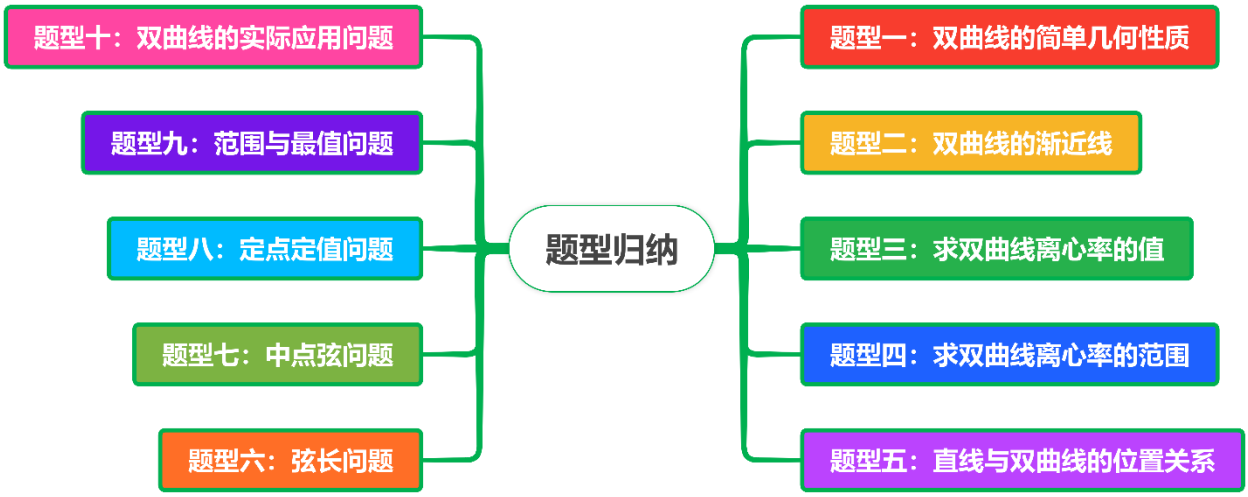
3．2．2 双曲线的几何性质

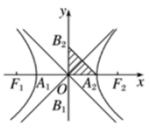
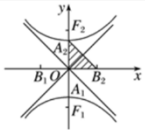
01 学习目标

课程标准	学习目标
能类比椭圆性质的研究，利用方程推出双曲线的一些几何性质，进一步体会数形结合思想.	（1）掌握双曲线的几何性质. （2）理解双曲线离心率的定义、取值范围和渐近线方程.

02 思维导图



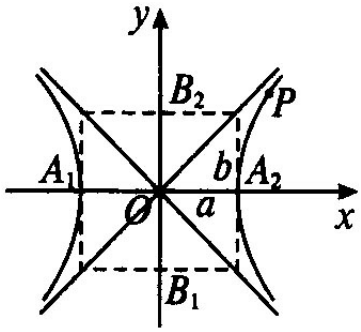
双曲线的几何性质

标准方程		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$
图形			
性质	范围	$x\geqslant a$ 或 $x\leqslant -a$	$y\leqslant -a$ 或 $y\geqslant a$
	对称性	对称轴：坐标轴，对称中心：原点	
	顶点	$(-a,0)$，$(a,0)$	$(0,-a)$，$(0,a)$
	轴长	实轴长$=2a$，虚轴长$=2b$ 实半轴长$=a$，虚半轴长$=b$	
	离心率	$e=\frac{c}{a}>1$	
	渐近线	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{a}{b}x$

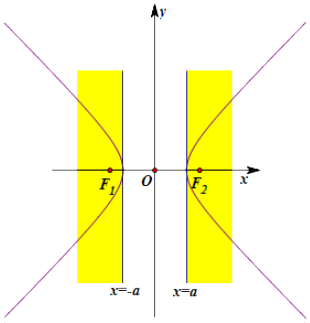
03 知识清单

知识点 01　双曲线的简单几何性质

双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的简单几何性质



范围



Q$\frac{x^2}{a^2}\geq 1$，即$x^2\geq a^2$

$\therefore x\geq a$ 或 $x\leq -a$

双曲线上所有的点都在两条平行直线$x=-a$和$x=a$的两侧，是无限延伸的．因此双曲线上点的横坐标满足$x\leq -a$或$x\geq a$．

对称性

对于双曲线标准方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$），把$x$换成$-x$，或把$y$换成$-y$，或把$x$、$y$同时换成$-x$、$-y$，方程都不变，所以双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）是以$x$轴、$y$轴为对称轴的轴对称图形，且是以原点为对称中心的中心对称图形，这个对称中心称为双曲线的中心．

顶点

①双曲线与它的对称轴的交点称为双曲线的顶点．

②双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）与坐标轴的两个交点即为双曲线的两个顶点，坐标分别为$A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$，顶点是双曲线两支上的点中距离最近的点．

③两个顶点间的线段A_1A_2叫作双曲线的实轴；设$B_1(0,-b)$，$B_2(0,b)$为y轴上的两个点，则线段B_1B_2叫做双曲线的虚轴．实轴和虚轴的长度分别为$|A_1A_2|=2a$，$|B_1B_2|=2b$．a叫做双曲线的实半轴长，b叫做双曲线的虚半轴长．

①双曲线只有两个顶点，而椭圆有四个顶点，不能把双曲线的虚轴与椭圆的短轴混淆．

②双曲线的焦点总在实轴上.

③实轴和虚轴等长的双曲线称为等轴双曲线.

离心率

①双曲线的焦距与实轴长的比叫做双曲线的离心率，用 e 表示，记作 $e=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{c}{a}$.

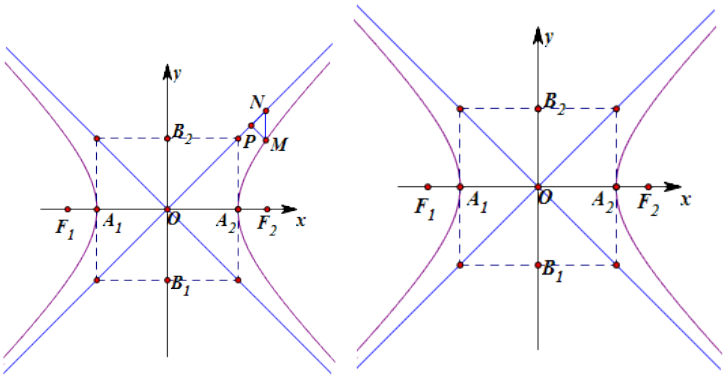
②因为 $c>a>0$，所以双曲线的离心率 $e=\dfrac{c}{a}>1$.

由 $c^2=a^2+b^2$，可得 $\dfrac{b}{a}=\sqrt{\dfrac{c^2-a^2}{a^2}}=\sqrt{(\dfrac{c}{a})^2-1}=\sqrt{e^2-1}$，所以 $\dfrac{b}{a}$ 决定双曲线的开口大小，$\dfrac{b}{a}$ 越大，e 也越大，双曲线开口就越开阔．所以离心率可以用来表示双曲线开口的大小程度.

③等轴双曲线 $a=b$，所以离心率 $e=\sqrt{2}$.

渐近线

经过点 A_2、A_1 作 y 轴的平行线 $x=\pm a$，经过点 B_1、B_2 作 x 轴的平行线 $y=\pm b$，四条直线围成一个矩形（如图），矩形的两条对角线所在直线的方程是 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$.



我们把直线 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ 叫做双曲线的渐近线；双曲线与它的渐近线无限接近，但永不相交.

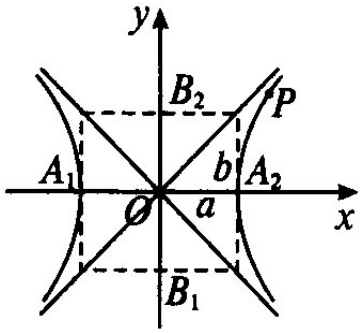
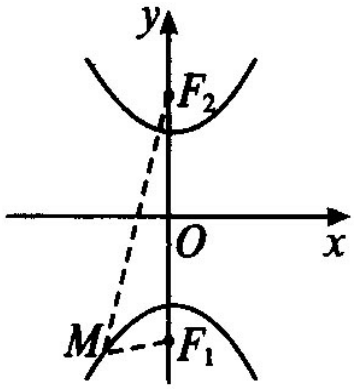
$$|MN|=\left|\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{b}{a}x\right|=\frac{b}{a}\left|\sqrt{x^2-a^2}-x\right|=\frac{ab}{\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|}\to 0$$

【即学即练 1】（多选题）（2024·高二课时练习）双曲线 $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的顶点坐标是（　）

A．$(5,0)$　　B．$(-5,0)$　　C．$(0,3)$　　D．$(0,-3)$

知识点 02　双曲线两个标准方程几何性质的比较

标准方程	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$	$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$

图形			
性质	焦点	$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$，$F_2(0,c)$
	焦距	$\lvert F_1F_2\rvert=2c\ (c=\sqrt{a^2+b^2})$	$\lvert F_1F_2\rvert=2c\ (c=\sqrt{a^2+b^2})$
	范围	$\{x\mid x\le -a或x\ge a\}$，$y\in R$	$\{y\mid y\le -a或y\ge a\}$，$x\in R$
	对称性	关于 x 轴、y 轴和原点对称	
	顶点	$(\pm a,0)$	$(0,\pm a)$
	轴	实轴长$=2a$，虚轴长$=2b$	
	离心率	$e=\dfrac{c}{a}\ (e>1)$	
	渐近线方程	$y=\pm\dfrac{b}{a}x$	$y=\pm\dfrac{a}{b}x$

知识点诠释：双曲线的焦点总在实轴上，因此已知标准方程，判断焦点位置的方法是：看 x^2、y^2 的系数，如果 x^2 项的系数是正的，那么焦点在 x 轴上；如果 y^2 项的系数是正的，那么焦点在 y 轴上.

对于双曲线，a 不一定大于 b，因此不能像椭圆那样通过比较分母的大小来判定焦点在哪一条坐标轴上.

【即学即练 2】（多选题）（2024·广东深圳·高二校考阶段练习）已知双曲线 $M:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的焦距为 4，焦点到渐近线的距离是 1，则下列说法正确的是（　）

A．M 的离心率为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

B．M 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$

C．M 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$

D．直线 $x+y-2=0$ 经过 M 的一个焦点

知识点 03　双曲线的渐近线

（1）已知双曲线方程求渐近线方程：

若双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，则其渐近线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0\Rightarrow\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}x$

已知双曲线方程，将双曲线方程中的“常数”换成“0”，然后因式分解即得渐近线方程.

（2）已知渐近线方程求双曲线方程：

若双曲线渐近线方程为$mx\pm ny=0$，则可设双曲线方程为$m^2x^2-n^2y^2=\lambda$，根据已知条件，求出λ即可.

（3）与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$有公共渐近线的双曲线

与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$有公共渐近线的双曲线方程可设为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda(\lambda\neq0)$（$\lambda>0$，焦点在$x$轴上，$\lambda<0$，焦点在$y$轴上）

（4）等轴双曲线的渐近线

等轴双曲线的两条渐近线互相垂直，为$y=\pm x$，因此等轴双曲线可设为$x^2-y^2=\lambda(\lambda\neq0)$.

【即学即练 3】（2024·陕西商洛·高二校考期末）如图 1，北京冬奥会火种台以“承天载物”为设计理念，创意灵感来自中国传统青铜礼器一尊的曲线造型，基座沉稳，象征“地载万物”，顶部舒展开阔，寓意迎接纯洁的奥林匹克火种．如图 2，一种尊的外形近似为某双曲线的一部分绕着虚轴旋转所成的曲面，尊高 63cm，上口直径为 40cm，底部直径为 26cm，最小直径为 24cm，则该双曲线的渐近线与实轴所成锐角的正切值为_____.



图1

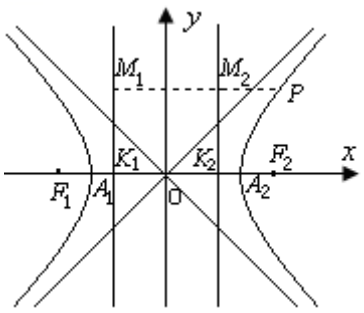


图2

知识点 04　双曲线中 a，b，c 的几何意义及有关线段的几何特征：

双曲线标准方程中，a、b、c三个量的大小与坐标系无关，是由双曲线本身的形状大小所确定的，分别表示双曲线的实半轴长、虚半轴长和半焦距长，均为正数，且三个量的大小关系为：$c>b>0$，$c>a>0$，且$c^2=b^2+a^2$.

双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$，如图：



（1）实轴长$|A_1A_2|=2a$，虚轴长$2b$，焦距$|F_1F_2|=2c$，

（2）离心率：$e=\dfrac{|PF_1|}{|PM_1|}=\dfrac{|PF_2|}{|PM_2|}=\dfrac{|A_1F_1|}{|A_1K_1|}=\dfrac{|A_2F_2|}{|A_2K_2|}=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}\Rightarrow e>1$；

（3）顶点到焦点的距离：$|A_1F_1|=|A_2F_2|=c-a$，$|A_1F_2|=|A_2F_1|=a+c$；

（4）ΔPF_1F_2 中结合定义 $\big||PF_1|-|PF_2|\big|=2a$ 与余弦定理，将有关线段 $|PF_1|$、$|PF_2|$、$|F_1F_2|$ 和角结合起来.

（5）与焦点三角形 ΔPF_1F_2 有关的计算问题时，常考虑到用双曲线的定义及余弦定理（或勾股定理）、三角形面积公式 $S_{\Delta PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin\angle F_1PF$ 相结合的方法进行计算与解题，将有关线段 $|PF_1|$、$|PF_2|$、$|F_1F_2|$，有关角 $\angle F_1PF_2$ 结合起来，建立 $|PF_1|-|PF_2|$、$|PF_1|\cdot|PF_2|$ 之间的关系.

【即学即练 4】（2024·全国·高二专题练习）已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的焦距为 $2c$，F_1,F_2 为其左右两个焦点，直线 l 经过点 $(0,b)$ 且与渐近线平行，若 l 上存在第一象限的点 P 满足 $|PF_1|-|PF_2|=2b$，则双曲线 C 离心率的取值范围为（　）

A．$(1,\sqrt{2})$　　B．$(\sqrt{2},\sqrt{3})$

C．$(1,\sqrt{3})$　　D．$(\sqrt{2},+\infty)$

知识点 05　直线与双曲线的位置关系判断

将双曲线方程 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 与直线方程 $l:y=kx+b$ 联立消去 y

得到关于 x 的一元二次方程 $\left(b^2-a^2k^2\right)x^2-2a^2mkx-a^2m^2-a^2b^2=0$，

1、当 $b^2-a^2k^2=0$，即 $k=\pm\dfrac{b}{a}$ 时，直线 l 与双曲线的渐近线平行，直线 l 与双曲线只有一个交点；

2、当 $b^2-a^2k^2\neq0$，即 $k\neq\pm\dfrac{b}{a}$ 时，设该一元二次方程的判别式为 Δ，

若 $\Delta>0$，直线与双曲线相交，有两个公共点；

若 $\Delta=0$，直线与双曲线相切，有一个公共点；

若 $\Delta<0$，直线与双曲线相离，没有公共点；

注意：直线与双曲线有一个公共点时，可能相交或相切.

【即学即练 5】（2024·全国·高二课堂例题）过点 $P\left(\sqrt{7},5\right)$ 且与双曲线 $\dfrac{x^2}{7}-\dfrac{y^2}{25}=1$ 有且只有一个公共点的直线有几条？分别求出它们的方程.

04 题型精讲

题型一：双曲线的简单几何性质

【典例 1-1】（多选题）（2024·高二·四川德阳·期末）双曲线 C：$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$的左右顶点分别为 A、B，P、Q 两点在 C 上，且关于 x 轴对称（　）

A．以 C 的焦点和顶点分别为顶点和焦点的椭圆方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

B．双曲线 C 的离心率为$\frac{3\sqrt{5}}{5}$

C．直线 AP 与 BQ 的斜率之积为$-\frac{4}{5}$

D．双曲线 C 的焦点到渐近线的距离为 2

【典例 1-2】（多选题）（2024·高二·安徽亳州·期中）已知双曲线$C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$焦距长为 6，则（　）

A．$b=2$　　B．C 的离心率为$\frac{3}{2}$

C．C 的渐近线为$y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$　　D．直线$y=x$与 C 相交所得弦长为$2\sqrt{10}$

【变式 1-1】（多选题）（2024·高二·全国·课后作业）已知抛物线$C_1:y^2=mx(m>0)$与双曲线$C_2:x^2-\frac{y^2}{3}=1$有相同的焦点，点$P\left(2,y_0\right)$在抛物线C_1上，则下列结论正确的有（　）

A．双曲线C_2的离心率为 2　　B．双曲线C_2的渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$

C．$m=8$　　D．点 P 到抛物线C_1的焦点的距离为 4

【变式 1-2】（多选题）（2024·高二·云南曲靖·期末）已知点 P 在左、右焦点分别为F_1,F_2的双曲线$C:\frac{x^2}{4}-y^2=1$上，$\left|PF_1\right|+\left|PF_2\right|=12$，则（　）

A．渐近线方程为$y=\pm2x$　　B．离心率为$\frac{\sqrt{5}}{2}$

C．$\cos\angle F_1PF_2=\frac{15}{16}$　　D．$S_{\triangle PF_1F_2}=\sqrt{31}$

【变式 1-3】（多选题）（2024·高二·江苏宿迁·开学考试）已知双曲线 C：$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{m}=1$，则下列说法正确的是（　）

A．双曲线 C 的实轴长为 2

B．若双曲线 C 的两条渐近线相互垂直，则$m=2$

C．若$\left(2,0\right)$是双曲线 C 的一个焦点，则$m=2$

D．若$m=2$，则双曲线 C 上的点到焦点距离最小值为 2

【变式 1-4】（多选题）（2024·湖北·一模）某数学兴趣小组的同学经研究发现，反比例函数$y=\frac{1}{x}$的图象是双曲线，设其焦点为M,N，若 P 为其图象上任意一点，则（　）

A．$y=-x$ 是它的一条对称轴　　B．它的离心率为 $\sqrt{2}$

C．点 $(2,2)$ 是它的一个焦点　　D．$\big||PM|-|PN|\big|=2\sqrt{2}$

题型二：双曲线的渐近线

【典例 2-1】（2024·高二·江苏常州·期中）已知双曲线 C 与曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 有公共的渐近线，且经过点 $A(-3,4\sqrt{2})$，则 C 的方程为____.

【典例 2-2】（2024·高二·湖北武汉·阶段练习）设直线 $y=3x+t(t\neq 0)$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）两条渐近线分别交于点 A，B，若点 $P(4t,0)$ 满足 $|PA|=|PB|$，则该双曲线的渐近线方程是_____

【变式 2-1】（2024·高二·贵州安顺·期末）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 和双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 在第一象限的交点为 P，椭圆 C 的右焦点为 F，$\overrightarrow{OP}$ 在 $\overrightarrow{OF}$ 方向上的投影向量为 $\frac{\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{OF}$，则椭圆 C 的离心率为_____；双曲线 E 的渐近线方程为_____.

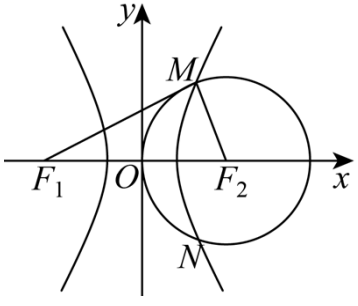
【变式 2-2】（2024·高二·山东烟台·期末）已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 F_1 关于 C 的一条渐近线的对称点为 M，且 $|MF_1|=2|MF_2|$，则 C 的渐近线方程为_____.

【变式 2-3】（2024·高二·上海·期中）已知双曲线 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右顶点为 A，点 P,Q 都在 Γ 上，且关于 y 轴对称，若直线 AP,AQ 的斜率之积为 -2，则 Γ 的渐近线方程为_____.

【变式 2-4】（2024·高二·福建南平·期末）已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,P 为 C 上一点且 $\angle F_1PF_2=60^\circ,|PF_1|=2|PF_2|$，则该双曲线渐近线的斜率为_____.

题型三：求双曲线离心率的值

【典例 3-1】（2024·高二·湖南常德·阶段练习）如图，已知 F_1、F_2 分别是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，现以 F_2 为圆心作一个通过双曲线中心的圆并且交双曲线 C 于 M、N 两点．若直线 MF_1 是圆 F_2 的切线，则该双曲线的离心率为（　）



A．$\sqrt{3}+1$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$2\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{3}+2$

【典例 3-2】（2024·高二·云南昆明·阶段练习）已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为$F(c,0)$，若 a，b，c 成等比数列，则 C 的离心率为（　）

A．$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

【变式 3-1】（2024·高二·浙江衢州·期末）已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的焦点为$F_1,F_2$，以$F_1F_2$为直径的圆与双曲线的一个交点为 M，且有$\tan\angle MF_1F_2=\frac{1}{2}$，则双曲线的离心率（　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．$\sqrt{5}$

【变式 3-2】（2024·高二·云南临沧·期末）已知以坐标轴为对称轴，原点为对称中心，其中一条渐近线为$y=\sqrt{3}x$，则此双曲线的离心率为（　）

A．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B．2　　C．2 或$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　D．2 或$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【变式 3-3】（2024·高二·全国·课后作业）已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过焦点$F_2$且垂直于$x$轴的弦为$AB$，若$\angle AF_1B=90^\circ$，则双曲线的离心率为（　）

A．$\frac{5-\sqrt{2}}{2}$　　B．$\sqrt{5}-1$　　C．$\sqrt{2}+1$　　D．$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

【变式 3-4】（2024·高二·天津·期中）已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，$O$为坐标原点$F_1$、$F_2$为其左、右焦点，点$G$在$C$的渐近线上，$F_2G\perp OG$，且$\sqrt{5}|OG|=|GF_1|$，则该双曲线的离心率为（　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{6}$　　D．2

【变式 3-5】（2024·高二·河南·期中）在平面直角坐标系 xOy 中，F_1,F_2为双曲线$E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，$|F_1F_2|=4$，$P$为$E$右支上异于顶点的一点，直线 PM 平分$\angle F_1PF_2$，且$F_1M\perp PM$，$|OM|=1$，则 E 的离心率为（　）

A．$\sqrt{3}$　　B．2　　C．$\frac{3}{2}$　　D．4

【变式 3-6】（2024·高二·江苏南京·阶段练习）已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，过$F_1$作直线$l$与双曲线的左、右两支分别交于$A,B$两点，设$P$为线段$AB$的中点，若$|OP|=|PF_2|=\frac{\sqrt{2}}{4}|F_1F_2|$，则双曲线的离心率为（　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\frac{4\sqrt{2}}{3}$　　C．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{2\sqrt{5}}{3}$

题型四：求双曲线离心率的范围

【典例 4-1】（2024·江西·二模）已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,其左右顶点分别为 A_1,A_2,P 在双曲线右支上运动,若 $\angle A_1PA_2$ 的角平分线交 x 轴于 D 点,A_2 关于 PD 的对称点为 A_3,若仅存在 2 个 P 使直线 A_3D 与 E 仅有一个交点,则 E 离心率的范围为(　)

A．$(1,\sqrt{2})$　　B．$(\sqrt{2},2)$　　C．$(\sqrt{2},+\infty)$　　D．$(2,+\infty)$

【典例 4-2】（2024·全国·模拟预测）在平面直角坐标系 xOy 中，已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 左、右顶点为 A，B，若该双曲线上存在点 P，使得 PA,PB 的斜率之和为 1，则该双曲线离心率的范围为（　）

A．$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$　　B．$\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　C．$\left(\frac{\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$　　D．$\left(1,\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

【变式 4-1】（2024·高三·四川成都·开学考试）已知 F_1，F_2 分别为双曲线 C 的左、右焦点，点 P 是右支上一点，且 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$，设 $\angle PF_1F_2=\theta$，当 θ 的范围为 $\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right)$ 时，双曲线 C 离心率的范围为（　）

A．$\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{3}\right)$　　B．$\left(1,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$　　C．$(1,\sqrt{3})$　　D．$\left(\frac{\sqrt{6}}{2},2\right)$

【变式 4-2】（2024·全国·模拟预测）已知椭圆和双曲线有相同的焦点 F_1、F_2，它们的离心率分别为 e_1、e_2，点 P 为它们的一个交点，且 $\angle F_1PF_2=\frac{2\pi}{3}$，则 $e_1^2+e_2^2$ 的范围是（　）

A．$\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$　　B．$\left[\frac{2+\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$

C．$(2,+\infty)$　　D．$(3,+\infty)$

【变式 4-3】（2024·高二·北京房山·期末）已知 F_1，F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，若在右支上存在点 A，使得点 F_2 到直线 AF_1 的距离为 $\sqrt{3}a$，则双曲线离心率 e 的范围是（　）

A．$\left(1,\frac{5}{2}\right)$　　B．$\left(1,\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$　　C．$\left(\frac{\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$　　D．$\left(\frac{\sqrt{7}}{2},+\infty\right)$

【变式 4-4】（2024·高二·湖南邵阳·期末）设 F_1,F_2 是椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1(a_1>b_1>0)$ 与双曲线 $C_2:\frac{x^2}{a_2^2}-\frac{y^2}{b_2^2}=1(a_2>0,b_2>0)$ 的公共焦点，曲线 C_1,C_2 在第一象限内交于点 M，$\angle F_1MF_2=90°$，若椭圆的离心率 $e_1\in\left[\frac{\sqrt{6}}{3},1\right)$，则双曲线的离心率 e_2 的范围是（　）

A．$\left(1,\sqrt{2}\right]$　　B．$\left(1,\sqrt{3}\right]$　　C．$\left[\sqrt{3},+\infty\right)$　　D．$\left[\sqrt{2},+\infty\right)$

【变式 4-5】（2024·高二·湖南邵阳·期末）设 F_1,F_2 为双曲线 $C_1:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 与椭圆 C_2 的公共的左右焦点，它们在第一象限内交于点 P,$\triangle PF_1F_2$ 是以线段 PF_1 为底边的等腰三角形，若椭圆 C_2 的离心率范围为 $\left[\frac{2}{5},\frac{5}{12}\right]$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/925003113024011333