专题03 特殊的平行四边形中的最值模型-费马点模型

费马点问题是由全等三角形中的手拉手模型衍生而来，主要考查转化与化归等的数学思想，在各类考试中都以中高档题为主。本专题就最值模型中的费马点问题进行梳理及对应试题分析，方便掌握。

【模型背景】皮耶·德·费马，17世纪法国数学家，有“业余数学家之王”的美誉，之所以叫业余并非段位不够，而是因为其主职是律师，兼职搞搞数学．费马在解析几何、微积分等领域都有卓越的贡献，除此之外，费马广为人知的是以其名字命名的“费马小定理”、“费马大定理”等．**费马点：**三角形内的点到三个顶点距离之和最小的点。

【模型解读】

结论 如图，点M为$\triangle ABC$内任意一点，连接AM、BM、CM，当M与三个顶点连线的夹角为120°时，$MA+MB+MC$的值最小。

注意：上述结论成立的条件是△ABC的最大的角要小于120º，若最大的角大于或等于120º，此时费马点就是最大角的顶点A。（这种情况一般不考，通常三角形的最大顶角都小于120°）

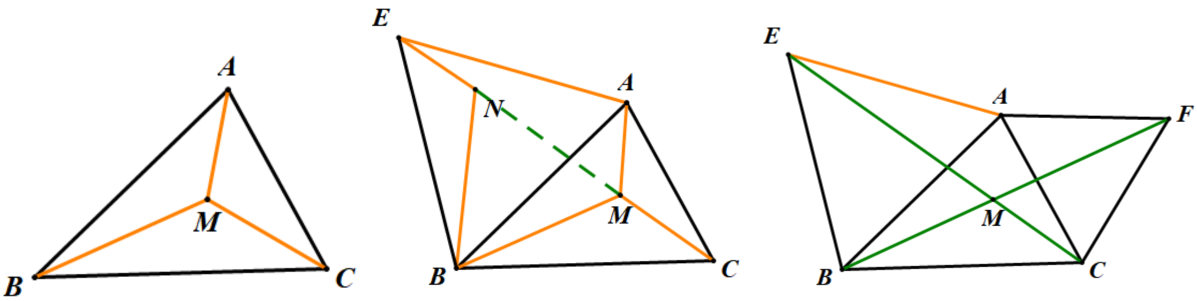

图3

【模型证明】以AB为一边向外作等边三角形$\triangle ABE$，将BM绕点B逆时针旋转60°得到BN，连接EN.

∵$\triangle ABE$为等边三角形，∴$AB=BE$，$\angle ABE=60°$．而$\angle MBN=60°$，∴$\angle ABM=\angle EBN$.

在$\triangle AMB$与$\triangle ENB$中，∵$\begin{cases} AB=BE \\ \angle ABM=\angle EBN \\ BM=BN \end{cases}$，∴$\triangle AMB\cong\triangle ENB$（$SAS$）.

连接MN．由$\triangle AMB\cong\triangle ENB$知，$AM=EN$．∵$\angle MBN=60°$，$BM=BN$，∴$\triangle BMN$为等边三角形．

∴$BM=MN$．∴$AM+BM+CM=EN+MN+CM$．∴当E、N、M、C四点共线时，$AM+BM+CM$的值最小．

此时，$\angle BMC=180°-\angle NMB=120°$；$\angle AMB=\angle ENB=180°-\angle BNM=120°$；

$\angle AMC=360°-\angle BMC-\angle AMB=120°$.

费马点的作法：如图3，分别以$\triangle ABC$的AB、AC为一边向外作等边$\triangle ABE$和等边$\triangle ACF$，连接CE、BF，设交点为M，则点M即为$\triangle ABC$的费马点。

【最值原理】两点之间，线段最短。

专题 03 特殊的平行四边形中的最值模型-费马点模型

费马点问题是由全等三角形中的手拉手模型衍生而来，主要考查转化与化归等的数学思想，在各类考试中都以中高档题为主。本专题就最值模型中的费马点问题进行梳理及对应试题分析，方便掌握。

【模型背景】皮耶·德·费马，17 世纪法国数学家，有“业余数学家之王”的美誉，之所以叫业余并非段位不够，而是因为其主职是律师，兼职搞搞数学．费马在解析几何、微积分等领域都有卓越的贡献，除此之外，费马广为人知的是以其名字命名的“费马小定理”、“费马大定理”等．**费马点：**三角形内的点到三个顶点距离之和最小的点。

【模型解读】

结论：如图，点 M 为△ABC 内任意一点，连接 AM、BM、CM，当 M 与三个顶点连线的夹角为 120°时，$MA+MB+MC$ 的值最小。

注意：上述结论成立的条件是△ABC 的最大的角要小于 120º，若最大的角大于或等于 120º，此时费马点就是最大角的顶点 A。（这种情况一般不考，通常三角形的最大顶角都小于 120°）

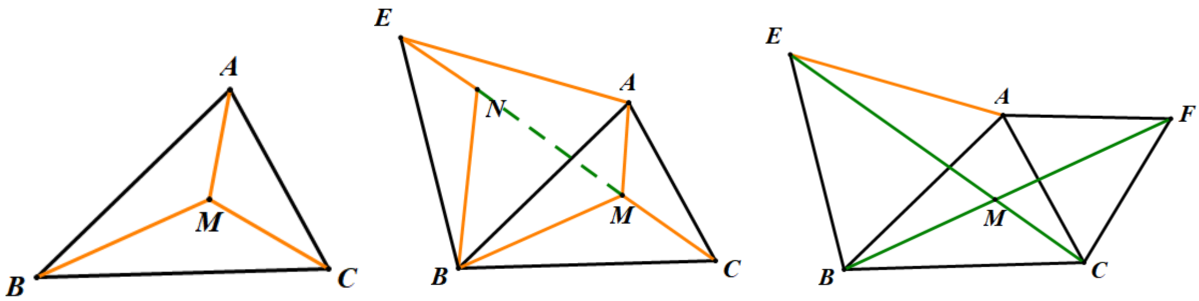

图3

【模型证明】以 AB 为一边向外作等边三角形△ABE，将 BM 绕点 B 逆时针旋转 60°得到 BN，连接 EN.

∵△ABE 为等边三角形，∴AB＝BE，∠ABE＝60°．而∠MBN＝60°，∴∠ABM＝∠EBN.

在△AMB 与△ENB 中，∵$\begin{cases} AB = BE \\ \angle ABM = \angle EBN \\ BM = BN \end{cases}$，∴△$AMB$≌△$ENB$（$SAS$）.

连接 MN．由△AMB≌△ENB 知，AM＝EN．∵∠MBN＝60°，BM＝BN，∴△BMN 为等边三角形.

∴BM＝MN．∴$AM+BM+CM$＝$EN+MN+CM$．∴当 E、N、M、C 四点共线时，$AM+BM+CM$ 的值最小.

此时，∠BMC＝180°﹣∠NMB＝120°；∠AMB＝∠ENB＝180°﹣∠BNM＝120°；

∠AMC＝360°﹣∠BMC﹣∠AMB＝120°.

费马点的作法：如图 3，分别以△ABC 的 AB、AC 为一边向外作等边△ABE 和等边△ACF，连接 CE、BF，设交点为 M，则点 M 即为△ABC 的费马点。

【最值原理】两点之间，线段最短。