



世界万物

# 基本概念

**微分方程**：含有未知函数的导数〔或微分〕的方程。

**常微分方程**：未知函数是一元函数的微分方程。


**偏微分方程**：未知函数是多元函数的微分方程。



**微分方程的阶：** 方程中未知函数的导数的最高阶数。

**微分方程的解：** 若函数  $y = f(x)$  满足一个微分方程，那么称它为该微分方程的解。

**微分方程的解可以是显函数，也可  
为隐函数。**



**通解：** 如果微分方程的解中含有任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，该解称为微分方程的通解。

**初始条件：** 当自变量取某数值时，要求未知函数及其导数取给定的值，这种条件称为初始条件。

**特解：** 满足给定初始条件的解，称为  
微分方程的特解。

**积分曲线：** 微分方程的特解  $y = f(x)$   
的几何图形，称为微分方程的  
一条积分曲线。



# 一阶微分方程

## 一、变量可分离的微分方程：

行如：
$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

解法：
$$\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$$

两边积分有 
$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$$

例：1、求微分方程  $\frac{dy}{dx} = 2xy$

的通解。

2、求微分方程  $y' \cos x = y$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{x + y^2 + 3}$  满足初始条件  $y|_{x=0} = \frac{1}{2}$   
的特解

3、 $4x^2 y^2 dx + 2(x^3 y - 1)dy = 0$

## 二、齐次型微分方程

行如:  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$  如  $\frac{dy}{dx} + e^{\frac{dy}{dx}} \pm x = 0$

解法: 令  $u = \frac{y}{x}$  则  $y = xu$

$$y' = u + xu'$$

代入有  $u + xu' = f(u)$

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$



### 三、一阶线性微分方程

行如:  $y' + p(x)y = q(x)$

当自由项  $q(x) = 0$  时, 即

$$y' + p(x)y = 0$$

称为一阶线性齐次微分方程。

若  $q(x) \neq 0$

称为一阶线性非齐次微分方程。

# 1、线性齐次微分方程的通解：

$$y' + p(x)y = 0$$

解法： $y' = -p(x)y$

$$\frac{1}{y} dy = -p(x) dx$$

两边积分  $\ln y = -\int p(x) dx + \ln C$

$$y = Ce^{-\int p(x) dx}$$

## 2、线性非齐次微分方程的通解：

解法：采用常数变易法

设非齐次线性方程的通解为

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

代入方程经计算有

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + D$$

通解：

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[ \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + D \right]$$

## 可降阶的二阶微分方程

一、 $y'' = f(x)$ 型的微分方程：

解法：连续两次积分，通解含有  
两个任意常数。

类似地，高阶方程

$$y^{(n)} = f(x)$$

解法： $n$  次积分。

二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程：

特点：方程的右端不显含  $y$

解法：设  $y' = p$  则  $y'' = \frac{dp}{dx}$

代入有  $\frac{dp}{dx} = f(x, p)$  该式为以  $x$  为

自变量，函数为  $p = p(x)$  一阶

微分方程。

### 三、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

特点：方程的右端不显含  $x$

解法：设  $y' = p$

$$\text{那么}'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$$

于是方程化为  $p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$

此方程为一阶微分方程。

## 二阶线性微分方程

形如:  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

称为二阶线性微分方程

当  $f(x) = 0$  时, 方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

称为二阶线性齐次微分方程

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/925132230010012003>