专题07 不等式恒成立问题

【方法技巧与总结】

1.利用导数研究不等式恒成立问题的求解策略：

（1）通常要构造新函数，利用导数研究函数的单调性，求出最值，从而求出参数的取值范围；

（2）利用可分离变量，构造新函数，直接把问题转化为函数的最值问题；

（3）根据恒成立或有解求解参数的取值时，一般涉及分离参数法，但压轴试题中很少碰到分离参数后构造的新函数能直接求出最值点的情况，进行求解，若参变分离不易求解问题，就要考虑利用分类讨论法和放缩法，注意恒成立与存在性问题的区别.

2.利用参变量分离法求解函数不等式恒（能）成立，可根据以下原则进行求解：

（1）$\forall x \in D$，$m \le f(x) \Leftrightarrow m \le f(x)_{\min}$；

（2）$\forall x \in D$，$m \ge f(x) \Leftrightarrow m \ge f(x)_{\max}$；

（3）$\exists x \in D$，$m \le f(x) \Leftrightarrow m \le f(x)_{\max}$；

（4）$\exists x \in D$，$m \ge f(x) \Leftrightarrow m \ge f(x)_{\min}$.

3.不等式的恒成立与有解问题，可按如下规则转化：

一般地，已知函数$y = f(x)$，$x \in [a,b]$，$y = g(x)$，$x \in [c,d]$.

（1）若$\forall x_1 \in [a,b]$，$\forall x_2 \in [c,d]$，有$f(x_1) < g(x_2)$成立，则$f(x)_{\max} < g(x)_{\min}$；

（2）若$\forall x_1 \in [a,b]$，$\exists x_2 \in [c,d]$，有$f(x_1) < g(x_2)$成立，则$f(x)_{\max} < g(x)_{\max}$；

（3）若$\exists x_1 \in [a,b]$，$\exists x_2 \in [c,d]$，有$f(x_1) < g(x_2)$成立，则$f(x)_{\min} < g(x)_{\max}$；

（4）若$\forall x_1 \in [a,b]$，$\exists x_2 \in [c,d]$，有$f(x_1) = g(x_2)$成立，则$f(x)$的值域是$g(x)$的值域的子集.

4.法则1 若函数$f(x)$和$g(x)$满足下列条件：

(1)$\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$**及**$\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$；

(2)在点a的去心邻域$(a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon)$内，$f(x)$与$g(x)$可导且$g'(x) \ne 0$；

(3)$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$，

那么$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$。

法则2 若函数$f(x)$和$g(x)$满足下列条件：(1)$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$**及**$\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$；

(2)$\exists A > 0$，**$f(x)$和$g(x)$在$(-\infty, A)$与$(A, +\infty)$上可导，且$g'(x) \ne 0$；**

(3)$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$，

那么$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$。

法则 3 若函数$f(x)$和$g(x)$满足下列条件：

(1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ 及 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$；

(2)在点a的去心邻域$(a-\varepsilon,a)\cup(a,a+\varepsilon)$内，$f(x)$与$g(x)$可导且$g'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$，

那么$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$。

注意：利用洛必达法则求未定式的极限是微分学中的重点之一，在解题中应注意：

（1）将上面公式中的$x\to a$，$x\to+\infty,x\to-\infty$，$x\to a^{+}$，$x\to a^{-}$洛必达法则也成立。

（2）洛必达法则可处理$\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$0\cdot\infty$，1^{∞}，∞^{0}，0^{0}，$\infty-\infty$型。

（3）在着手求极限以前，首先要检查是否满足$\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$0\cdot\infty$，1^{∞}，∞^{0}，0^{0}，$\infty-\infty$型定式，否则滥用洛必达法则会出错。当不满足三个前提条件时，就不能用洛必达法则，这时称洛必达法则不适用，应从另外途径求极限。

（4）若条件符合，洛必达法则可连续多次使用，直到求出极限为止。

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$，如满足条件，可继续使用洛必达法则。

【题型归纳目录】

题型一：直接法

题型二：端点恒成立

题型三：端点不成立

题型四：分离参数之全分离，半分离，换元分离

题型五：洛必达法则

题型六：同构法

题型七：必要性探路

题型八：**max**，**min**函数问题

题型九：构造函数技巧

题型十：双变量最值问题

【典例例题】

题型一：直接法

例 1．已知函数$f(x)=alnx-x^{2}+(2a-1)x$，$(a\ldots 0)$．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x) \leqslant 0$，求 a 的取值范围．

例 2．已知函数 $f(x)=a^{2} lnx-x^{2}+ax$ ．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x) \leqslant 0$，求 a 的取值范围．

例 3．已知函数 $f(x)=(e^{x})^{2}+(1-4a)e^{x}-2ax(a \geqslant 0)$ ．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x) \geqslant 0$，求 a 的取值范围．

题型二：端点恒成立

例 4．（2023·黑龙江·模拟预测（文））已知函数 $f\left(x\right)=(x-2)e^{x}-\frac{a}{2}x^{2}+ax+2, a \in R$．

（1）当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）当 $x \geq 0$ 时，恒有 $f(x) \geq 0$，求实数 a 的最小值.

例 5．（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f(x)=a\ln x+bx(a,b \in R)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处取得极值，且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $x-y+1=0$ 垂直.

（1）求实数 a,b 的值；

（2）若 $\forall x \in [1,+\infty)$，不等式 $f(x) \leq (m-2)x-\frac{m}{x}$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

例 6．（2023·黑龙江·模拟预测（理））已知函数 $f(x)=x\ln x+kx-3k$，求：

（1）当 $k=1$ 时，求曲线 $f(x)$ 在点 $(1，f(1))$ 处的切线方程；

（2）当 $x>3$ 时，总有 $f(x)>1$，求整数 k 的最小值.

题型三：端点不成立

例 7．（2023·辽宁大连·高三月考）已知函数 $f\left(x\right)=ax\mathrm{e}^{x}-\left(x+1\right)^{2}$（其中 $a \in \mathrm{R}$， e 为自然对数的底数）.

（1）讨论函数$f\left(x\right)$的单调性；

（2）当$x>0$时，$f\left(x\right)>\ln x-x^2-x-3$，求$a$的取值范围.

例 8．（2023·陕西安康·高三期中（理））已知函数$f\left(x\right)=a^2e^{x-1}-\ln x-a$，$a>0$.

（1）若$a=1$，证明：$f(x)\geq 0$；

（2）若$f(x)\geq 0$恒成立，求a的取值范围.

例 9．（2023·江苏镇江·高三期中）已知函数$f(x)=\ln x$，$g(x)=kx^2-2x(k\in R)$.

（1）若$y=f(x)$在$x=1$处的切线也是$y=g(x)$的切线，求k的值；

（2）若$x\in(0,+\infty)$，$f(x)\leq g(x)$恒成立，求k的最小整数值.

题型四：分离参数之全分离，半分离，换元分离

例 10．已知函数$f(x)=e^x+ax^2-x$.

（1）当$a=1$时，讨论$f(x)$的单调性；

（2）当$x\geqslant 0$时，$f(x)\geqslant\dfrac{1}{2}x^3+1$，求$a$的取值范围.

例 11．已知函数$f(x)=x^4+x^2+(a-1)x+1$.

（1）当$a=1$时，讨论$f(x)$的单调性；

（2）当$x>0$时，$f(x)\leqslant x^4+e^x$，求a的取值范围.

例 12．已知函数$f(x)=e^x-ax^2-x-1$.

（Ⅰ）当$a=-1$时，讨论$f(x)$的单调性；

（Ⅱ）当$x\geqslant 0$时，$f(x)\geqslant\dfrac{1}{2}x^3-2ax^2$恒成立，求实数$a$的取值范围.

题型五：洛必达法则

例 13：已知函数$f(x)=a\ln x+bx(a,b\in R)$在$x=\dfrac{1}{2}$处取得极值，且曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线与直线$x-y+1=0$垂直.

(1)求实数 a,b 的值；

(2)若 $\forall x\in[1,+\infty)$，不等式 $f(x)\le(m-2)x-\frac{m}{x}$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

例 14.设函数 $f(x)=1-e^{-x}$.

（1）证明：当 $x>-1$ 时，$f(x)\ge\frac{x}{x+1}$；

（2）设当 $x\ge0$ 时，$f(x)\le\frac{x}{ax+1}$，求 a 的取值范围.

例 15.设函数 $f(x)=\frac{\sin x}{2+\cos x}$．如果对任何 $x\geqslant0$，都有 $f(x)\leqslant ax$，求 a 的取值范围.

题型六：同构法

例 16．已知函数 $f(x)=ae^{x}-ln(x+2)+lna-2$，

（1）若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极值，求 a 的值及函数的单调区间.

（2）请在下列两问中选择一问作答，答题前请标好选择．如果多写按第一个计分.

①若 $f(x)\geqslant0$ 恒成立，求 a 的取值范围；

②若 $f(x)$ 仅有两个零点，求 a 的取值范围.

例 17.若对任意 $x>0$，恒有 $a\left(e^{ax}+1\right)\geqslant2\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x$，求实数 a 的最小值

例 18.已知函数 $f(x)=e^x-a\ln(ax-a)+a(a>0)$，若关于 x 的不等式 $f(x)>0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围

例 19.对任意 $x>0$，不等式 $2ae^{2x}-\ln x+\ln a\geqslant 0$ 恒成立，求实数 a 的最小值

题型七：必要性探路

例 20.是否存在正整数 a，使得 $e^x-ax\geq x^2\ln x$ 对一切 $x>0$ 恒成立?试求出 a 的最大值.

例 21. $x>2,k<\dfrac{x\ln x+x}{x-2}$,求 k 的最大整数值.

例 22.求使得 $xe^x-2x+k>0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立的最小整数 k

例 23.（2023•苏州三模）已知函数 $f(x)=(x-1)e^x-\dfrac{a}{2}x^2$，其中 $a\in R$．

（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的图象能否与 x 轴相切？若能，求出实数 a，若不能，请说明理由；

（Ⅱ）求最大的整数 a，使得对任意 $x_1\in R$，$x_2\in(0,+\infty)$，不等式 $f(x_1+x_2)-f(x_1-x_2)>-2x_2$ 恒成立．

题型八：max，min 函数问题

例 24.（2023·云南师大附中高三月考（文））已知函数 $f(x)=(x-1)e^x-\dfrac{1}{2}x^2+1$，$g(x)=\sin x-ax$，其中 $a\in\mathbf{R}$．

（1）证明：当 $x\geq 1$ 时，$f(x)\geq 0$；当 $x<1$ 时，$f(x)<0$；

（2）用 $\max\{m,n\}$ 表示 m，n 中的最大值，记 $F(x)=\max\{f(x),g(x)\}$.是否存在实数 a，对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$F(x)\geq 0$ 恒成立.若存在，求出 a；若不存在，请说明理由.

例 25.（2023·云南师大附中高三月考（理））已知函数 $f(x)=(x-2)e^{x-1}-\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{1}{2}$，$g(x)=ax-\sin x-\ln(x+1)$，其中 $a\in\mathbf{R}$．

（1）证明：当 $x\geq 1$ 时，$f(x)\geq 0$；当 $x<1$ 时，$f(x)<0$；

（2）用 $\max\{m,n\}$ 表示 m，n 中的最大值，记 $F(x)=\max\{f(x),g(x)\}$.是否存在实数 a，对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$F(x)\geqslant 0$ 恒成立.若存在，求出 a；若不存在，请说明理由.

例 26.（2023·广东·顺德一中高三开学考试）已知函数 $f(x)=(x-4)e^{x-3}-\dfrac{1}{2}x^2+3x-\dfrac{7}{2}$，$g(x)=ae^x+\cos x$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性，并求不等式 $f(x)>0$ 的解集；

（2）若 $a=1$，证明：当 $x>0$ 时，$g(x)>2$；

（3）用 $\max\{m,n\}$ 表示 m，n 中的最大值，设函数 $h(x)=\max\{f(x),g(x)\}$，若 $h(x)\geq 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围.

题型九：构造函数技巧

例 27. 已知函数 $f(x)=mxlnx-1$，$m\neq 0$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $g(x)=x^2-\dfrac{2}{e}x$，且关于 x 的不等式 $f(x)\leqslant g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，其中 e 是自然对数的底数，求实数 m 的取值范围.

例 28. 已知关于 x 的函数 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 与 $h(x)=kx+b(k$，$b\in R)$ 在区间 D 上恒有 $f(x)\geqslant h(x)\geqslant g(x)$.

（1）若 $f(x)=x^2+2x$，$g(x)=-x^2+2x$，$D=(-\infty,+\infty)$，求 $h(x)$ 的表达式；

（2）若 $f(x)=x^2-x+1$，$g(x)=klnx$，$h(x)=kx-k$，$D=(0,+\infty)$，求 k 的取值范围；

（3）若 $f(x)=x^4-2x^2$，$g(x)=4x^2-8$，$h(x)=4(t^3-t)x-3t^4+2t^2(0<|t|\leqslant\sqrt{2})$，$D=[m$，$n]\subset[-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}]$，求证：$n-m\leqslant\sqrt{7}$.

例 29. 已知函数 $f(x)=e^x-ex^2+ax(a\in R)$.

（1）若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调，求 a 的取值范围.

（2）若 $y=f(x)+exlnx$ 的图象恒在 x 轴上方，求 a 的取值范围.

题型十：双变量最值问题

例 30．（2023·山西晋中·三模（理））已知函数$f(x)=\ln x$， $g(x)=ax^2+bx+1$，其中$a,b\in\mathbf{R}$．

（1）当$a=0$时，直线$y=g(x)$与函数$y=f(x)$的图象相切，求b的值；

（2）当$a\neq 0$时，若对任意$x>0$，都有$f(x)\le g(x)$恒成立，求$\dfrac{b}{a}$的最小值．

例 31．（2023·浙江台州·三模）已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x+(1+x)^a+\dfrac{a}{1+x}-a-2, g(x)=bx^2+x$，其中$a\in\mathbf{R}$，$b\in\mathbf{R}$．($e=2.718281828\cdots$ 为自然对数的底数)

（1）求$f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程；

（2）若$a\ge 4$时，$f(x)\ge g(x)$在$(0,+\infty)$上恒成立.当b取得最大值时，求$M=\dfrac{b+12}{a}$的最小值.

例 32．（2023·河南·郑州一中模拟预测（文））已知函数$f(x)=ae^x-x$，

（1）求$f(x)$的单调区间，

（2）若关于x不等式$ae^x\ge x+b$对任意$x\in\mathbf{R}$和正数b恒成立，求$\dfrac{b}{a}$的最小值.

【过关测试】

1．（2023·北京·景山学校模拟预测）已知函数$f\left(x\right)=x\ln x+ax+2$．

(1)当$a=0$时，求$f\left(x\right)$的极值；

(2)若对任意的$x\in\left[1,\mathrm{e}^2\right]$，$f\left(x\right)\le 0$恒成立，求实数$a$的取值范围．

2．（2023·四川省峨眉第二中学校高二阶段练习（文））已知$a\in\mathrm{R}$，函数$f\left(x\right)=ax-1-\ln x$．

(1)讨论$f\left(x\right)$的单调性；

(2)当$a=1$时，若对$\forall x\in(0,+\infty),f\left(x\right)\geq bx-2$恒成立,求实数$b$的最大值.

3．（2023·全国·高三专题练习）已知$a\in\mathrm{R}$，函数$f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}+ax^{2}$，$g\left(x\right)$是$f\left(x\right)$的导函数．

(1)当$a>0$时，求证：存在唯一的$x_0\in\left(-\dfrac{1}{2a},0\right)$，使得$g\left(x_0\right)=0$；

(2)若存在实数a，b，使得$f\left(x\right)\geq b$恒成立，求$\boldsymbol{a-b}$的最小值．

4．（2023·新疆克拉玛依·三模（文））已知函数$f\left(x\right)=x\ln x$，$g(x)=-x^{2}+ax-3\left(a\in R\right)$.

(1)求函数$f(x)$的单调递增区间；

(2)若对任意$x\in\left(0,+\infty\right)$，不等式$f\left(x\right)\geq\dfrac{1}{2}g\left(x\right)$恒成立，求$a$的取值范围.

5．（2023·四川省泸县第二中学模拟预测（文））已知函数$f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-ax$（其中$e$为自然对数的底数，$\mathrm{e}\approx2.718\ldots$）.

(1)当$a=2$时，求函数$y=f\left(x\right)$在点$\left(0,f\left(0\right)\right)$处的切线方程；

(2)若$f\left(x\right)\geq1$恒成立，求实数a的值．

6．（2023·江西·临川一中模拟预测（文））函数$f(x)=\mathrm{e}^{x}+\sin x-a$的图像与直线$2x-y=0$相切.

(1)求实数a的值；

(2)当$x\in[0,+\infty)$时，$f(x)\geq m\sin 2x$，求实数m的取值范围.

7．（2023·四川·威远中学校高二阶段练习（文））已知函数$f\left(x\right)=2\ln x+\dfrac{a}{x}-2$，其中$a\geq0$

(1)讨论函数$y=f\left(x\right)$的单调性；

(2)若函数$f\left(x\right)\geq1$在$\left[1,+\infty\right)$上恒成立，求实数a的取值范围

8．（2023·辽宁·鞍山一中模拟预测）已知函数$f(x)=\mathrm{e}^{x}-\dfrac{1}{2}kx^{2}-\sin x-1$，函数$g\left(x\right)=\dfrac{1}{2}x^{2}+\cos x-1$.

(1)求函数$g\left(x\right)$的单调区间.

(2)$x\geq0$时，不等式$f\left(x\right)\geq0$恒成立，求实数k的取值范围．

9．（2023·吉林·延边二中高二期中）设a为实数，函数$f\left(x\right)=x^3-3x^2+a$，$g\left(x\right)=x\ln x$.

(1)若函数$f\left(x\right)$与x轴有三个不同交点，求a的范围

(2)对于$\forall x_1\in\left[1,3\right]$，$\forall x_2\in\left[\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right]$，都有$f\left(x_1\right)\geq g\left(x_2\right)$，试求实数$a$的取值范围.

10．（2023·陕西·西北工业大学附属中学模拟预测（文））已知函数$f\left(x\right)=2^{-x+1}+x^2-2x+1+\left(x-1\right)\ln 2$.

(1)求函数$f\left(x\right)$的单调区间；

(2)若对$\forall x_1$、$x_2\in\left[0,2\right]$，使$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\leq 2-\frac{1}{a}$恒成立，求$a$的取值范围.

专题 07 不等式恒成立问题

【方法技巧与总结】

1.利用导数研究不等式恒成立问题的求解策略：

（1）通常要构造新函数，利用导数研究函数的单调性，求出最值，从而求出参数的取值范围；

（2）利用可分离变量，构造新函数，直接把问题转化为函数的最值问题；

（3）根据恒成立或有解求解参数的取值时，一般涉及分离参数法，但压轴试题中很少碰到分离参数后构造的新函数能直接求出最值点的情况，进行求解，若参变分离不易求解问题，就要考虑利用分类讨论法和放缩法，注意恒成立与存在性问题的区别.

2.利用参变量分离法求解函数不等式恒（能）成立，可根据以下原则进行求解：

（1）$\forall x\in D$，$m\le f\left(x\right)\Leftrightarrow m\le f\left(x\right)_{\min}$；

（2）$\forall x\in D$，$m\ge f\left(x\right)\Leftrightarrow m\ge f\left(x\right)_{\max}$；

（3）$\exists x\in D$，$m\le f\left(x\right)\Leftrightarrow m\le f\left(x\right)_{\max}$；

（4）$\exists x\in D$，$m\ge f\left(x\right)\Leftrightarrow m\ge f\left(x\right)_{\min}$.

3.不等式的恒成立与有解问题，可按如下规则转化：

一般地，已知函数 $y=f\left(x\right)$，$x\in\left[a,b\right]$，$y=g\left(x\right)$，$x\in\left[c,d\right]$.

（1）若 $\forall x_1\in\left[a,b\right]$，$\forall x_2\in\left[c,d\right]$，有 $f\left(x_1\right)<g\left(x_2\right)$ 成立，则 $f\left(x\right)_{\max}<g\left(x\right)_{\min}$；

（2）若 $\forall x_1\in\left[a,b\right]$，$\exists x_2\in\left[c,d\right]$，有 $f\left(x_1\right)<g\left(x_2\right)$ 成立，则 $f\left(x\right)_{\max}<g\left(x\right)_{\max}$；

（3）若 $\exists x_1\in\left[a,b\right]$，$\exists x_2\in\left[c,d\right]$，有 $f\left(x_1\right)<g\left(x_2\right)$ 成立，则 $f\left(x\right)_{\min}<g\left(x\right)_{\max}$；

（4）若 $\forall x_1\in\left[a,b\right]$，$\exists x_2\in\left[c,d\right]$，有 $f\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)$ 成立，则 $f\left(x\right)$ 的值域是 $g\left(x\right)$ 的值域的子集.

4.法则 1 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下列条件：

(1) $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)=0$ **及** $\lim\limits_{x\to a}g\left(x\right)=0$；

(2)在点 a 的去心邻域 $\left(a-\varepsilon,a\right)\cup\left(a,a+\varepsilon\right)$ 内，$f(x)$ 与 $g(x)$ 可导且 $g'(x)\neq0$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}=l$，

那么 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}=l$。

法则 2 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下列条件：(1) $\lim\limits_{x\to\infty}f\left(x\right)=0$ **及** $\lim\limits_{x\to\infty}g\left(x\right)=0$；

(2) $\exists A>0$，$f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $\left(-\infty, A\right)$ 与 $\left(A,+\infty\right)$ 上可导，且 $g'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}=l$，

那么 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}=l$。

法则 3 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下列条件：

(1) $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)=\infty$ 及 $\lim\limits_{x\to a}g\left(x\right)=\infty$；

(2) 在点 a 的去心邻域 $\left(a-\varepsilon,a\right)\cup\left(a,a+\varepsilon\right)$ 内，$f(x)$ 与 $g(x)$ 可导且 $g'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}=l$，

那么 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}=l$。

注意：利用洛必达法则求未定式的极限是微分学中的重点之一，在解题中应注意：

（1）将上面公式中的 $x\to a$，$x\to+\infty, x\to-\infty$，$x\to a^{+}$，$x\to a^{-}$ 洛必达法则也成立。

（2）洛必达法则可处理 $\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$0\cdot\infty$，1^{∞}，∞^{0}，0^{0}，$\infty-\infty$ 型。

（3）在着手求极限以前，首先要检查是否满足 $\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$0\cdot\infty$，1^{∞}，∞^{0}，0^{0}，$\infty-\infty$ 型定式，否则滥用洛必达法则会出错。当不满足三个前提条件时，就不能用洛必达法则，这时称洛必达法则不适用，应从另外途径求极限。

（4）若条件符合，洛必达法则可连续多次使用，直到求出极限为止。

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f''\left(x\right)}{g''\left(x\right)}$，如满足条件，可继续使用洛必达法则。

【题型归纳目录】

题型十：双变量最值问题

【典例例题】

题型一：直接法

例1．已知函数 $f(x)=alnx-x^2+(2a-1)x$，$(a\geq 0)$．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)\leq 0$，求 a 的取值范围．

【解答】解：（1）$f'(x)=\dfrac{a}{x}-2x+(2a-1)=-\dfrac{2x^2-(2a-1)x-a}{x}=-\dfrac{(2x+1)(x-a)}{x}$，

①$a=0$ 时，$f'(x)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，

②$a>0$ 时，由 $f'(x)<0$，解得：$x<a$，

由 $f'(x)>0$，解得：$0<x<a$，

故 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 单调递增，在 $(a,+\infty)$ 单调递减；

（2）由（1）可得，当 $a=0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，

$\therefore f(x)=-x^2-x<0$，

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 单调递增，在 $(a,+\infty)$ 单调递减，

$\therefore f(x)_{max}=f$（a）$=alna-a^2+(2a-1)a=alna+a^2-a=a(lna+a-1)$，

令 g（a）$=lna+a-1$，$a>0$，

易知函数 g（a）在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

又 g（1）$=0$，

$\therefore$ 当 $0<a\leq 1$ 时，g（a）≤ 0，即 $f(x)_{max}\leq 0$，满足题意，

当 $a>1$ 时，g（a）>0，即 $f(x)_{max}>0$，不满足题意，

综上所述 a 的取值范围为 $[0，1]$．

例2．已知函数 $f(x)=a^2lnx-x^2+ax$．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)\leq 0$，求 a 的取值范围．

【解答】解：（1）$f(x)=a^2lnx-x^2+ax$，定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=\dfrac{a^2}{x}-2x+a=-\dfrac{2x^2-ax-a^2}{x}=-\dfrac{(x-a)(2x+a)}{x}$．

1° 当 $a>0$ 时，$x\in(0,a)$，$f'(x)>0$；$x\in(a,+\infty)$，$f'(x)<0$；$f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递增，$f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递减；

2° 当 $a=0$ 时，$f(x)=-x^2$，此时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

3° 当 $a<0$ 时， $x\in(0,\ -\dfrac{a}{2})$， $f'(x)>0$； $x\in(-\dfrac{a}{2},\ +\infty)$， $f'(x)<0$； $f(x)$ 在 $(0,\ -\dfrac{a}{2})$ 上单调递增， $f(x)$ 在 $(-\dfrac{a}{2},\ +\infty)$ 上单调递减.

（2）由（1）可知：

1° 当 $a>0$ 时， $f(x)_{max}=f(a)=a^2lna-a^2+a^2=a^2lna\leqslant 0$， 解得 $0<a\leqslant 1$；

2° 当 $a=0$ 时， $f(x)=-x^2\leqslant 0$， 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立；

3° 当 $a<0$ 时， $f(x)_{max}=f(-\dfrac{a}{2})=a^2ln(-\dfrac{a}{2})-\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{a^2}{2}=a^2ln(-\dfrac{a}{2})-\dfrac{3a^2}{4}\leqslant 0$，

即 $ln(-\dfrac{a}{2})\leqslant\dfrac{3}{4}$， 解得 $-2e^{\frac{3}{4}}\leqslant a<0$.

综上所述， $-2e^{\frac{3}{4}}\leqslant a\leqslant 1$.

例 3．已知函数 $f(x)=(e^x)^2+(1-4a)e^x-2ax(a\geqslant 0)$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)\geqslant 0$，求 a 的取值范围.

【解答】解：（1） $f'(x)=(2e^x+1)(e^x-2a)$，

当 $a=0$ 时， $e^x-2a\geqslant 0$， 又 $2e^x+1>0$，

故 $f'(x)\geqslant 0$， $f(x)$ 递增，

当 $a>0$ 时， 令 $f'(x)>0$， 解得： $x>ln2a$，

令 $f'(x)<0$， 解得： $x<ln2a$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,ln2a)$ 递减， 在 $(ln2a,+\infty)$ 递增；

（2） $f(x)\geqslant 0$， 即 $(e^x)^2+(1-4a)e^x-2ax\geqslant 0$，

$a=0$ 时， $f(x)=(e^x)^2+e^x$ 递增， $f(x)>0$ 恒成立，

$a>0$ 时， $f(x)_{min}=f(ln2a)=(2a)^2+(1-4a)2a-2aln2a\geqslant 0$，

故 $1-2a-ln2a\geqslant 0$，

令 g（a） $=1-2a-ln2a$， g'（a） $=-2-\dfrac{1}{a}<0$，

故 g（a）递减， 又 $g(\dfrac{1}{2})=0$，

故 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$，

综上： $a\in[0，\ \dfrac{1}{2}]$.

题型二：端点恒成立

例 4．（2023·黑龙江·模拟预测（文））已知函数 $f\left(x\right)=(x-2)e^x-\frac{a}{2}x^2+ax+2,a\in R$.

（1）当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）当 $x\geq 0$ 时，恒有 $f(x)\geq 0$，求实数 a 的最小值.

答案：

（1）增区间：$(-\infty,0)$，$(1,+\infty)$，减区间：$(0,1)$

（2）$2e-4$

分析：

（1）求出函数导数，求解不等式 $f'\left(x\right)>0$ 和 $f'\left(x\right)<0$ 可得；

（2）易得 $a\leq 1$ 不符合题意，当 $a>1$，令 $f'(x)=0\Rightarrow x_1=1,x_2=\ln a$，讨论 $1<a<e$ 的情况即可求出.

（1）

当 $a=1$ 时，$f(x)=(x-2)e^x-\frac{x^2}{2}+x+2$，$f'(x)=(x-1)(e^x-1)$，

令 $f'\left(x\right)>0\Rightarrow x<0$ 或 $x>1$，$f'\left(x\right)<0\Rightarrow 0<x<1$，

$\therefore f\left(x\right)$ 的增区间：$(-\infty,0)$，$(1,+\infty)$，减区间：$(0,1)$；

（2）

$f'(x)=(x-1)(e^x-a)$

①当 $a\leq 1$ 时：$e^x-a\geq 0$，

$\therefore x\in(0,1)$ 时：$f^{'}\left(x\right)<0,f(x)$ 单调递减 $\Rightarrow f(x)<f(0)=0$，不符合题意.

②当 $a>1$ 时：令 $f'(x)=0\Rightarrow x_1=1,x_2=\ln a$，

若 $1<a<e$，则 $x_1>x_2$，令 $f'\left(x\right)>0\Rightarrow 0<x<\ln a$ 或 $x>1$，$f'\left(x\right)<0\Rightarrow \ln a<x<1$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\ln a)$ 单调递增，在 $(\ln a,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

又Q $f(0)=0$，$\therefore$ 只需 $f(1)\geq 0\Rightarrow a\geq 2e-4$，

综上，a 的最小值为 $2e-4$.

例 5．（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f(x)=a\ln x+bx(a,b\in R)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处取得极值，且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $x-y+1=0$ 垂直.

（1）求实数 a,b 的值；

（2）若 $\forall x\in[1,+\infty)$，不等式 $f(x)\leq(m-2)x-\frac{m}{x}$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

答案：

（1）$a=1,b=-2$

（2）$m \ge \frac{1}{2}$

分析：

（1）根据 $f(x)=a\ln x+bx$， 求得 $f'(x)=\frac{a}{x}+b$，再根据 $f(x)=a\ln x+bx(a,b\in R)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处取得极值，求得 a，b 的关系，然后由曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $x-y+1=0$ 垂直求解.

（2）将不等式 $f(x)\le(m-2)x-\frac{m}{x}$ 恒成立，转化为 $\ln x\le m(x-\frac{1}{x})$ 恒成立，由 $x=1$ 时，恒成立；当 $x>1$ 时，$m\ge\frac{x\ln x}{x^2-1}$ 恒成立，令 $h(x)=\frac{x\ln x}{x^2-1}$，求得其最大值即可.

（1）

解：$\because$ $f(x)=a\ln x+bx$，

$\therefore$ $f'(x)=\frac{a}{x}+b$；

函数 $f(x)=a\ln x+bx(a,b\in R)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处取得极值，

$\therefore$ $f'(\frac{1}{2})=2a+b=0$；

又$\because$ 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $x-y+1=0$ 垂直，

$\therefore$ $f'(1)=a+b=-1$；

解得：$a=1,b=-2$；

（2）

不等式 $f(x)\le(m-2)x-\frac{m}{x}$ 恒成立可化为 $\ln x\le mx-\frac{m}{x}$，

即 $\ln x\le m(x-\frac{1}{x})$；

当 $x=1$ 时，恒成立；当 $x>1$ 时，$m\ge\frac{x\ln x}{x^2-1}$ 恒成立，

令 $h(x)=\frac{x\ln x}{x^2-1}$，

则 $h'(x)=\frac{(\ln x+1)(x^2-1)-2x\cdot x\ln x}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2-x^2\ln x-\ln x-1}{(x^2-1)^2}$；

令 $m(x)=x^2-x^2\ln x-\ln x-1$，

则 $m'(x)=2x-2x\ln x-x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-2x^2\ln x-1}{x}$；

令 $n(x)=x^2-2x^2\ln x-1$，

则 $n'(x)=2x-4x\ln x-2x=-4x\ln x<0$；

得 $n(x)=x^2-2x^2\ln x-1$ 在 $(1,+\infty)$ 是减函数，

故 $n(x)<n(1)=0$，

进而 $m'(x)<0$

（或 $m'(x)=x-2x\ln x-\dfrac{1}{x}$， $m''(x)=-2\ln x-1+\dfrac{1}{x^2}<0$，

得 $m'(x)=x-2x\ln x-\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 是减函数，进而 $m'(x)<0$ ）.

可得： $m(x)<m(1)=0$，故 $h'(x)<0$，所以 $h(x)=\dfrac{x\ln x}{x^2-1}$ 在 $(1,+\infty)$ 是减函数，

而 m 要大于等于 $h(x)=\dfrac{x\ln x}{x^2-1}$ 在 $(1,+\infty)$ 上的最大值，

当 $x=1$ 时， $y=h(x)$ 没有意义，由洛必达法得 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x+1}{2x}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore m\ge\dfrac{1}{2}$.

例 6．（2023·黑龙江·模拟预测（理））已知函数 $f(x)=x\ln x+kx-3k$，求：

（1）当 $k=1$ 时，求曲线 $f(x)$ 在点 $(1,\ f(1))$ 处的切线方程；

（2）当 $x>3$ 时，总有 $f(x)>1$，求整数 k 的最小值.

答案：

（1） $2x-y-4=0$

（2）-3

分析：

（1）先对函数求导，计算出斜率，再用点斜式即可；（2）分离参数转化为函数的最值问题.

（1）

当 $k=1$ 时， $f(x)=x\ln x+x-3$

$\therefore f'(x)=\ln x+2$

$\therefore f'(1)=2\,f(1)=-2$

$\therefore f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y+2=2(x-1)$ 即 $2x-y-4=0$

（2）

由题意， $f(x)>1$，即 $x\ln x+kx-3k>1$，即 $k(x-3)>1-x\ln x$，

又 $x>3$， $\therefore k>\dfrac{1-x\ln x}{x-3}$ 恒成立.

令 $g(x)=\dfrac{1-x\ln x}{x-3}$， $\therefore g'(x)=\dfrac{3\ln x-x+2}{(x-3)^2}$

令 $h(x)=3\ln x-x+2$，则 $h'(x)=\dfrac{3-x}{x}<0$ 恒成立.

$\therefore h(x)$ 在 $(3,+\infty)$ 上递减，

$\because h(8)=3\ln 8-6>0$，$h(9)=3\ln 9-7<0$

$\therefore \exists x_0\in(8,9)$ 使 $h(x_0)=0$，即 $3\ln x_0-x_0+2=0$，则 $\ln x_0=\dfrac{x_0-2}{3}$，

$\therefore$ 当 $x\in(8,x_0)$ 时，$g'(x)>0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$

$$\therefore g(x)_{\max}=g(x_0)=\frac{1-x_0\ln x_0}{x_0-3}=\frac{1-x_0\cdot\dfrac{x_0-2}{3}}{x_0-3}=-\frac{x_0+1}{3}\in(-\frac{10}{3},-3)$$

因为 $k>g(x)_{\max}$，且 $k\in Z$，$\therefore k\ge -3$，即整数 k 的最小值为-3

【点睛】

方法点睛：对于零点不可求问题，可以设而不求，整体替换从而求出范围。

题型三：端点不成立

例 7.（2023·辽宁大连·高三月考）已知函数 $f(x)=axe^x-(x+1)^2$（其中 $a\in\mathrm{R}$，e为自然对数的底数）.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $x>0$ 时，$f(x)>\ln x-x^2-x-3$，求 a 的取值范围.

答案：

（1）答案见解析；

（2）$\left(\dfrac{1}{e^3},+\infty\right)$

分析：

（1）计算 $f'(x)=(x+1)(ae^x-2)$，分别讨论 $a\le 0$、$0<a<2e$、$a=2e$、$a>2e$ 时，解不等式 $f'(x)>0$ 和 $f'(x)<0$ 可得单调增区间和单调减区间即可求解；

（2）已知不等式可转化为 $axe^x-\ln x-x+2>0$ 对 $x>0$ 恒成立，分离 a 可得 $a>\dfrac{\ln x+x-2}{xe^x}$，令 $g(x)=\dfrac{\ln x+x-2}{xe^x}(x>0)$，利用导数求 $g(x)$ 的最大值即可求解.

（1）

由 $f(x)=axe^x-(x+1)^2$ 可得

$f'(x)=a(x+1)e^x-2(x+1)=(x+1)(ae^x-2)$，

当 $a\le 0$ 时，$ae^x-2<0$，当 $x<-1$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>-1$ 时，$f'(x)<0$，

此时 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$，单调递减区间为 $(-1,+\infty)$

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=0$ 得，$x_1=-1$，$x_2=\ln\frac{2}{a}$，

①若 $\ln\frac{2}{a}=-1$，即 $a=2\mathrm{e}$ 时，$f'(x)\geq 0$ 恒成立，故 $f(x)$ 在 R 上单调递增；

②若 $\ln\frac{2}{a}<-1$，即 $a>2\mathrm{e}$ 时，

由 $f'(x)>0$ 可得：$x<\ln\frac{2}{a}$ 或 $x>-1$；令 $f'(x)<0$ 可得：$\ln\frac{2}{a}<x<-1$

此时 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\infty,\ln\frac{2}{a}\right)$ 和 $(-1,+\infty)$，单调递减区间为 $\left(\ln\frac{2}{a},-1\right)$；

③若 $\ln\frac{2}{a}>-1$，即 $0<a<2\mathrm{e}$ 时，

由 $f'(x)>0$ 可得：$x<-1$ 或 $x>\ln\frac{2}{a}$；由 $f'(x)<0$ 可得：$-1<x<\ln\frac{2}{a}$

此时 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $\left(\ln\frac{2}{a},+\infty\right)$，单调递减区间为 $\left(-1,\ln\frac{2}{a}\right)$；

综上所述：

当 $a\leq 0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$，单调递减区间为 $(-1,+\infty)$；

当 $a=2\mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 在 R 上单调递增；

当 $a>2\mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\infty,\ln\frac{2}{a}\right)$ 和 $(-1,+\infty)$，

单调递减区间为 $\left(\ln\frac{2}{a},-1\right)$；

当 $0<a<2\mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $\left(\ln\frac{2}{a},+\infty\right)$，

单调递减区间为 $\left(-1,\ln\frac{2}{a}\right)$.

（2）

由 $f(x)>\ln x-x^2-x-3$ 可得 $ax\mathrm{e}^x-\ln x-x+2>0$ 对 $x>0$ 恒成立，

即 $a>\frac{\ln x+x-2}{x\mathrm{e}^x}$ 对任意的 $x>0$ 恒成立，

令 $g(x)=\frac{\ln x+x-2}{x\mathrm{e}^x}(x>0)$，

则 $g'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}+1\right)x\mathrm{e}^x-(x+1)\mathrm{e}^x(\ln x+x-2)}{x^2\mathrm{e}^{2x}}=\frac{(x+1)(3-\ln x-x)}{x^2\mathrm{e}^x}$，

令 $h(x)=3-\ln x-x$，则 $h'(x)=-\frac{1}{x}-1<0$，则 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

又$h(1)=2>0$，$h(\mathrm{e})=2-\mathrm{e}<0$，故$h(x)=0$在$(0,+\infty)$上有唯一的实根，

不妨设该实根为x_0，

故当$x\in(0,x_0)$时，$h(x)>0$，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增；

当$x\in(x_0,+\infty)$时，$h(x)<0$，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，

故$g(x)_{\max}=g(x_0)=\dfrac{\ln x_0+x_0-2}{x_0\mathrm{e}^{x_0}}$，

又因为$3-\ln x_0-x_0=0$，所以$\ln x_0+x_0=3$，$\mathrm{e}^{\ln x_0}=\mathrm{e}^{3-x_0}$，$x_0\mathrm{e}^{x_0}=\mathrm{e}^3$，

所以$g(x_0)=\dfrac{\ln x_0+x_0-2}{x_0\mathrm{e}^{x_0}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^3}$，故$a$的取值范围为$\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^3},+\infty\right)$.

例8.（2023·陕西安康·高三期中（理））已知函数$f(x)=a^2e^{x-1}-\ln x-a$，$a>0$.

（1）若$a=1$，证明：$f(x)\geq 0$；

（2）若$f(x)\geq 0$恒成立，求a的取值范围.

答案：

（1）证明见解析

（2）$[1,+\infty)$

分析：

（1）由$a=1$，求出函数导数，利用导数求出函数的最小值即可证明；

（2）先由$f(x)\geq 0$可得$a\geq 1$，再利用导数求出函数的最小值，再根据$e^x\geq x+1$，不等式的性质证明最小值恒大于0即可求解.

（1）

当$a=1$时，$f(x)=e^{x-1}-\ln x-1$，$f'(x)=e^{x-1}-\dfrac{1}{x}$，$x>0$，

易知$y=f'(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，且$f'(1)=0$，

所以$0<x<1$时，$f'(x)<0$，$x>1$时，$f'(x)>0$

∴$f(x)$在$(0,1)$单调递减，$(1,+\infty)$单调递增，

∴$f(x)\geq f(1)=0$.

（2）

∵$f(x)\geq 0$，

∴$f(1)\geq 0$，

∴$a\geq 1$，

$f'(x)=a^2e^{x-1}-\dfrac{1}{x}$，$x>0$，易知$y=f'(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，

且 $f'(1)=a^2-1\ge 0$， $f'\left(\frac{1}{1+a^2}\right)=a^2e^{\frac{1}{1+a^2}-1}-a^2-1<0$，

∴ $\exists x_0\in\left(\frac{1}{1+a^2},1\right]$， $f'(x_0)=0$ 且 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递减， $(x_0,+\infty)$ 单调递增，

∴ $f(x)_{\min}=f(x_0)=a^2e^{x_0-1}-\ln x_0-a$， 且 $a^2e^{x_0-1}=\frac{1}{x_0}$，

∴ $f(x_0)=\frac{1}{x_0}-\ln x_0-\frac{1}{\sqrt{x_0e^{\frac{x_0-1}{2}}}}$，

易证 $e^x\ge x+1$，

∴ $e^{x-1}\ge x$， ∴ $e^{\frac{x-1}{2}}\ge\sqrt{x}$，

∴ $\frac{1}{\sqrt{x_0e^{\frac{x_0-1}{2}}}}\le\frac{1}{x_0}$， ∴ $\frac{1}{x_0}-\ln x_0-\frac{1}{\sqrt{x_0e^{\frac{x_0-1}{2}}}}\ge 0$

∴.当 $a\ge 1$ 时， $f(x)\ge 0$，

∴实数 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

例 9.（2023·江苏镇江·高三期中）已知函数 $f(x)=\ln x$， $g(x)=kx^2-2x(k\in R)$.

（1）若 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线也是 $y=g(x)$ 的切线，求 k 的值；

（2）若 $x\in(0,+\infty)$， $f(x)\le g(x)$ 恒成立，求 k 的最小整数值.

答案：

（1） $\frac{9}{4}$

（2）7

分析：

（1）先用导数法求得 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线，再根据 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线也是 $y=g(x)$ 的切线，将切线方程与 $y=g(x)$ 联立，利用判别式法求解；

（2）令 $h(x)=g(x)-f(x)=kx^2-2x-\ln x$，将 $x\in(0,+\infty)$， $f(x)\le g(x)$ 恒成立，转化为 $k\ge\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x^2}$， 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，利用导数法求解.

（1）

因为函数 $f(x)=\ln x$，

所以 $f'(x)=\frac{1}{x}$，

则 $f'(1)=1,f(1)=0$，

所以 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=x-1$，

由$\begin{cases} y=x-1 \\ y=kx^2-2x \end{cases}$，得$kx^2-3x+1=0$，

因为$y=f(x)$在$x=1$处的切线也是$y=g(x)$的切线，

所以$\Delta=9-4k=0$，解得$k=\dfrac{9}{4}$；

（2）

令$h(x)=g(x)-f(x)=kx^2-2x-\ln x$，

因为$x\in(0,+\infty)$，$f(x)\le g(x)$恒成立，

所以$k\ge\dfrac{2}{x}+\dfrac{\ln x}{x^2}$，对$x\in(0,+\infty)$恒成立，

令$\varphi(x)=\dfrac{2}{x}+\dfrac{\ln x}{x^2}$，

则$\varphi'(x)=-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1-2\ln x}{x^3}=\dfrac{1-2\ln x-2x}{x^2}$，

令$r(x)=1-2\ln x-2x$，

则$r'(x)=-\dfrac{2}{x}-2<0$，

所以$r(x)$在$(0,+\infty)$上递减，

又$r(1)=-1<0, r\left(\dfrac{1}{e}\right)=1+2-\dfrac{2}{e}>0$，

所以存在$x_0\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$，有$r(x_0)=0$，即$\varphi'(x_0)=0$，

因为$\varphi(x)$在$(0,x_0)$递增，在$(x_0,+\infty)$上递减，

所以$\varphi(x)\le\varphi(x_0)=\dfrac{2}{x_0}+\dfrac{\ln x_0}{x_0{}^2}$，

又$1-2\ln x_0-2x_0=0$，

所以$\varphi(x_0)=\dfrac{2}{x_0}+\dfrac{1-2x_0}{2x_0{}^2}=\dfrac{1}{x_0}+\dfrac{1}{2x_0{}^2}$，

令$y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x^2}$，由$x\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$，得$y<\dfrac{1}{2}e^2+e$，

所以$\varphi(x)<\dfrac{1}{2}e^2+e$，

所以$k\ge\dfrac{1}{2}e^2+e\approx 6.3$

故k的最小整数值是 7.

题型四：分离参数之全分离，半分离，换元分离

例 10．已知函数 $f(x)=e^{x}+ax^{2}-x$．

（1）当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant \dfrac{1}{2}x^{3}+1$，求 a 的取值范围．

【解答】解：（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=e^{x}+x^{2}-x$，

$f'(x)=e^{x}+2x-1$，设 $g(x)=f'(x)$，

因为 $g'(x)=e^{x}+2>0$，可得 $g(x)$ 在 R 上递增，即 $f'(x)$ 在 R 上递增，

因为 $f'(0)=0$，所以当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$；当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,0)$ 上单调递减；

（2）当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant \dfrac{1}{2}x^{3}+1$ 恒成立，

①当 $x=0$ 时，不等式恒成立，可得 $a\in R$；

②当 $x>0$ 时，可得 $a\geqslant \dfrac{\frac{1}{2}x^{3}+x+1-e^{x}}{x^{2}}$ 恒成立，

设 $h(x)=\dfrac{\frac{1}{2}x^{3}+x+1-e^{x}}{x^{2}}$，则

$$h'(x)=\frac{(2-x)e^{x}+(\frac{1}{2}x^{3}-x-2)}{x^{3}}=\frac{(2-x)e^{x}+(\frac{1}{2}x^{3}-x^{2})+(x^{2}-x-2)}{x^{3}}$$

$$=\frac{(2-x)e^{x}+\frac{1}{2}x^{2}(x-2)+(x-2)(x+1)}{x^{3}}=\frac{(2-x)(e^{x}-\frac{1}{2}x^{2}-x-1)}{x^{3}},$$

可设 $m(x)=e^{x}-\dfrac{1}{2}x^{2}-x-1$，可得 $m'(x)=e^{x}-x-1$，

设 $k(x)=e^{x}-x-1$，$k'(x)=e^{x}-1$，

由 $x>0$，可得 $k'(x)>0$ 恒成立，可得 $k(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，

$m'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，

所以 $m'(x)>m'(0)=0$，

即 $m'(x)>0$ 恒成立，即 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，所以 $m(x)>m(0)=0$，

再令 $h'(x)=0$，可得 $x=2$，当 $0<x<2$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(0,2)$ 递增；

$x>2$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 递减，所以 $h(x)_{max}=h$（2）$=\dfrac{7-e^{2}}{4}$，

所以 $a\geqslant \dfrac{7-e^{2}}{4}$，

综上可得 a 的取值范围是 $[\frac{7-e^2}{4}$， $+\infty)$.

例 11．已知函数 $f(x)=x^4+x^2+(a-1)x+1$．

（1）当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $x>0$ 时， $f(x)\leqslant x^4+e^x$，求 a 的取值范围．

【解答】解：（1）当 $a=1$ 时， $f(x)=x^4+x^2+1$，

所以 $f'(x)=4x^3+2x=2x(2x^2+1)$，

当 $x>0$ 时， $f'(x)>0$，函数单调递增，当 $x<0$ 时， $f'(x)<0$，函数单调递减，

所以函数的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，函数的单调递减区间为 $(-\infty,0)$；

（2）由题意得， $x>0$ 时， $x^4+x^2+(a-1)x+1\leqslant x^4+e^x$ 恒成立，

即 $x^2+(a-1)x+1\leqslant e^x$ 恒成立，

所以 $a-1\leqslant \frac{e^x-x^2-1}{x}$，

令 $g(x)=\frac{e^x-x^2-1}{x}$， $x>0$，

由重要不等式可知，当 $x>0$ 时， $e^x>x+1$，

则 $g'(x)=\frac{(e^x-2x)x-(e^x-x^2-1)}{x^2}=\frac{(x-1)(e^x-x-1)}{x^2}$，

当 $x>1$ 时， $g'(x)>0$， $g(x)$ 单调递增，当 $0<x<1$ 时， $g'(x)<0$， $g(x)$ 单调递减，

所以 $g(x)\geqslant g$（1） $=e-2$，

所以 $a-1\leqslant e-2$，即 $a\leqslant e-1$，

所以 a 的范围为 $\{a\mid a\leqslant e-1\}$．

例 12．已知函数 $f(x)=e^x-ax^2-x-1$．

（Ⅰ）当 $a=-1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）当 $x\geqslant 0$ 时， $f(x)\geqslant \frac{1}{2}x^3-2ax^2$ 恒成立，求实数 a 的取值范围．

【解答】解： (I) 当 $a=-1$ 时， $f(x)=e^x+x^2-x-1$，

则 $f'(x)=e^x+2x-1$ 在 R 上单调递增，

又 $f'(0)=0$，

故当 $x>0$ 时， $f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，当 $x<0$ 时， $f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递减，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,0)$ 上单调递减；

(II) 当 $x=0$ 时，不等式 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}x^3-2ax^2$ 恒成立，

当 $x>0$ 时，由 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}x^3-2ax^2$ 恒成立可得 $a\geqslant\frac{\frac{1}{2}x^3+x+1-e^x}{x^2}$ 恒成立，

令 $g(x)=\frac{\frac{1}{2}x^3+x+1-e^x}{x^2}$， $x>0$，

则 $g'(x)=\frac{(2-x)e^x+\frac{1}{2}x^3-x-2}{x^3}=\frac{(2-x)(e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1)}{x^3}$，

令 $m(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$，则 $m'(x)=e^x-x-1$，

令 $h(x)=e^x-x-1$， $x>0$，则 $h'(x)=e^x-1>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增， $h(x)>h(0)=0$，

所以 $m'(x)>0$， $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增， $m(x)>m(0)=0$，

所以当 $0<x<2$ 时， $g'(x)>0$， $g(x)$ 单调递增，当 $x>2$ 时， $g'(x)<0$， $g(x)$ 单调递减，

所以 $g(x)_{max}=g$ （2） $=\frac{7-e^2}{4}$，

所以 $a\geqslant\frac{7-e^2}{4}$，

故 a 的取值范围为 $\{a\,|\,a\geqslant\frac{7-e^2}{4}\}$.

题型五：洛必达法则

例 13：已知函数 $f(x)=a\ln x+bx(a,b\in R)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处取得极值，且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $x-y+1=0$ 垂直.

(1)求实数 a,b 的值；

(2)若 $\forall x\in[1,+\infty)$，不等式 $f(x)\leq(m-2)x-\frac{m}{x}$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

【解析】(1) $\because f(x)=a\ln x+bx$， $\therefore f'(x)=\frac{a}{x}+b$；

$\because$ 函数 $f(x)=a\ln x+bx(a,b\in R)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处取得极值， $\therefore f'(\frac{1}{2})=2a+b=0$；

又 $\because$ 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $x-y+1=0$ 垂直， $\therefore$ $f'(1)=a+b=-1$；