云南省昆明八中 2024 届高三数学第一学期期末学业水平测试试题

请考生注意：

1．请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用 0．5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。

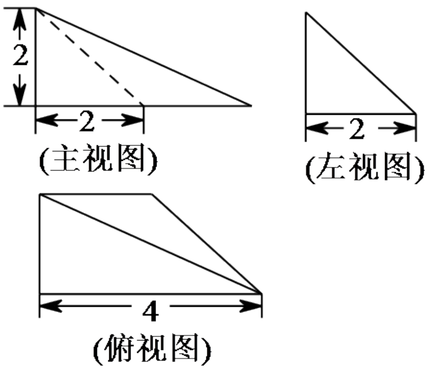
2．答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．抛物线$□^2 = □□(□ > 0)$的准线与双曲线$□: \frac{□^2}{8} - \frac{□^2}{4} = 1$的两条渐近线所围成的三角形面积为$2\sqrt{2}$，则□的值为（ ）

A．8　　B．6　　C．4　　D．2

2．一个四棱锥的三视图如图所示（其中主视图也叫正视图，左视图也叫侧视图），则这个四棱锥中最最长棱的长度是（　　）.



A．$2\sqrt{6}$　　B．4　　C．$2\sqrt{3}$　　D．$2\sqrt{2}$

3．若$|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，点 C 在 AB 上，且$\angle AOC=30^\circ$，设$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}\ (m,n\in R)$，则$\frac{m}{n}$的值为（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．3　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\sqrt{3}$

4．$\left|\frac{i^{2020}}{1-i}\right|=$（　　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．1　　D．$\frac{1}{4}$

5．已知锐角α满足$2\sin 2\alpha = 1-\cos 2\alpha$，则$\tan\alpha=$（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．1　　C．2　　D．4

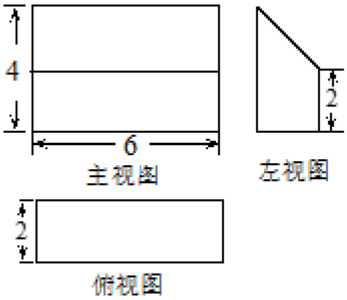
6．已知直线$2mx+ny=2\ (m>0,n>0)$过圆$(x-1)^2+(y-2)^2=5$的圆心，则$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$的最小值为（　　）

A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

7．若函数 $f(x)=\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}} x, 0<x\leq 1, \\ -x(x-1)(x-3), x>1,\end{cases}$ 函数 $g(x)=f(x)+kx$ 只有 1 个零点，则 k 的取值范围是（　　）

A．$(-1,0)$　　　　B．$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$　　　　C．$(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$　　　　D．$(0,1)$

8．一个几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为（　　）



A．$48+12\sqrt{2}$　　　　B．$60+12\sqrt{2}$　　　　C．$72+12\sqrt{2}$　　　　D．84

9．数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=|n-c|\left(n\in N^*\right)$．则“$c<2$”是“$\{a_n\}$ 为递增数列”的（　　）条件．

A．必要而不充分　　　　B．充要　　　　C．充分而不必要　　　　D．即不充分也不必要

10．由实数组成的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则“$a_1>0$”是“$S_9>S_8$”的（　　）

A．充分不必要条件　　　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　　　D．既不充分也不必要条件

11．已知等式 $(1-x+x^2)^3\cdot(1-2x^2)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{14}x^{14}$ 成立，则 $a_2+a_4+\cdots+a_{14}=$（　　）

A．0　　　　B．5　　　　C．7　　　　D．13

12．已知实数 $a>0$，$a\neq1$，函数 $f(x)=\begin{cases}a^x, x<1 \\ x^2+\frac{4}{x}+a\ln x, x\geq1\end{cases}$ 在 R 上单调递增，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$1<a\leq2$　　　　B．$a<5$　　　　C．$3<a<5$　　　　D．$2\leq a\leq5$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．“石头、剪子、布”是大家熟悉的二人游戏，其规则是：在石头、剪子和布中，二人各随机选出一种，若相同则平局；若不同，则石头克剪子，剪子克布，布克石头.甲、乙两人玩一次该游戏，则甲不输的概率是______.

14. 在 ΔABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，S 为 ΔABC 的面积，若 $c=2a\cos B$，$S=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{4}c^2$，则 ΔABC 的形状为__________，C 的大小为__________.

15．正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=4$，$AA_1=2\sqrt{3}$.若 M 是侧面 BCC_1B_1 内的动点，且 $AM\perp MC$，则 A_1M

与平面 BCC_1B_1 所成角的正切值的最大值为__________.

16．已知 α 的终边过点 $(3m,-2)$，若 $\tan\left(\pi+\alpha\right)=\dfrac{1}{3}$，则 $m=$__________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

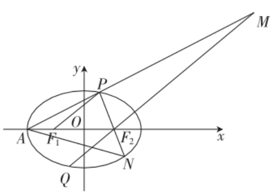
17．（12 分）某景点上山共有 999 级台阶，寓意长长久久．甲上台阶时，可以一步走一个台阶，也可以一步走两个台阶，若甲每步上一个台阶的概率为 $\dfrac{1}{3}$，每步上两个台阶的概率为 $\dfrac{2}{3}$．为了简便描述问题，我们约定，甲从 0 级台阶开始向上走，一步走一个台阶记 1 分，一步走两个台阶记 2 分，记甲登上第 n 个台阶的概率为 P_n，其中 $n\in N^*$，且 $n\le 998$．

（1）若甲走 3 步时所得分数为 X，求 X 的分布列和数学期望；

（2）证明：数列 $\{P_{n+1}-P_n\}$ 是等比数列；

（3）求甲在登山过程中，恰好登上第 99 级台阶的概率．

18．（12 分）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点为 A，左、右焦点分别为 F_1,F_2，离心率为 $\dfrac{1}{2}$，P 是椭圆上的一个动点（不与左、右顶点重合），且 $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 6，点 P 关于原点的对称点为 Q，直线 AP,QF_2 交于点 M．



（1）求椭圆方程；

（2）若直线 PF_2 与椭圆交于另一点 N，且 $S_{\triangle AF_2M}=4S_{\triangle AF_2N}$，求点 P 的坐标.

19．（12 分）已知 $f\left(x\right)=x\ln x$ 与 $y=a$ 有两个不同的交点 A，B，其横坐标分别为 x_1，x_2（$x_1<x_2$）．

（1）求实数 a 的取值范围；

（2）求证：$ae+1<x_2-x_1<\dfrac{3a+2+e^{-3}}{2}$．

20．（12 分）已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 是各项均为正数的等比数列，数列 $\left\{b_n\right\}$ 为等差数列，且 $b_1=a_1=1$，$b_3=a_3+1$，$b_5=a_5-7$．

（1）求数列 $\left\{a_n\right\}$ 与 $\left\{b_n\right\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\left\{a_nb_n\right\}$ 的前 n 项和 A_n；

（3）设 S_n 为数列 $\left\{a_n^2\right\}$ 的前 n 项和，若对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $S_n+\dfrac{1}{3}=t\cdot 2^{b_n}$，求实数 t 的值.

21．(12 分) ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $2b\cos B=a\cos C+c\cos A$．

（1）求ÐB 的大小；

（2）若 $b=2$，求 ΔABC 面积的最大值.

22．(10 分) 诚信是立身之本，道德之基，我校学生会创设了“诚信水站”，既便于学生用水，又推进诚信教育，并用“$\dfrac{\text{周实际回收水费}}{\text{周投入成本}}$”表示每周“水站诚信度”，为了便于数据分析，以四周为一周期，如表为该水站连续十二周（共三个周期）的诚信数据统计：

	第一周	第二周	第三周	第四周
第一周期	95%	98%	92%	88%
第二周期	94%	94%	83%	80%
第三周期	85%	92%	95%	96%

（Ⅰ）计算表中十二周“水站诚信度”的平均数 $\overline{x}$；

（Ⅱ）若定义水站诚信度高于 90% 的为“高诚信度”，90% 以下为“一般信度”则从每个周期的前两周中随机抽取两周进行调研，计算恰有两周是“高诚信度”的概率；

（Ⅲ）已知学生会分别在第一个周期的第四周末和第二个周期的第四周末各举行了一次“以诚信为本”的主题教育活动，根据已有数据，说明两次主题教育活动的宣传效果，并根据已有数据陈述理由.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

求得抛物线的准线方程和双曲线的渐近线方程，解得两交点，由三角形的面积公式，计算即可得到所求值.

【详解】

抛物线 $\square^2=\square\square(\square>0)$ 的准线为 $\square=-\frac{\square}{4}$， 双曲线 $\square:\frac{\square^2}{8}-\frac{\square^2}{4}=1$ 的两条渐近线为 $\square=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\square$， 可得两交点为

$\left(-\frac{□}{4},-\frac{\sqrt{2}□}{8}\right),\left(-\frac{□}{4},\frac{\sqrt{2}□}{8}\right)$，即有三角形的面积为$\frac{1}{2}\times\frac{□}{4}\times\frac{\sqrt{2}□}{4}=2\sqrt{2}$，解得$□=8$，故选$A$.

【点睛】

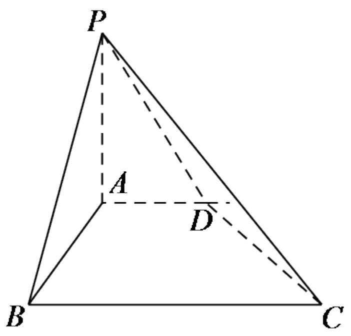
本题考查三角形的面积的求法，注意运用抛物线的准线方程和双曲线的渐近线方程，考查运算能力，属于基础题.

2、A

【解析】

作出其直观图，然后结合数据根据勾股定定理计算每一条棱长即可.

【详解】



根据三视图作出该四棱锥的直观图，如图所示，其中底面是直角梯形，且$AD=AB=2$，$BC=4$，

$PA\perp$平面$ABCD$，且$PA=2$，

$\therefore PB=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，$PD=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，$CD=2\sqrt{2}$，$PC=\sqrt{PA^2+AC^2}=\sqrt{4+20}=2\sqrt{6}$，

∴这个四棱锥中最长棱的长度是$2\sqrt{6}$.

故选A.

【点睛】

本题考查了四棱锥的三视图的有关计算，正确还原直观图是解题关键，属于基础题.

3、B

【解析】

利用向量的数量积运算即可算出.

【详解】

解：Q $\angle AOC=30^{\circ}$

$\therefore \cos<\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}>=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \dfrac{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OA}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \dfrac{(m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OA}}{|m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OA}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \dfrac{m|\overrightarrow{OA}|^2+n\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}}{\sqrt{m^2|\overrightarrow{OA}|^2+2mn\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+n^2|\overrightarrow{OB}|^2}\,|\overrightarrow{OA}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\because |\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

$\therefore \dfrac{m}{\sqrt{m^2+3n^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore m^2=9n^2$

又$\because C$ 在 AB 上

$\therefore m>0$，$n>0$

$\therefore \dfrac{m}{n}=3$

故选：B

【点睛】

本题主要考查了向量的基本运算的应用，向量的基本定理的应用及向量共线定理等知识的综合应用．

4、**A**

【解析】

利用复数的乘方和除法法则将复数$\dfrac{i^{2020}}{1-i}$化为一般形式，结合复数的模长公式可求得结果.

【详解】

$i^{2020}=\left(i^4\right)^{505}=1^{505}=1$，$\dfrac{i^{2020}}{1-i}=\dfrac{1}{1-i}=\dfrac{1+i}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$，

因此，$\left|\dfrac{i^{2020}}{1-i}\right|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

故选：**A.**

【点睛】

本题考查复数模长的计算，同时也考查了复数的乘方和除法法则的应用，考查计算能力，属于基础题.

5、**C**

【解析】

利用$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$代入计算即可.

【详解】

由已知，$4\sin\alpha\cos\alpha = 2\sin^2\alpha$，因$\alpha$为锐角，所以$\sin\alpha \neq 0$，$2\cos\alpha = \sin\alpha$，

即$\tan\alpha = 2$.

故选：C.

【点睛】

本题考查二倍角的正弦、余弦公式的应用，考查学生的运算能力，是一道基础题.

6、D

【解析】

圆心坐标为$(1,2)$，代入直线方程，再由乘1法和基本不等式，展开计算即可得到所求最小值.

【详解】

圆$(x-1)^2+(y-2)^2=5$的圆心为$(1,2)$，

由题意可得$2m+2n=2$，即$m+n=1$，m，$n>0$，

则$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})(m+n)=2+\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\ldots 4$，当且仅当$\frac{n}{m}=\frac{m}{n}$且$m+n=1$即$m=n=\frac{1}{2}$时取等号，

故选：D.

【点睛】

本题考查最值的求法，注意运用乘1法和基本不等式，注意满足的条件：一正二定三等，同时考查直线与圆的关系，考查运算能力，属于基础题.

7、C

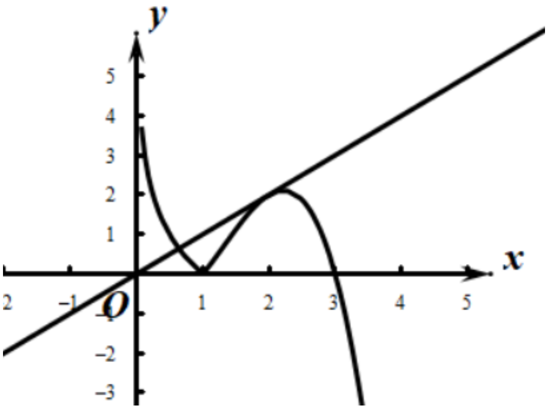
【解析】

转化$g(x)=f(x)+kx$有1个零点为$y=f(x)$与$y=-kx$的图象有1个交点，求导研究临界状态相切时的斜率，数形结合即得解.

【详解】

$g(x)=f(x)+kx$有1个零点

等价于$y=f(x)$与$y=-kx$的图象有1个交点.



记 $h(x)=-x(x-1)(x-3)(x>1)$，则过原点作 $h(x)$ 的切线，

设切点为 (x_0,y_0)，

则切线方程为 $y-h(x_0)=h'(x_0)(x-x_0)$，

又切线过原点，即 $h(x_0)=h'(x_0)x_0$，

将 $h(x_0)=-x_0(x_0-1)(x_0-3),$，

$h'(x_0)=-3x_0^2+8x_0-3$

代入解得 $x_0=2$.

所以切线斜率为 $h^{'}(2)=-3\times2^2+8\times2-3=1$，

所以 $k<-1$ 或 $k>0$.

故选：**C**

【点睛】

本题考查了导数在函数零点问题中的应用，考查了学生数形结合，转化划归，数学运算的能力，属于较难题.

8、**B**

【解析】

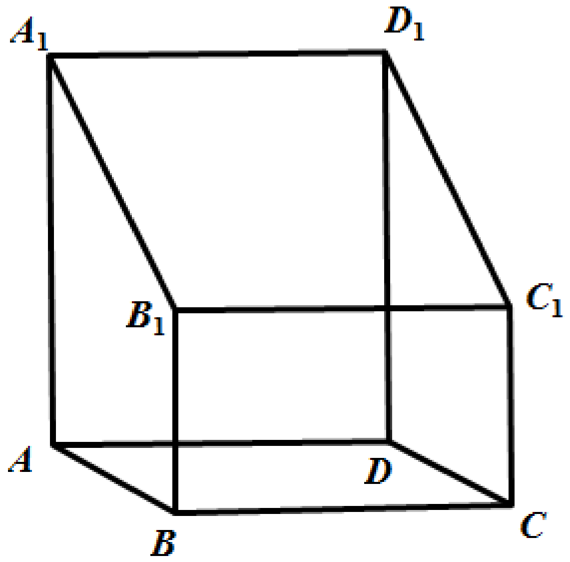
画出几何体的直观图，计算表面积得到答案.

【详解】

该几何体的直观图如图所示：

故 $S=2\times6+2\times6+\dfrac{(2+4)\times2}{2}\times2+4\times6+6\times2\sqrt{2}=64+12\sqrt{2}$.

故选：B.



【点睛】

本题考查了根据三视图求表面积，意在考查学生的计算能力和空间想象能力.

9、A

【解析】

根据递增数列的特点可知$a_{n+1}-a_n>0$，解得$c<n+\frac{1}{2}$，由此得到若$\{a_n\}$是递增数列，则$c<\frac{3}{2}$，根据推出关系可确定结果.

【详解】

若“$\{a_n\}$是递增数列”，则$a_{n+1}-a_n=|n+1-c|-|n-c|>0$，

即$(n+1-c)^2>(n-c)^2$，化简得：$c<n+\frac{1}{2}$，

又$n\in\mathbf{N}^*$，$\therefore n+\frac{1}{2}\geq\frac{3}{2}$，$\therefore c<\frac{3}{2}$，

则$c<2$¿ $\{a_n\}$是递增数列，$\{a_n\}$是递增数列$\Rightarrow c<2$，

$\therefore$“$c<2$”是“$\{a_n\}$为递增数列”的必要不充分条件.

故选：A.

【点睛】

本题考查充分条件与必要条件的判断，涉及到根据数列的单调性求解参数范围，属于基础题.

10、C

【解析】

根据等比数列的性质以及充分条件和必要条件的定义进行判断即可.

【详解】