

2023-2024 学年广东省普通高级中学高三下学期期初测试数学试题

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型 (B) 填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新答案; 不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知函数 $f(x+1)$ 是偶函数, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递减, 设 $a = f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $b = f(3)$, $c = f(0)$,

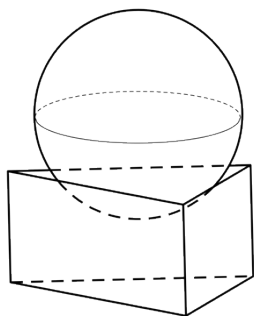
则 a 、 b 、 c 的大小关系为 ()

- A. $b < a < c$ B. $c < b < d$ C. $b < c < a$ D. $a < b < c$

2. 根据最小二乘法由一组样本点 (x_i, y_i) (其中 $i = 1, 2, \dots, 300$), 求得的回归方程是 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$, 则下列说法正确的是 ()

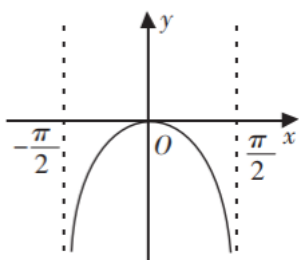
- A. 至少有一个样本点落在回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 上
- B. 若所有样本点都在回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 上, 则变量间的相关系数为 1
- C. 对所有的解释变量 x_i ($i = 1, 2, \dots, 300$), $\hat{b}x_i + \hat{a}$ 的值一定与 y_i 有误差
- D. 若回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 的斜率 $\hat{b} > 0$, 则变量 x 与 y 正相关

3. 如图所示, 直三棱柱的高为 4, 底面边长分别是 5, 12, 13, 当球与上底面三条棱都相切时球心到下底面距离为 8, 则球的体积为 ()



- A. $\frac{160\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{64\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{96\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{256\sqrt{2}}{3}$

4. 函数 $y = f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的大致图象如图所示, 则 $f(x)$ 可能是 ()



- A. $f(x) = \ln|\sin x|$
- B. $f(x) = \ln(\cos x)$
- C. $f(x) = -\sin|\tan x|$
- D. $f(x) = -\tan|\cos x|$

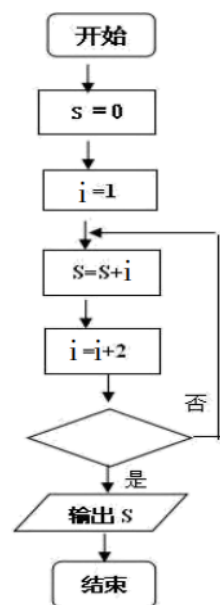
5. 设点 A, B, C 不共线, 则“ $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \perp \overrightarrow{BC}$ ”是“ $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ ” ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分又不必要条件

6. 已知 $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\alpha \neq \beta$, 则下列是等式 $\sin \alpha - \sin \beta = \alpha - 2\beta$ 成立的必要不充分条件的是 ()

- A. $\sin \alpha > \sin \beta$
- B. $\sin \alpha < \sin \beta$
- C. $\cos \alpha > \cos \beta$
- D. $\cos \alpha < \cos \beta$

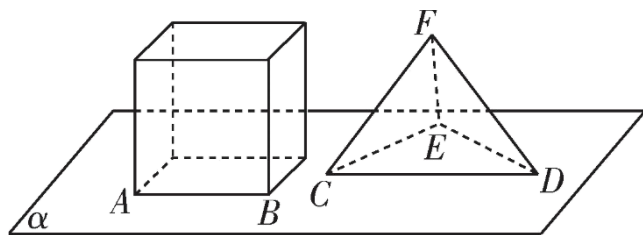
7. 阅读如图的程序框图, 若输出的值为 25, 那么在程序框图中的判断框内可填写的条件是 ()



- A. $i > 5$
- B. $i > 8$
- C. $i > 10$
- D. $i > 12$

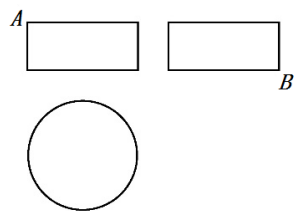
8. 如图, 正方体的底面与正四面体的底面在同一平面 α 上, 且 $AB \parallel CD$, 若正方体的六个面所在的平面与直线

CE , EF 相交的平面个数分别记为 m , n , 则下列结论正确的是 ()



- A. $m = n$ B. $m = n + 2$ C. $m < n$ D. $m + n < 8$

9. 某圆柱的高为 2, 底面周长为 16, 其三视图如图所示, 圆柱表面上的点 M 在正视图上的对应点为 A , 圆柱表面上的点 N 在左视图上的对应点为 B , 则在此圆柱侧面上, 从 M 到 N 的路径中, 最短路径的长度为 ()



- A. $2\sqrt{17}$ B. $2\sqrt{5}$ C. 3 D. 2

10. 小王因上班繁忙, 来不及做午饭, 所以叫了外卖. 假设小王和外卖小哥都在 12:00~12:10 之间随机到达小王所居住的楼下, 则小王在楼下等候外卖小哥的时间不超过 5 分钟的概率是 ()

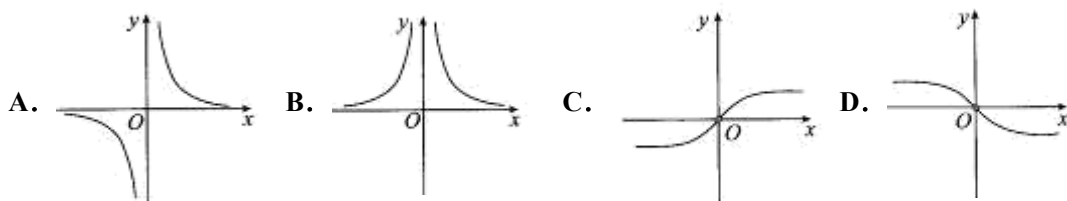
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{3}{4}$

11. 已知边长为 4 的菱形 $ABCD$, $\angle DAB = 60^\circ$, M 为 CD 的中点, N 为平面 $ABCD$ 内一点, 若 $AN = NM$, 则

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = ()$$

- A. 16 B. 14 C. 12 D. 8

12. 函数 $f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^3}$ 的大致图象是



二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知正数 a , b 满足 $a+b=1$, 则 $\frac{b}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值等于 _____, 此时 $a=_____$.

14. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \geq 3 \\ y \leq 3x-1 \\ x \leq 2 \end{cases}$, 则 $z = \frac{y}{x}$ 的最小值为_____.

15. 已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, 且 $\vec{a} \perp (\vec{a} - \lambda \vec{b})$, 则实数 $\lambda =$ _____.

16. 已知各棱长都相等的直三棱柱(侧棱与底面垂直的棱柱称为直棱柱)所有顶点都在球 O 的表面上.若球 O 的表面积为 28π , 则该三棱柱的侧面积为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数). 以直角坐标系原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}$, 点 P 为曲线 C 上的动点, 求点 P 到直线 l

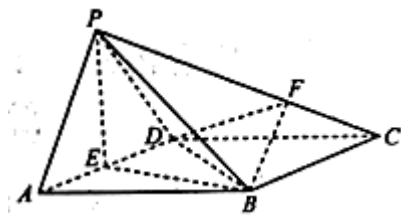
距离的最大值.

18. (12 分) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, a_n 是 -1 与 a_{n+1} 的等差中项.

(1) 证明: 数列 $\{a_n + 1\}$ 为等比数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{a_n + 2n\}$ 的前 n 项和 S_n .

19. (12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, $\triangle PAD$ 是边长为 2 的正三角形, $PC = \sqrt{10}$, E 为线段 AD 的中点.



(1) 求证: 平面 $PBC \perp$ 平面 PBE ;

(2) 若 F 为线段 PC 上一点, 当二面角 $P-DB-F$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 时, 求三棱锥 $B-PDF$ 的体积.

20. (12 分) 设前 n 项积为 T_n 的数列 $\{a_n\}$, $a_n = \lambda - T_n$ (λ 为常数), 且 $\left\{\frac{1}{T_n}\right\}$ 是等差数列.

(I) 求 λ 的值及数列 $\{T_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 S_n 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 且 $b_n = (2n+3)T_n$, 求 $S_{2n} - S_n - 2n$ 的最小值.

21. (12分) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = \frac{\pi}{4}$, $\cos C = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

(1) 求 $\cos A$ 的值;

(2) 点 D 为边 BC 上的动点(不与 C 点重合), 设 $AD = \lambda DC$, 求 λ 的取值范围.

22. (10分) 设函数 $f(x) = 5 - |x+a| - |x-2|$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集;

(2) 若 $f(x) \leq 1$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

参考答案

一、选择题: 本题共12小题, 每小题5分, 共60分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、A

【解析】

根据 $f(x+1)$ 图象关于 y 轴对称可知 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称, 从而得到 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增且 $f(3) = f(-1)$;

再根据自变量的大小关系得到函数值的大小关系.

【详解】

Q $f(x+1)$ 为偶函数 $\therefore f(x+1)$ 图象关于 y 轴对称

$\therefore f(x)$ 图象关于 $x=1$ 对称

Q $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x)$ 单调递减 $\therefore x \in (-\infty, 1)$ 时, $f(x)$ 单调递增

又 $f(3) = f(-1)$ 且 $-1 < -\frac{1}{2} < 0$ $\therefore f(-1) < f(-\frac{1}{2}) < f(0)$, 即 $b < a < c$

本题正确选项: A

【点睛】

本题考查利用函数奇偶性、对称性和单调性比较函数值的大小关系问题, 关键是能够通过奇偶性和对称性得到函数的单调性, 通过自变量的大小关系求得结果.

2、D

【解析】

对每一个选项逐一分析判断得解.

【详解】

回归直线必过样本数据中心点, 但样本点可能全部不在回归直线上, 故 A 错误;

所有样本点都在回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 上, 则变量间的相关系数为 ± 1 , 故 B 错误;

若所有的样本点都在回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 上, 则 $\hat{b}x + \hat{a}$ 的值与 y_i 相等, 故 C 错误;

相关系数 r 与 $\hat{b}$ 符号相同, 若回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 的斜率 $\hat{b} > 0$, 则 $r > 0$, 样本点分布应从左到右是上升的, 则变量 x 与 y 正相关, 故 D 正确.

故选 D.

【点睛】

本题主要考查线性回归方程的性质, 意在考查学生对该知识的理解掌握水平和分析推理能力.

3、A

【解析】

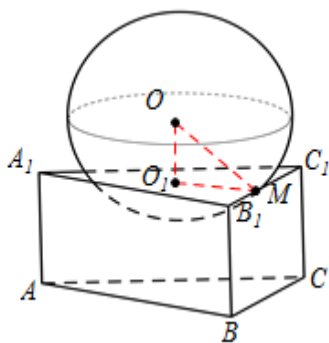
设球心为 O , 三棱柱的上底面 $A_1B_1C_1$ 的内切圆的圆心为 O_1 , 该圆与边 A_1B_1 切于点 M , 根据球的几何性质可得 $OO_1 \perp A_1B_1$ 为直角三角形, 然后根据题中数据求出圆 O_1 半径, 进而求得球的半径, 最后可求出球的体积.

【详解】

如图, 设三棱柱为 $ABC - A_1B_1C_1$, 且 $AB = 12, AC = 5, BC = 13$, 高 $AA_1 = 4$.

所以底面 $A_1B_1C_1$ 为斜边是 A_1B_1 的直角三角形, 设该三角形的内切圆为圆 O_1 , 圆 O_1 与边 A_1B_1 切于点 M ,

则圆 O_1 的半径为
$$r = \frac{12+5-13}{2} = 2.$$



设球心为 O , 则由球的几何知识得 $OO_1 \perp A_1B_1$ 为直角三角形, 且 $OO_1 = 8 - 4 = 4$,

所以 $\square\square = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$,

即球 $\square$ 的半径为 $2\sqrt{5}$,

所以球 $\square$ 的体积为 $\frac{4}{3} \times \square \times (2\sqrt{5})^3 = \frac{160\sqrt{5}\square}{3}$.

故选 A.

【点睛】

本题考查与球有关的组合体的问题，解答本题的关键有两个：

(1) 构造以球半径 $\square$ 、球心到小圆圆心的距离 $\square$ 和小圆半径 $\square$ 为三边的直角三角形，并在此三角形内求出球的半径，这是解决与球有关的问题时常用的方法.

(2) 若直角三角形的两直角边为 $\square, \square$ ，斜边为 $\square$ ，则该直角三角形内切圆的半径 $\square = \frac{\square + \square - \square}{2}$ ，合理利用中间结论可提高解题的效率.

高解题的效率.

4、B

【解析】

根据特殊值及函数的单调性判断即可；

【详解】

解：当 $x = 0$ 时， $\sin 0 = 0$ ， $\ln|\sin 0|$ 无意义，故排除 A；

又 $\cos 0 = 1$ ，则 $f(0) = -\tan|\cos 0| = -\tan 1 \neq 0$ ，故排除 D；

对于 C，当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时， $|\tan x| > 0$ ，所以 $f(x) = -\sin|\tan x|$ 不单调，故排除 C；

故选：B

【点睛】

本题考查根据函数图象选择函数解析式，这类问题利用特殊值与排除法是最佳选择，属于基础题.

5、C

【解析】

利用向量垂直的表示、向量数量积的运算，结合充分必要条件的定义判断即可.

【详解】

由于点 A，B，C 不共线，则

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \perp \overrightarrow{BC} &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 \Leftrightarrow \\ |\overrightarrow{AB}| &= |\overrightarrow{AC}|; \end{aligned}$$

故“ $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \perp \overrightarrow{BC}$ ”是“ $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ ”的充分必要条件.

故选: C.

【点睛】

本小题主要考查充分、必要条件的判断, 考查向量垂直的表示, 考查向量数量积的运算, 属于基础题.

6、D

【解析】

构造函数 $h(x) = \sin x - x$, $f(x) = \sin x - 2x$, 利用导数分析出这两个函数在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上均为减函数, 由 $\sin \alpha - \sin \beta = \alpha - 2\beta$ 得出 $\sin \alpha - \alpha = \sin \beta - 2\beta$, 分 $\alpha = 0$ 、 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ 、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 三种情况讨论, 利用放缩法结合函数 $y = h(x)$ 的单调性推导出 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < 0$ 或 $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 再利用余弦函数的单调性可得出结论.

【详解】

构造函数 $h(x) = \sin x - x$, $f(x) = \sin x - 2x$,

则 $h'(x) = \cos x - 1 < 0$, $f'(x) = \cos x - 2 < 0$,

所以, 函数 $y = f(x)$ 、 $y = h(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上均为减函数,

当 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 时, 则 $h(x) > h(0) = 0$, $f(x) > f(0) = 0$; 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $h(x) < 0$, $f(x) < 0$.

由 $\sin \alpha - \sin \beta = \alpha - 2\beta$ 得 $\sin \alpha - \alpha = \sin \beta - 2\beta$.

①若 $\alpha = 0$, 则 $\sin \beta - 2\beta = 0$, 即 $f(\beta) = 0 \Rightarrow \beta = 0$, 不合乎题意;

②若 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, 则 $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$, 则 $h(\alpha) = \sin \alpha - \alpha = \sin \beta - 2\beta > \sin \beta - \beta = h(\beta)$,

此时, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < 0$,

由于函数 $y = \cos x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 上单调递增, 函数 $y = \sin x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 上单调递增, 则 $\sin \alpha < \sin \beta$,

$\cos \alpha < \cos \beta$;

③若 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 则 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, 则 $h(\alpha) = \sin \alpha - \alpha = \sin \beta - 2\beta < \sin \beta - \beta = h(\beta)$,

此时 $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$,

由于函数 $y = \cos x$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，函数 $y = \sin x$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，则 $\sin \alpha > \sin \beta$ ，

$$\cos \alpha < \cos \beta.$$

综上所述， $\cos \alpha < \cos \beta$ 。

故选：D.

【点睛】

本题考查函数单调性的应用，构造新函数是解本题的关键，解题时要注意对 α 的取值范围进行分类讨论，考查推理能力，属于中等题.

7、C

【解析】

根据循环结构的程序框图，带入依次计算可得输出为 25 时 i 的值，进而得判断框内容.

【详解】

根据循环程序框图可知， $S = 0, i = 1$

则 $S = 1, i = 3$ ，

$S = 4, i = 5$ ，

$S = 9, i = 7$ ，

$S = 16, i = 9$ ，

$S = 25, i = 11$ ，

此时输出 S ，因而 $i = 9$ 不符合条件框的内容，但 $i = 11$ 符合条件框内容，结合选项可知 C 为正确选项，

故选：C.

【点睛】

本题考查了循环结构程序框图的简单应用，完善程序框图，属于基础题.

8、A

【解析】

根据题意，画出几何位置图形，由图形的位置关系分别求得 m, n 的值，即可比较各选项.

【详解】

如下图所示， $CE \subset$ 平面 $ABPQ$ ，从而 $CE \parallel$ 平面 $A_1B_1P_1Q_1$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/925133332044011332>