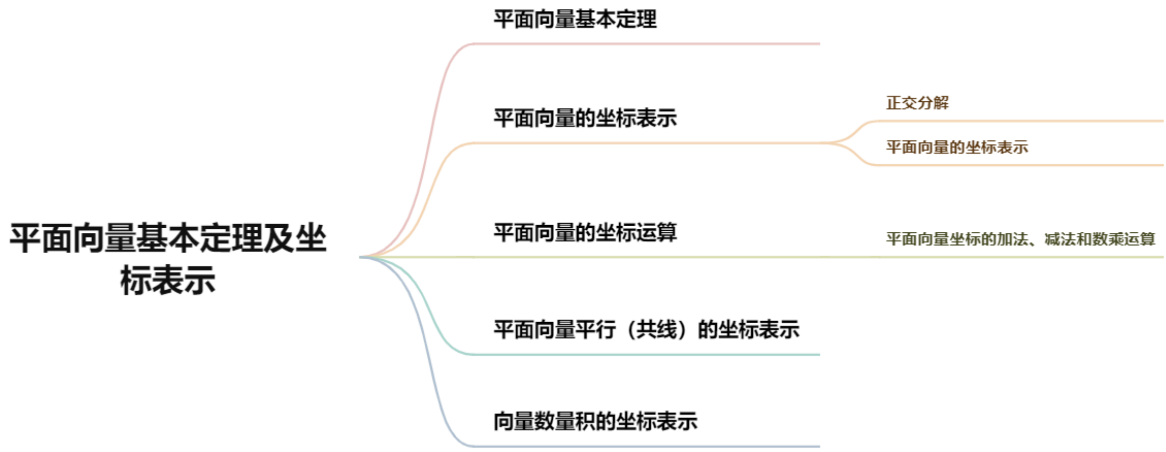
专题 03 平面向量基本定理及坐标表示

考点聚焦

思维导图



核心考点聚焦

考点一：平面向量基本定理

考点二：利用平面向量基本定理证明三点共线问题

考点三：平面向量的坐标运算

考点四：平面向量平行的坐标表示

考点五：平面向量数量积的坐标表示及运算

考点六：平面向量数量积的综合应用

重点速记

知识点一：平面向量基本定理

1、平面向量基本定理

如果$\vec{e_1},\vec{e_2}$是同一平面内两个不共线的向量，那么对于这个平面内任一向量$\vec{a}$，有且只有一对实数λ_1,λ_2，使$\vec{a}=\lambda_1\vec{e_1}+\lambda_2\vec{e_2}$，称$\lambda_1\vec{e_1}+\lambda_2\vec{e_2}$为$\vec{e_1},\vec{e_2}$的线性组合.

①其中$\vec{e_1},\vec{e_2}$叫做表示这一平面内所有向量的基底；

②平面内任一向量都可以沿两个不共线向量$\vec{e_1},\vec{e_2}$的方向分解为两个向量的和，并且这种分解是唯一的.

这说明如果$\vec{a}=\lambda_1\vec{e_1}+\lambda_2\vec{e_2}$且$\vec{a}=\lambda_1'\vec{e_1}+\lambda_2'\vec{e_2}$，那么$\lambda_1=\lambda_1',\lambda_2=\lambda_2'$.

③当基底$\vec{e_1},\vec{e_2}$是两个互相垂直的单位向量时，就建立了平面直角坐标系，因此平面向量基本定理实际上是平面向量坐标表示的基础.

知识点诠释：

平面向量基本定理的作用：平面向量基本定理是建立向量坐标的基础，它保证了向量与坐标是一一对应的，在应用时，构成两个基底的向量是不共线向量.

2、如何使用平面向量基本定理

平面向量基本定理反映了平面内任意一个向量可以写成任意两个不共线的向量的线性组合.

（1）由平面向量基本定理可知，任一平面直线形图形，都可以表示成某些向量的线性组合，这样在解答几何问题时，就可以先把已知和结论表示为向量的形式，然后通过向量的运算，达到解题的目的.

（2）在解具体问题时，要适当地选取基底，使其他向量能够用基底来表示．选择了不共线的两个向量$\vec{e_1}$、$\vec{e_2}$，平面上的任何一个向量$\vec{a}$都可以用$\vec{e_1}$、$\vec{e_2}$唯一表示为$\vec{a}=\lambda_1\vec{e_1}+\lambda_2\vec{e_2}$，这样几何问题就转化为代数问题，转化为只含有$\vec{e_1}$、$\vec{e_2}$的代数运算.

知识点二：平面向量的坐标表示

1、正交分解

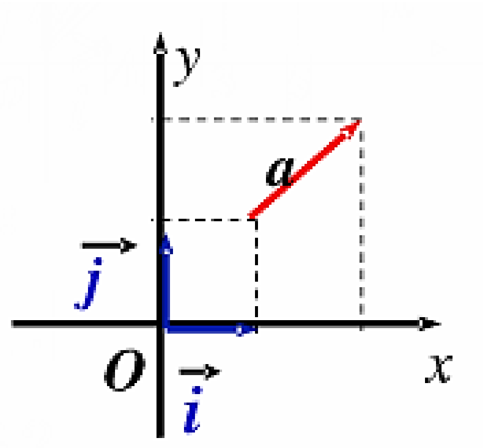
把一个向量分解为两个互相垂直的向量，叫做把向量正交分解.

知识点诠释：

如果基底的两个基向量e_1、e_2互相垂直，则称这个基底为正交基底，在正交基底下分解向量，叫做正交分解，事实上，正交分解是平面向量基本定理的特殊形式.

2、平面向量的坐标表示

如图，在平面直角坐标系内，分别取与x轴、y轴方向相同的两个单位向量$\vec{i}$、$\vec{j}$作为基底，对于平面上的一个向量$\vec{a}$，由平面向量基本定理可知，有且只有一对实数x,y，使得$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$．这样，平面内的任一向量$\vec{a}$都可由$x,y$唯一确定，我们把有序数对$(x,y)$叫做向量$\vec{a}$的（直角）坐标，记作$\vec{a}=(x,y)$，$x$叫做$\vec{a}$在$x$轴上的坐标，$y$叫做$\vec{a}$在$y$轴上的坐标．把$\vec{a}=(x,y)$叫做向量的坐标表示．给出了平面向量的直角坐标表示，在平面直角坐标系内，每一个平面向量都可以用一有序数对唯一表示，从而建立了向量与实数的联系，为向量运算数量化、代数化奠定了基础，沟通了数与形的联系.



知识点诠释：

（1）由向量的坐标定义知，两向量相等的充要条件是它们的坐标相等，即$\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow x_1=x_2$且$y_1=y_2$，其中$\vec{a}=(x_1,y_1),\vec{b}=(x_2,y_2)$．

（2）要把点的坐标与向量坐标区别开来．相等的向量的坐标是相同的，但始点、终点的坐标可以不同．比如，若$A(2,3)$，$B(5,8)$，则$\overrightarrow{AB}=(3,5)$；若$C(-4,3)$，$D(-1,8)$，则$\overrightarrow{CD}=(3,5)$，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，显然$A$、$B$、$C$、$D$四点坐标各不相同．

（3）(x,y)在直角坐标系中有双重意义，它既可以表示一个固定的点，又可以表示一个向量．

知识点三：平面向量的坐标运算

1、平面向量坐标的加法、减法和数乘运算

运　算	坐标语言
加法与减法	记$\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2)$ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$，$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$
实数与向量的乘积	记$\vec{a}=(x,y)$，则$\lambda\vec{a}$=（λx，λy）

2、如何进行平面向量的坐标运算

在进行平面向量的坐标运算时，应先将平面向量用坐标的形式表示出来，再根据向量的直角坐标运算法则进行计算．在求一个向量时，可以首先求出这个向量的起点坐标和终点坐标，再运用终点坐标减去起点坐标得到该向量的坐标．求一个点的坐标，可以转化为求该点相对于坐标原点的位置向量的坐标．但同时注意以下几个问题：

（1）点的坐标和向量的坐标是有区别的，平面向量的坐标与该向量的起点、终点坐标有关，只有起点在原点时，平面向量的坐标与终点的坐标才相等．

（2）进行平面向量坐标运算时，先要分清向量坐标与向量起点、终点的关系．

（3）要注意用坐标求向量的模与用两点间距离公式求有向线段的长度是一样的．

（4

）要清楚向量的坐标与表示该向量的有向线段的起点、终点的具体位置无关，只与其相对位置有关.

知识点四：平面向量平行（共线）的坐标表示

1、平面向量平行（共线）的坐标表示

设非零向量 $\vec{a}=(x_1,y_1),\vec{b}=(x_2,y_2)$，则 $\vec{a}\,//\,\vec{b}\Leftrightarrow(x_1,y_1)=\lambda(x_2,y_2)$，即 $\begin{cases}x_1=\lambda x_2\\y_1=\lambda y_2\end{cases}$，或 $x_1y_2-x_2y_1=0$.

知识点诠释：

若 $\vec{a}=(x_1,y_1),\vec{b}=(x_2,y_2)$，则 $\vec{a}\,//\,\vec{b}$ 不能表示成 $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$,因为分母有可能为 0.

2、三点共线的判断方法

判断三点是否共线，先求每两点对应的向量，然后再按两向量共线进行判定，即已知

$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$, $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$，$\overrightarrow{AC}=(x_3-x_1,y_3-y_1)$，

若 $(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)=0$, 则 A，B，C 三点共线.

知识点五：向量数量积的坐标表示

1、已知两个非零向量 $\vec{a}=(x_1,y_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2)$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$

2、设 $\vec{a}=(x,y)$，则 $|\vec{a}|^2=x^2+y^2$ 或 $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$

3、如果表示向量 $\vec{a}$ 的有向线段的起点和终点的坐标分别为 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)，那么 $|\vec{a}|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$（平面内两点间的距离公式）.

难点强化

向量在几何中的应用

（1）证明线段平行问题，包括相似问题，常用向量平行（共线）的充要条件

$\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}(\vec{b}\neq\vec{0})\Leftrightarrow(x_1,y_1)=\lambda(x_2,y_2)$

（2）证明垂直问题，常用垂直的充要条件

$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$

（3）求夹角问题，利用 $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

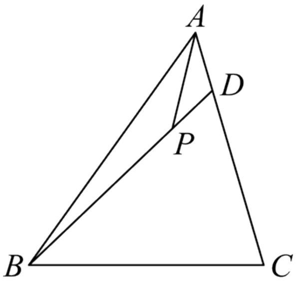
（4）求线段的长度，可以利用 $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$ 或 $|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

学以致用

考点剖析

考点一：平面向量基本定理

例 1.（2024·河南省直辖县级单位·高一河南省济源第一中学校考阶段练习）如图，在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$，$P$是线段$BD$上一点，若$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$，则实数$m$的值为（　　）



A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{5}{6}$　　D．$\frac{1}{2}$

【答案】A

【解析】$\because\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$，$\therefore\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AD}$，

又$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$，$\therefore\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$，

$\because B$，P，D三点共线，$\therefore m+\frac{2}{3}=1$，$\therefore m=\frac{1}{3}$.

故选：A.

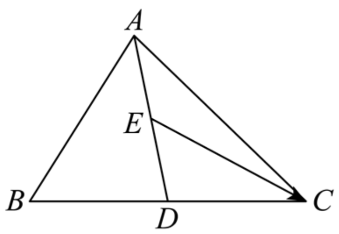
例 2.（2024·安徽芜湖·高一安徽省无为襄安中学校考）在$\triangle ABC$中，AD为BC边上的中线，E为AD的中点，则$\overrightarrow{EC}$等于（　　）

A．$\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　B．$-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$　　C．$-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　D．$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

【答案】B

【解析】因为$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，

所以$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.



故选：B

例 3.（2024·黑龙江齐齐哈尔·高一齐齐哈尔中学校考）设$\left\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right\}$

是平面内所有向量的一个基底，则下列不能作为基底的是（　）

A．$\vec{e_2}$ 和 $\vec{e_1}+\vec{e_2}$　　　　B．$\vec{e_1}$ 和 $\vec{e_1}-\vec{e_2}$

C．$2\vec{e_1}-4\vec{e_2}$ 和 $-\vec{e_1}+2\vec{e_2}$　　　　D．$\vec{e_1}+2\vec{e_2}$ 和 $2\vec{e_1}+\vec{e_2}$

【答案】C

【解析】对于 A，令 $\vec{e_2}=m\left(\vec{e_1}+\vec{e_2}\right)$，则 $\begin{cases}m=0\\m=1\end{cases}$，$m$ 不存在，$\therefore \vec{e_2}$，$\vec{e_1}+\vec{e_2}$ 不共线，可以作为基底，A 错误；

对于 B，令 $\vec{e_1}=n\left(\vec{e_1}-\vec{e_2}\right)$，则 $\begin{cases}-n=0\\n=1\end{cases}$，$n$ 不存在，$\therefore \vec{e_1}$，$\vec{e_1}-\vec{e_2}$ 不共线，可以作为基底，B 错误；

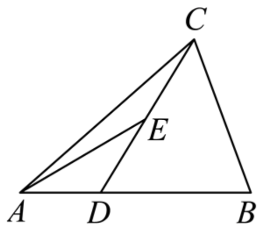
对于 C，$\because 2\vec{e_1}-4\vec{e_2}=-2\left(-\vec{e_1}+2\vec{e_2}\right)$，

$\therefore 2\vec{e_1}-4\vec{e_2}$ 和 $-\vec{e_1}+2\vec{e_2}$ 共线，不能作为一组基底，C 正确；

对于 D，令 $\vec{e_1}+2\vec{e_2}=t\left(2\vec{e_1}+\vec{e_2}\right)$，则 $\begin{cases}2t=1\\t=2\end{cases}$，$t$ 不存在，$\therefore \vec{e_1}+2\vec{e_2}$，$2\vec{e_1}+\vec{e_2}$ 不共线，可以作为基底，D 错误.

故选：C.

变式 1．（2024·广东佛山·高一校考）如图，在$\triangle ABC$ 中，$AD=\frac{1}{3}AB$，点 E 是 CD 的中点．设 $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CB}=\vec{b}$，则 $\overrightarrow{EA}=$（　）



A．$\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}$　　B．$\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}$　　C．$\frac{1}{6}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$　　D．$\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$

【答案】A

【解析】由题意在$\triangle ABC$ 中，$AD=\frac{1}{3}AB$，点 E 是 CD 的中点，

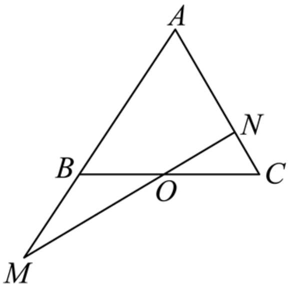
故 $\overrightarrow{EA}=-\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{6}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})$

$=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}=\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}$，

故选：A

变式 2．（2024·山东泰安·高一泰安一中校考）如图所示，在$\triangle ABC$中，点O是BC的中点，过点O的直线分别交直线AB、AC于不同的两点M、N，若$\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AN}(m,n>0)$，则$m+n$的值为（　）



A．2　　　　B．3　　　　C．$\dfrac{9}{2}$　　　　D．5

【答案】A

【解析】因为点O是BC的中点，

所以$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，

又因为$\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AN}(m,n>0)$

所以$\overrightarrow{AO}=\frac{m}{2}\overrightarrow{AM}+\frac{n}{2}\overrightarrow{AN}$，

因为O,M,N三点共线，

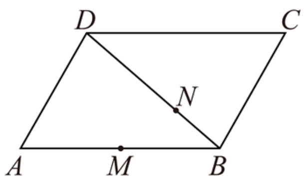
所以$\frac{m}{2}+\frac{n}{2}=1$，

所以$m+n=2$.

故选：A

考点二：利用平面向量基本定理证明三点共线问题

例 4．（2024·全国·高一随堂练习）如图，在$▱ABCD$中，点M为AB的中点，点N在BD上，$3BN=BD$.



求证：M，N，C三点共线.

【解析】设$\overrightarrow{CD}=\vec{a},\overrightarrow{CB}=\vec{b}$，

则$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b},\overrightarrow{CN}=\vec{b}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}=\vec{b}+\frac{1}{3}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b},$

所以$\overrightarrow{CM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CN}$，

又因为$\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CN}$有公共起点$C$，所以$M$，$N$，$C$三点共线.

例 5．（2024·全国·高一专题练习）设两个非零向量$\vec{a}$与$\vec{b}$不共线.

(1)若 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\vec{b},\overrightarrow{BC}=2\vec{a}+8\vec{b},\overrightarrow{CD}=3\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$，求证：$A,B,D$ 三点共线；

(2)试确定实数 k，使 $k\vec{a}+\vec{b}$ 和 $\vec{a}+k\vec{b}$ 反向共线．

【解析】（1）$\because \overrightarrow{AB}=\vec{a}+\vec{b},\overrightarrow{BC}=2\vec{a}+8\vec{b},\overrightarrow{CD}=3\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$，

$\therefore \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=2\vec{a}+8\vec{b}+3\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=2\vec{a}+8\vec{b}+3\vec{a}-3\vec{b}=5\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=5\overrightarrow{AB}$，

$\therefore \overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BD}$ 共线，

又 $\because$ 它们有公共点 B，$\therefore A$、B、D 三点共线．

（2）$\because k\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}+k\vec{b}$ 反向共线，$\therefore$ 存在实数 $\lambda(\lambda<0)$，使 $k\vec{a}+\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}+k\vec{b}\right)$，

即 $k\vec{a}+\vec{b}=\lambda\vec{a}+\lambda k\vec{b}$，

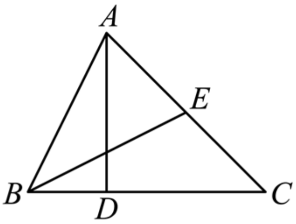
$\therefore (k-\lambda)\vec{a}=(\lambda k-1)\vec{b}$．

$\because \vec{a}$、$\vec{b}$ 是不共线的两个非零向量，

$\therefore \begin{cases}k-\lambda=0\\ \lambda k-1=0\end{cases}$，$\therefore k^2-1=0$，$\therefore k=\pm1$，

$\because \lambda<0$，$\therefore k=-1$．

例 6．（2024·河南南阳·高一社旗县第一高级中学校联考期末）如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{DB},\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EC}$．



(1)用 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$ 表示 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BE}$；

(2)若点 M 满足 $\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$，证明：$B$，$M$，$E$ 三点共线．

【解析】（1）因为 $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{DB},\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EC}$，

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BD}$

$=\overrightarrow{AB}+3\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}$，

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right)=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\times3\overrightarrow{BD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\times3\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)$

$=-2\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$．

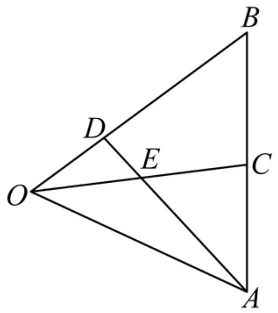
（2）由 $\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$，

可得 $\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\times 2\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$，

所以 $2\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=2\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AE}\right)$，即 $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{EM}$，

所以 B，M，E 三点共线.

变式 3.（2024·河北张家口·高一河北省尚义县第一中学校考阶段练习）如图，在 $\triangle OAB$ 中，C 是 AB 的中点，D 是线段 OB 上靠近点 O 的三等分点，设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.



(1)用向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{OC},\overrightarrow{CD}$；

(2)若 $\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$，求证：$A,D,E$ 三点共线.

【解析】（1）$\because \overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},C$ 是 AB 的中点，

$\therefore \overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$；

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{a}\right)=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}$.

（2）$\because \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}\vec{b}-\vec{a}$，

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)-\vec{a}=-\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$

$\therefore \overrightarrow{AE}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 平行，

又 $\because \overrightarrow{AE}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 有公共点 A，

$\therefore A,D,E$ 三点共线.

变式 4.（2024·安徽六安·高一毛坦厂中学校考）已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 不共线，$\overrightarrow{AP}=\vec{a}-t\vec{b}$，$\overrightarrow{BP}=-\vec{a}+2\vec{b}$，$\overrightarrow{BQ}=3\vec{a}-2\vec{b}$.

(1)若 $t=-2$，$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{BP}+y\overrightarrow{BQ}$，求 x，y 的值；

(2)若 A，P，Q 三点共线，求实数 t 的值.

【解析】（1）当 $t=-2$ 时，$\overrightarrow{AP}=\vec{a}+2\vec{b}$，$\overrightarrow{BP}=-\vec{a}+2\vec{b}$，$\overrightarrow{BQ}=3\vec{a}-2\vec{b}$，

$x\overrightarrow{BP}+y\overrightarrow{BQ}=-x\vec{a}+2x\vec{b}+3y\vec{a}-2y\vec{b}=\left(3y-x\right)\vec{a}+\left(2x-2y\right)\vec{b}$

所以$\begin{cases}3y-x=1\\2x-2y=2\end{cases}$，解得$x=2$，$y=1$.

（2）$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BQ}=\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{a}-2\vec{b}=4\vec{a}-4\vec{b}$，$\overrightarrow{AP}=\vec{a}-t\vec{b}$，

由于 A，P，Q 三点共线，所以存在$\lambda(\lambda\neq 0)$，使$\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{AP}$，

则$4\vec{a}-4\vec{b}=\lambda\vec{a}-\lambda t\vec{b}$，

整理，得$(4-\lambda)\vec{a}+(\lambda t-4)\vec{b}=0$.

因为 a，b 不共线，

所以$\begin{cases}4-\lambda=0\\\lambda t-4=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}\lambda=4\\t=1\end{cases}$

故实数 t 的值为 1.

考点三：平面向量的坐标运算

例 7.（2024·天津和平·高一耀华中学校考阶段练习）Y $ABCD$ 的三个顶点 $A(-3,0)$，$B(2,-2)$，$C(5,2)$，则顶点 D 的坐标为______.

【答案】$(0,4)$

【解析】设$D(x,y)$，在Y $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，

又$\overrightarrow{AB}=(5,-2)$，$\overrightarrow{DC}=(5-x,2-y)$，

$\therefore\begin{cases}5=5-x\\-2=2-y\end{cases}$解得$\begin{cases}x=0\\y=4\end{cases}$

所以顶点 D 的坐标为$(0,4)$.

故答案为：$(0,4)$.

例 8.（2024·黑龙江鹤岗·高一鹤岗一中校考阶段练习）已知点 $A(1,-1),B(-2,3)$，则与向量$\overrightarrow{AB}$方向相同的单位向量为________.

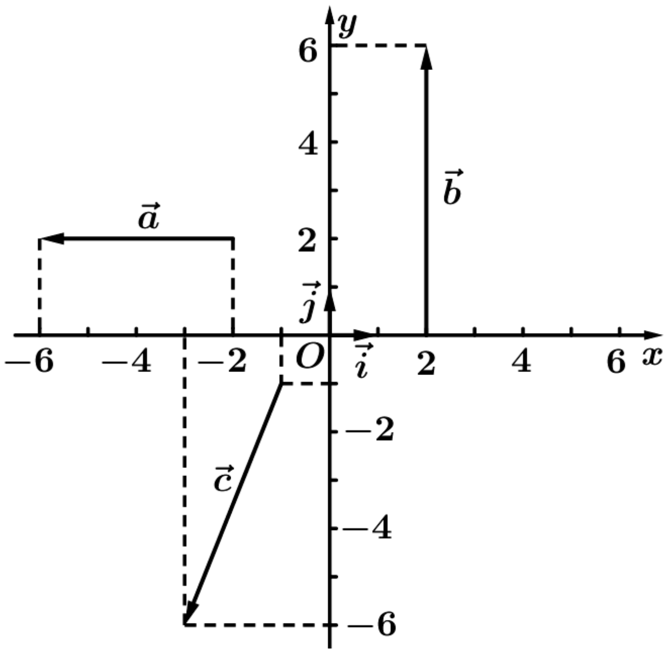
【答案】$\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$

【解析】因为$A(1,-1),B(-2,3)$，所以$\overrightarrow{AB}=(-3,4)$，则与向量$\overrightarrow{AB}$方向相同的单位向量为

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{(-3,4)}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}=\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right).$$

故答案为：$\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$.

例 9.（2024·高一课时练习）如图，向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$的坐标分别是______，________，__________.



【答案】 $(-4,0)$ $(0,6)$ $(-2,-5)$

【解析】将向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$分别向基底$\vec{i}$，$\vec{j}$所在的直线分解，

则$\vec{a}=-4\vec{i}+0\cdot\vec{j}$，$\vec{b}=0\cdot\vec{i}+6\vec{j}$，$\vec{c}=-2\vec{i}-5\vec{j}$，

所以$\vec{a}=(-4,0)$，$\vec{b}=(0,6)$，$\vec{c}=(-2,-5)$，

故答案为：$(-4,0)$；$(0,6)$；$(-2,-5)$.

变式 5.（2024·湖北武汉·高一武汉外国语学校（武汉实验外国语学校）校考期末）已知$A(2,3)$，$B(4,-3)$，点P在线段AB的延长线上，且$|\overrightarrow{AP}|=\frac{4}{3}|\overrightarrow{PB}|$，则点$P$的坐标为_____.

【答案】$(10,-21)$

【解析】点P在线段AB的延长线上，$\overrightarrow{AP}$与$\overrightarrow{PB}$方向相反，

由$|\overrightarrow{AP}|=\frac{4}{3}|\overrightarrow{PB}|$，则有$\overrightarrow{AP}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{PB}$，

设$P(x,y)$，则$(x-2,y-3)=-\frac{4}{3}(4-x,-3-y)$，即$\begin{cases}x-2=-\frac{4}{3}(4-x)\\y-3=-\frac{4}{3}(-3-y)\end{cases}$，

解得$\begin{cases}x=10\\y=-21\end{cases}$，故点$P$的坐标为$(10,-21)$.

故答案为：$(10,-21)$

变式 6.（2024·辽宁抚顺·高一校联考）若$A(-1,-4)$，$B(5,-1)$，C为AB的中点，D为AB上更靠近A的三等分点，则C的坐标为_____，D的坐标为_____.

【答案】 $\left(2,-\frac{5}{2}\right)$ $(1,-3)$

【解析】根据中点坐标公式，C的坐标为$\left(\frac{-1+5}{2},\frac{-4-1}{2}\right)=\left(2,-\frac{5}{2}\right)$，

$\overrightarrow{AB}=(6,3)$，则$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=(2,1)$．因为$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=(1,-3)$，所以$D$的坐标为$(1,-3)$．

故答案为：$\left(2,-\frac{5}{2}\right)$，$(1,-3)$

考点四：平面向量平行的坐标表示

例 10．（2024·贵州毕节·高一校考）已知向量$\vec{a}=\left(\frac{1}{2},-1\right)$，$\vec{b}=(2,1)$，则与向量$2\vec{a}+\vec{b}$共线的向量的坐标可以是（ ）

A．$(-3,1)$　　B．$(-8,3)$　　C．$(-9,4)$　　D．$(3,-2)$

【答案】A

【解析】因为$\vec{a}=\left(\frac{1}{2},-1\right)$，$\vec{b}=(2,1)$，所以$2\vec{a}+\vec{b}=(1,-2)+(2,1)=(3,-1)$，

对选项 A：因为$(-3)\times(-1)=1\times3$，所以两向量共线，A 正确；

对选项 B：因为$3\times3\neq(-8)\times(-1)$，所以两向量不共线，B 错误；

对选项 C：因为$4\times3\neq(-9)\times(-1)$，所以两向量不共线，C 错误；

对选项 D：因为$3\times(-1)\neq(-2)\times3$，所以两向量不共线，D 错误；

故选：A.

例 11．（2024·北京顺义·高一牛栏山一中校考）已知向量$\vec{a}=(2,1)$，$\vec{b}=(x,-2)$，若$\vec{a}//\vec{b}$，则$\vec{a}+\vec{b}=$（ ）

A．$(-2,-1)$　　B．$(2,1)$　　C．$(4,2)$　　D．$(-4,-2)$

【答案】A

【解析】因为向量$\vec{a}=(2,1)$，$\vec{b}=(x,-2)$，$\vec{a}//\vec{b}$，所以$2\times(-2)-x=0$，得到$x=-4$，

所以$\vec{b}=(-4,-2)$，得到$\vec{a}+\vec{b}=(-2,-1)$，

故选：A.

例 12．（2024·四川成都·校联考一模）已知$\vec{a}=(1-m,2)$，$\vec{b}=(n,1)$，$m>0$，$n>0$，若存在非零实数λ使得$\vec{a}=\lambda\vec{b}$，则$\frac{1}{m}+\frac{2}{n}$的最小值为（ ）

A．8　　B．9　　C．10　　D．12

【答案】B

【解析】若存在非零实数λ使得$\vec{a}=\lambda\vec{b}$，即$\vec{a}//\vec{b}$，又$\vec{a}=(1-m,2)$，$\vec{b}=(n,1)$，

所以$1-m=2n$，即$m+2n=1$，

所以$\frac{1}{m}+\frac{2}{n}=\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}\right)(m+2n)=5+\frac{2n}{m}+\frac{2m}{n}\geq 5+2\sqrt{\frac{2n}{m}\cdot\frac{2m}{n}}=9$，

当且仅当$\frac{2n}{m}=\frac{2m}{n}$，即$m=n=\frac{1}{3}$时，等号成立.

所以$\frac{1}{m}+\frac{2}{n}$的最小值为9.

故选 ：B

变式 7.（2024·黑龙江齐齐哈尔·高一齐齐哈尔中学校考）已知$\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=(-1,m)$，$\vec{c}=(2,1)$，若$(\vec{a}+2\vec{b})//\vec{c}$，则实数$m=$（　）

A．1　　B．-1　　C．$-\frac{1}{4}$　　D．$\frac{1}{4}$

【答案】C

【解析】$\vec{a}+2\vec{b}=(1,0)+2(-1,m)=(-1,2m)$，$\vec{c}=(2,1)$，

由$(\vec{a}+2\vec{b})//\vec{c}$得，$-1-4m=0$，解得$m=-\frac{1}{4}$，

故选：C.

变式 8.（2024·贵州安顺·高一统考期末）若三点$A(2,3)$、$B(4,7)$、$C(3,y)$共线，则实数y的值为（　）

A．1　　B．$\frac{5}{2}$　　C．3　　D．5

【答案】D

【解析】已知三点$A(2,3)$、$B(4,7)$、$C(3,y)$共线，则$\overrightarrow{AB}=(2,4)$，$\overrightarrow{AC}=(1,y-3)$，

由题意可知$\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{AC}$，所以，$2(y-3)=4$，解得$y=5$.

故选：D.

变式 9.（2024·河北唐山·高一校联考）已知$A(0,1)$，$B(1,-3)$，$C(2,k)$，且A，B，C三点共线，则$k=$______.

【答案】-7

【解析】$\because A,B,C$三点共线，$\therefore \overrightarrow{AB}//\overrightarrow{BC}$.

$\because A(0,1),B(1,-3),C(2,k),\therefore \overrightarrow{AB}=(1,-4),\overrightarrow{BC}=(1,k+3)$，

$\therefore 1\times(k+3)-1\times(-4)=0,\therefore k=-7$.

故答案为：-7.

考点五：平面向量数量积的坐标表示及运算

例 13.（2024·天津和平·高一统考期末）已知向量$\vec{a}=(2,1),\vec{b}=(-3,4)$，则向量$\vec{b}$在$\vec{a}$

方向上的投影向量的坐标为________.

【答案】$(-\frac{4}{5},-\frac{2}{5})$

【解析】向量$\vec{a}=(2,1),\vec{b}=(-3,4)$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-3)+1\times4=-2,|\vec{a}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，

所以向量$\vec{b}$在$\vec{a}$方向上的投影向量为$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=-\frac{2}{5}\vec{a}=(-\frac{4}{5},-\frac{2}{5})$

故答案为：$(-\frac{4}{5},-\frac{2}{5})$

例 14．（2024·湖南邵阳·高一校考阶段练习）已知向量$\vec{a}=(3,-1),\vec{b}-\vec{a}=(-4,2)$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$________.

【答案】-4

【解析】$\because\vec{a}=(3,-1),\vec{b}-\vec{a}=(-4,2)$，

$\therefore\vec{b}=\vec{b}-\vec{a}+\vec{a}=(-1,1)$，

$\therefore\vec{a}\cdot\vec{b}=(3,-1)\cdot(-1,1)=-1\times3+1\times(-1)=-4$，

故答案为：-4.

例 15．（2024·云南昆明·高一校考阶段练习）设x，$y\in\mathrm{R}$，向量$\vec{a}=(x,1)$，$\vec{b}=(2,y)$，$\vec{c}=(3,6)$，且$\vec{a}\perp\vec{c}$，$\vec{b}\parallel\vec{c}$，则向量$\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{a}-\vec{c}$的夹角大小为_____.

【答案】$\frac{3\pi}{4}$

【解析】由题意得$3x+6=0,3y-2\times6=0$，解得$x=-2,y=4$，

故$\vec{a}+\vec{b}=(-2,1)+(2,4)=(0,5)$，$\vec{a}-\vec{c}=(-2,1)-(3,6)=(-5,-5)$，

则$\cos\langle\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{c}\rangle=\frac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{c})}{|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{a}-\vec{c}|}=\frac{(0,5)\cdot(-5,-5)}{5\times\sqrt{25+25}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

因为$\langle\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{c}\rangle\in(0,\pi)$，所以$\langle\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{c}\rangle=\frac{3\pi}{4}$.

故答案为：$\frac{3\pi}{4}$

变式 10．（2024·广东佛山·高一校联考阶段练习）已知向量$\vec{a}=(2,4),\vec{b}=(1,7)$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$夹角的余弦值为_________.

【答案】$\frac{3\sqrt{10}}{10}$

【解析】由题意可得：$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times1+4\times7=30$，$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5},|\vec{b}|=\sqrt{1^2+7^2}=5\sqrt{2}$，

所以$\vec{a}$与$\vec{b}$夹角的余弦值$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{30}{2\sqrt{5}\times5\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.