx + m$ 在 $x = 1$ 处有极值 0，则 $m + n =$ _____.

【答案】 -7

【解析】

【分析】 由题可得 $\begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$ ，即可得答案.

【详解】 因为 $f(x) = x^3 + 2mx^2 - nx + m$ ，所以 $f'(x) = 3x^2 + 4mx - n$ ，依题意可得

$$\begin{cases} f(1)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+2m-n+m=0 \\ 3+4m-n=0 \end{cases} \cdot \text{解得} \begin{cases} m=-2 \\ n=-5 \end{cases},$$

经检验适合题意，所以 $m+n=-7$.

故答案为：-7

9. 同时抛掷三枚相同的均匀硬币，设随机变量 $X=1$ 表示结果中有正面朝上， $X=0$ 表示结果中没有正面朝上，则 $D[X]=$ _____.

【答案】 $\frac{7}{64}$

【解析】

【分析】先利用独立事件的概率乘法公式求出 $P(X=0)=\frac{1}{8}$ ， $P(X=1)=\frac{7}{8}$ ，再利用期望和方差公式求解.

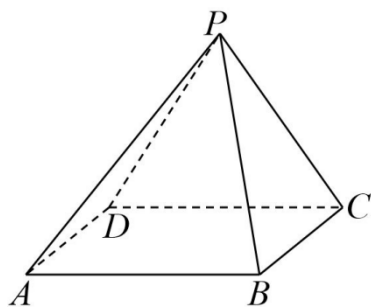
【详解】由题意可知， $P(X=0)=(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$ ， $P(X=1)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ ，

所以 $E(X)=0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{7}{8} = \frac{7}{8}$ ，

所以 $D(X)=\frac{1}{8} \times (0 - \frac{7}{8})^2 + \frac{7}{8} \times (1 - \frac{7}{8})^2 = \frac{7}{64}$.

故答案为： $\frac{7}{64}$.

10. 如图，将一个四棱锥的每一个顶点染一种颜色，并使同一条棱上的两端点异色，如果只有 4 种颜色可供使用，则不同的染色方法有_____种.



【答案】 72

【解析】

【分析】利用分步乘法计数原理以及分类加法计数原理即可求解.

【详解】下面分两种情况，即 C, A 同色与 C, A 不同色来讨论.

(1) P 的着色方法有 4 种， A 的着色方法有 3 种， B 的着色方法有 2 种， C, A 同色时， C 的着色方法为 1 种， D 的着色方法有 2 种.

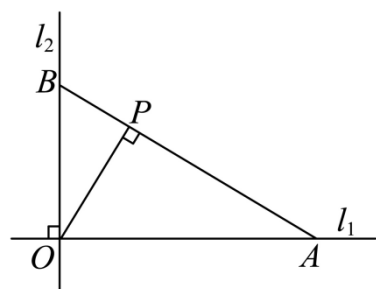
(2) P 的着色方法有 4 种， A 的着色方法有 3 种， B 的着色方法有 2 种.

C 与 A 不同色时 C 的着色方法有 1 种, D 的着色方法有 1 种,

综上, 两类共有 $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 + 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 48 + 24 = 72$ (种).

故答案为: 72

11. 如图, 两条足够长且互相垂直的轨道 l_1, l_2 相交于点 O , 一根长度为 8 的直杆 AB 的两端点 A, B 分别在 l_1, l_2 上滑动 (A, B 两点不与 O 点重合, 轨道与直杆的宽度等因素均可忽略不计), 直杆上的点 P 满足 $OP \perp AB$, 则 $\triangle OAP$ 面积的取值范围是_____.



【答案】 $(0, 6\sqrt{3}]$

【解析】

【分析】 令 $\angle OAB = x (0 < x < \frac{\pi}{2})$, 利用直角三角形边角关系及三角形面积公式求出 $\triangle OAP$ 的面积函数, 再利用导数求出值域即得.

【详解】 依题意, 设 $\angle OAB = x (0 < x < \frac{\pi}{2})$, 则 $OA = AB \cos x = 8 \cos x$, $AP = OA \cos x = 8 \cos^2 x$,

因此 $\triangle OAP$ 的面积 $f(x) = \frac{1}{2} OA \cdot AP \sin x = 32 \sin x \cos^3 x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

求得 $f'(x) = 32(\cos^4 x - 3 \sin^2 x \cos^2 x) = 32 \cos^4 x (1 - 3 \tan^2 x)$,

当 $0 < x < \frac{\pi}{6}$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $f'(x) < 0$, 即函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{6})$ 上递增, 在 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ 上递减,

因此 $f(x)_{\max} = f(\frac{\pi}{6}) = 32 \times (\frac{\sqrt{3}}{2})^3 \times \frac{1}{2} = 6\sqrt{3}$, 而 $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$, 则 $0 < f(x) \leq 6\sqrt{3}$,

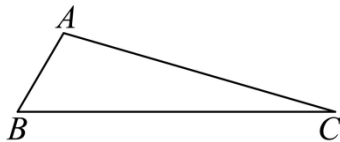
所以 $\triangle OAP$ 面积的取值范围是 $(0, 6\sqrt{3}]$.

故答案为: $(0, 6\sqrt{3}]$

12. 如图所示, 已知 $\triangle ABC$ 满足 $BC = 8, AC = 3AB$, P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点. 定义点集

$D = \left\{ P \mid \overrightarrow{AP} = 3\lambda \overrightarrow{AB} + \frac{1-\lambda}{3} \overrightarrow{AC}, \lambda \in \mathbf{R} \right\}$. 若存在点 $P_0 \in D$, 使得对任意 $P \in D$, 满足 $|\overrightarrow{AP}| \geq |\overrightarrow{AP_0}|$

恒成立，则 $|\vec{AP_0}|$ 的最大值为_____.



【答案】3

【解析】

【分析】延长 AB 到 M 满足 $\vec{AM} = 3\vec{AB}$ ，取 AC 的靠近 A 的三等分点 N ，连接 MN ，由向量共线定理得 P, M, N 三点共线，从而 $|\vec{AP_0}|$ 表示 $\triangle AMN$ 的边 MN 上的高，利用正弦定理求得 $\triangle AMN$ 的面积的最大值，从而可得结论.

【详解】延长 AB 到 M 满足 $\vec{AM} = 3\vec{AB}$ ，取 AC 的靠近 A 的三等分点 N ，连接 MN ，如图，

$$\vec{AP} = 3\lambda \vec{AB} + \frac{1-\lambda}{3} \vec{AC} = \lambda \cdot 3\vec{AB} + (1-\lambda) \frac{\vec{AC}}{3} = \lambda \vec{AM} + (1-\lambda) \vec{AN},$$

所以 P, M, N 三点共线，

又存在点 $P_0 \in D$ ，使得对任意 $P \in D$ ，满足 $|\vec{AP}| \geq |\vec{AP_0}|$ 恒成立，则 AP_0 的长表示 A 到直线 MN 的距离，即 $\triangle AMN$ 的边 MN 上的高，设 $|\vec{AP_0}| = h$ ，

由 $|\vec{AC}| = 3|\vec{AB}|$ 得 $|\vec{AC}| = |\vec{AM}|$ ， $|\vec{AB}| = |\vec{AN}|$ ， $\angle A$ 公用，因此 $\triangle ABC \cong \triangle ANM$ ，

所以 $|\vec{MN}| = |\vec{BC}| = 8$ ，

$\triangle AMN$ 中，设 $\angle ANM = \theta$ ，由正弦定理得 $\frac{|\vec{AM}|}{\sin \theta} = \frac{|\vec{AN}|}{\sin M} = \frac{|\vec{MN}|}{\sin A}$ ， $\angle MAN$ 记为角 A ，

所以 $\sin \theta = 3 \sin M$ ， $|\vec{AM}| = \frac{8 \sin \theta}{\sin A}$ ， $|\vec{AN}| = \frac{8 \sin M}{\sin A}$ ，

所以 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} |\vec{AM}| |\vec{AN}| \sin A = \frac{32 \sin \theta \sin M}{\sin A} = \frac{96 \sin^2 M}{\sin(M + \theta)}$

$$= \frac{96 \sin^2 M}{\sin M \cos \theta + \cos M \sin \theta} = \frac{96 \sin^2 M}{\sin M \cos \theta + 3 \cos M \sin M} = \frac{96 \sin M}{\cos \theta + 3 \cos M},$$

若 θ 不是钝角，则

$$S_{\triangle ABC} = \frac{96 \sin M}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta} + 3\sqrt{1 - \sin^2 M}} = \frac{96 \sin M}{\sqrt{1 - 9 \sin^2 M} + \sqrt{9 - 9 \sin^2 M}},$$

又 $\sin \theta = 3 \sin M \leq 1$ ，所以 $\sin M \leq \frac{1}{3}$ ，即 $0 < \sin M \leq \frac{1}{3}$ ，

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{96}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 M} - 9} + 3\sqrt{\frac{1}{\sin^2 M} - 1}},$$

设 $t = \frac{1}{\sin^2 M}$ ，则 $t \geq 9$ ， $S_{\triangle ABC} = \frac{96}{\sqrt{t-9} + 3\sqrt{t-1}}$ ，它是减函数，

所以 $t=9$ 时， $(S_{\triangle ABC})_{\max} = 8\sqrt{2}$ ，

若 θ 是钝角，则

$$S_{\triangle ABC} = \frac{96 \sin M}{3\sqrt{1-\sin^2 M} - \sqrt{1-\sin^2 \theta}} = \frac{96 \sin M}{\sqrt{9-9\sin^2 M} - \sqrt{1-9\sin^2 M}},$$

$$\frac{96}{3\sqrt{\frac{1}{\sin^2 M} - 1} - \sqrt{\frac{1}{\sin^2 M} - 9}}$$

设 $t = \frac{1}{\sin^2 M}$ ，则 $t \geq 9$ ， $S_{\triangle ABC} = \frac{96}{3\sqrt{t-1} - \sqrt{t-9}}$ ，

$$\text{令 } f(t) = 3\sqrt{t-1} - \sqrt{t-9}, \text{ 则 } f'(t) = \frac{3}{2\sqrt{t-1}} - \frac{1}{2\sqrt{t-9}} = \frac{3\sqrt{t-9} - \sqrt{t-1}}{2\sqrt{(t-1)(t-9)}},$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow t = 10,$$

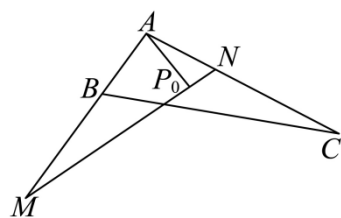
$9 \leq t < 10$ 时， $f'(t) < 0$ ， $f(t)$ 递减， $t > 9$ 时 $f'(t) > 0$ ， $f(t)$ 递增，

所以 $t=10$ 时， $f(t)_{\min} = 8$ ， $(S_{\triangle ABC}) = 12$ ，

综上， $(S_{\triangle ABC}) = 12$ ，

$$\text{此时 } h_{\max} = \frac{2S_{\triangle AMN}}{|MN|} = 3.$$

故答案为：3.



【点睛】方法点睛：本题考查向量的线性运算，考查三角形的面积，解题方法其一是根据向量共线定理得出 P

点在一条直线，问题转化为求三角形高的最大值，从而求三角形面积的最大值，解题方法其二是利用正弦定理求三角形的面积，本题中注意在用平方关系转化时，需要根据 $\angle ANM$ 是否为钝角分类讨论，才能正确求解（本题用海伦公式求三角形的面积方法较简便）。

二、选择题（本大题共有 4 题，满分 18 分，第 13-14 题每题 4 分，第 15-16 题每题 5 分）每题有且只有一个正确选项.考生应在答题纸的相应位置，将代表正确选项的小方格涂黑.

13. 在下列函数中，值域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数是（ ）

- A. $y = x^{\frac{1}{3}}$ B. $y = \lg|x|$ C. $y = e^x + e^{-x}$ D. $y = x^3 \cos x$

【答案】B

【解析】

【分析】根据函数的奇偶性的定义判断，利用对数函数性质和基本不等式确定偶函数的值域.

【详解】ACD 三个选项中函数定义域是 $\mathbf{R}$ ，

函数 $y = \lg|x|$ 的定义域是 $\{x|x \neq 0\}$ ， $\lg|-x| = \lg|x|$ ， $y = \lg|x|$ 为偶函数，由对数函数性质知其值域为 $\mathbf{R}$ ，B 符合；

$(-x)^{\frac{1}{3}} = -x^{\frac{1}{3}}$ ，因此 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 是奇函数，A 不符；

$e^{-x} + e^{-(-x)} = e^{-x} + e^x = e^x + e^{-x}$ ，因此 $y = e^x + e^{-x}$ 是偶函数，但 $y = e^x + e^{-x} \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} = 2$ ，当且仅当 $x=0$ 时取等号，因此函数值域不是 $\mathbf{R}$ ，C 不符；

$(-x)^3 \cos(-x) = -x^3 \cos x$ ， $y = x^3 \cos x$ 是奇函数，D 不符.

故选：B .

14. 为了研究 y 关于 x 的线性相关关系，收集了 5 组样本数据（见下表）：

x	1	2	3	4	5
y	0.5	0.9	1	1.1	1.5

若已求得一元线性回归方程为 $y = \text{\$}x + 0.34$ ，则下列选项中正确的是（ ）

- A. $\text{\$} = 0.21$
- B. 当 $x=8$ 时， y 的预测值为 2.2
- C. 样本数据 y 的第 40 百分位数为 1
- D. 去掉样本点 (3,1) 后， x 与 y 的样本相关系数 r 不会改变

【答案】D

【解析】

【分析】由表格数据求出样本点的中心坐标，代入可得 $\hat{a}$ 的值由此即可判断 A，进一步可得回归方程，由此即可验算 B 选项，由百分位数的概念即可判断 C，由相关系数公式即可判断 D.

【详解】 $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3, \bar{y} = \frac{0.5+0.9+1+1.1+1.5}{5} = 1$ ，所以样本点的中心坐标为 $(3, 1)$ ，

将它代入 $y = \hat{a}x + 0.34$ 得， $3\hat{a} + 0.34 = 1$ ，解得 $\hat{a} = 0.22$ ，故 A 错误；

对于 B，当 $x = 8$ 时， y 的预测值为 $y = 0.22 \times 8 + 0.34 = 2.1$ ，故 B 错误；

对于 C，样本数据 y 的第 40 百分位数为 $\frac{0.9+1}{2} = 0.95$ ，故 C 错误；

对于 D，由相关系数公式可知，去掉样本点 $(3, 1)$ 后， x 与 y 的样本相关系数 r 不会改变，故 D 正确.

故选：D.

15. 已知函数 $y = f(x)$ ，其中 $f(x) = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ ，实数 $\omega > 0$ ，下列选项中正确的是（ ）

A. 若 $\omega = 2$ ，函数 $y = f(x)$ 关于直线 $x = \frac{5}{12}\pi$ 对称

B. 若 $\omega = \frac{1}{2}$ ，函数 $y = f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上是增函数

C. 若函数 $y = f(x)$ 在 $[-\pi, 0]$ 上最大值为 1，则 $\omega \leq \frac{4}{3}$

D. 若 $\omega = 1$ ，则函数 $y = |f(x)|$ 的最小正周期是 2π

【答案】C

【解析】

【分析】求出 $f(\frac{5}{12}\pi)$ 即可判断选项 A；由正弦函数的单调性即可判断 B；由正弦函数的性质可得关于 ω 的不等式，从而可求出 ω 的取值范围，即可判断 C；判断 $|f(x+\pi)| = |f(x)|$ ，即可判断 D.

【详解】对于 A，若 $\omega = 2$ ，则 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$ ，

$f(\frac{5}{12}\pi) = 2\sin(2 \times \frac{5}{12}\pi + \frac{\pi}{6}) = 2\sin\pi = 0$ ，不是最值，

所以 $f(x)$ 不关于直线 $x = \frac{5}{12}\pi$ 对称，故 A 错误；

对于 B，若 $\omega = \frac{1}{2}$ ，则 $f(x) = 2\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6})$ ，

当 $x \in [0, \pi]$ 时， $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \in [\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$ ，因为正弦函数 $y = \sin x$ 在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$ 上不单调，

所以函数 $y = f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上不是增函数，故 B 错误；

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/918113100026006063>