阶段拔尖专训11 根的判别式、根与系数的关系的综合应用

应用1 已知方程一根，求另一根及待定系数

1.若关于x的一元二次方程$x^2-mx+2=0$有一个根是$x=2$，求m的值及方程的另一个根.

【解】设另一个根为x_1. $\because x^2-mx+2=0$，

$\therefore x_1+2=m, x_1\times 2=2$，解得$x_1=1$，$m=3$.

$\therefore m$的值为3，方程的另一个根为1.

应用2 已知方程两根，求有关两根的代数式的值

2.[2024·淄博期末] 已知α ，β 是方程$x^2+2x-4=0$的两个实数根.求出下列代数式的值.

【解】$\because \alpha$ ，β 是方程$x^2+2x-4=0$的两个实数根，

$\therefore \alpha+\beta=-2$，$\alpha\beta=-4$，$\alpha^2+2\alpha=4$.

（1）$\alpha+\beta(\alpha+1)$;

$\alpha+\beta(\alpha+1)=\alpha+\alpha\beta+\beta=-2+(-4)=-6$.

(2) $\alpha^2+4\alpha+2\beta$.

$\alpha^2+4\alpha+2\beta=\alpha^2+2\alpha+2\alpha+2\beta=\alpha^2+2\alpha+2(\alpha+\beta)=$

$4+2\times(-2)=4-4=0.$

3.对于一切不小于2的自然数n，关于x的一元二次方程$x^2-(n+2)x-2n^2=0$的两个根为a_n，$b_n(n\geq 2)$，求$\frac{1}{(a_2-2)(b_2-2)}+\frac{1}{(a_3-2)(b_3-2)}+\cdots+\frac{1}{(a_{2\,025}-2)(b_{2\,025}-2)}$的值.

【解】由根与系数的关系得$a_n+b_n=n+2$，

$a_nb_n=-2n^2$，$\therefore (a_n-2)(b_n-2)=a_nb_n-2(a_n+b_n)+4=-2n^2-2(n+2)+4=-2n(n+1)$，

$\therefore \frac{1}{(a_n-2)(b_n-2)}=\frac{1}{-2n(n+1)}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，$\therefore \frac{1}{(a_2-2)(b_2-2)}+\frac{1}{(a_3-2)(b_3-2)}+\cdots+\frac{1}{(a_{2\,025}-2)(b_{2\,025}-2)}=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2\,025}-\frac{1}{2\,026}\right)\right]=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\,026}\right)=-\frac{1}{2}\times\frac{506}{1\,013}=-$

应用3 已知两方程，求含两未知数的代数式的值

4.[2024·枣庄薛城区月考] 已知不相等的实数a，b满足$a^2-3a-1=0$，$b^2-3b-1=0$，求$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$的值.

【解】∵ 不相等的实数a，b满足$a^2-3a-1=0$，$b^2-3b-1=0$，∴ a，b可看作是方程$x^2-3x-1=0$的两实数根.

$\therefore a+b=3$，$ab=-1$.

$\therefore$ 原式$=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}=\frac{3^2-2\times(-1)}{-1}=-11$.

5. 新考法 阅读类比法 阅读材料：

材料1：关于x的一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的两个实数根x_1,x_2和系数a，b，c有如下关系：$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$.

材料2：已知一元二次方程$x^2-x-1=0$的两个实数根分别为m，n，求m^2n+mn^2的值.

解：$\because m$，n是一元二次方程$x^2-x-1=0$的两个实数根，

$\therefore m+n=1$，$mn=-1$.

$\therefore\ m^2n+mn^2=mn(m+n)=-1\times 1=-1$.

根据上述材料，结合你所学的知识，完成下列问题：

（1）应用：一元二次方程$2x^2 - x - 1 = 0$的两个实数根为x_1，x_2，则$x_1 + x_2 =$ $\underline{\frac{1}{2}}$，$x_1 x_2 =$ $\underline{-\frac{1}{2}}$.

（2）类比：已知一元二次方程$2x^2 + 3x - 1 = 0$的两个实数根为m，n，求$m^2 + n^2$的值.

$\because$ 一元二次方程$2x^2 + 3x - 1 = 0$的两根分别为m，n，

$\therefore m + n = -\frac{3}{2}$，$mn = -\frac{1}{2}$.

$\therefore m^2 + n^2 = (m+n)^2 - 2mn = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}$.

（3）提升：已知实数s，t满足$2s^2+3s-1=0$，$2t^2+3t-1=0$，且$s\neq t$，求$\frac{1}{s}-\frac{1}{t}$的值.

$\because$ 实数s，t满足$2s^2+3s-1=0$，$2t^2+3t-1=0$，且$s\neq t$，$\therefore s$，t可看作是一元二次方程$2x^2+3x-1=0$的两个实数根.

$\therefore s+t=-\frac{3}{2}$，$st=-\frac{1}{2}$.

$\because (t-s)^2=(t+s)^2-4st=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{4}$，

$\therefore t-s=\pm\frac{\sqrt{17}}{2}$.$\therefore \frac{1}{s}-\frac{1}{t}=\frac{t-s}{st}=\frac{\pm\frac{\sqrt{17}}{2}}{-\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{17}$.

应用4 已知方程，求字母系数的取值范围

6.已知关于x的一元二次方程$x^2-3x+k+1=0$的两根的平方和小于5,求k的取值范围.

【解】设方程的两根分别为x_1,x_2,则$x_1+x_2=3$,

$x_1x_2=k+1$. $\because$ 关于x的一元二次方程$x^2-3x+k+1=0$的两根的平方和小于5,

$\therefore x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=3^2-2(k+1)<5$. $\therefore k>1$.

$\because \Delta=(-3)^2-4(k+1)\geq 0$, $\therefore k\leq\frac{5}{4}$. $\therefore 1<k\leq\frac{5}{4}$.

点方法 此类题易忽略$\Delta \geq 0$这个条件，做题时要注意方程有根的条件.