

2024 届高三下学期开学摸底考（江苏专用）

数学

第 I 卷

一、单项选择题

1. 已知集合 $A = \{x | 2^x < 1\}$, $B = \{x | 4 - x^2 \geq 0\}$, 则 $A \cup B =$ ()

- A. $[-2, 0)$ B. $[-2, 2]$ C. $(-\infty, 2]$ D. $[-2, +\infty)$

【答案】C

【解析】由 $2^x < 1$, 得 $2^x < 2^0$, 解得 $x < 0$, 所以 $A = \{x | x < 0\}$,

由 $4 - x^2 \geq 0$, 得 $(2 - x)(2 + x) \geq 0$, 解得 $-2 \leq x \leq 2$,

所以 $B = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$, 所以 $A \cup B = \{x | x \leq 2\}$, 故选: C

2. 已知 i 是虚数单位, 若非零复数 z 满足 $(1 - i)z = |z|^2$, 则 $\frac{z}{1 + i} =$ ()

- A. 1 B. -1 C. i D. $-i$

【答案】A

【解析】设 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$), 则 $(1 - i)z = (1 - i)(a + bi) = (a + b) + (b - a)i$,

由 $(1 - i)z = |z|^2$ 可得 $(a + b) + (b - a)i = a^2 + b^2$,

所以, $\begin{cases} a + b = a^2 + b^2 \\ b - a = 0 \end{cases}$, 又因为 $z \neq 0$,

所以, $a = b = 1$, 则 $z = 1 + i$, 故 $\frac{z}{1 + i} = 1$. 故选: A.

3. 已知 $\sin \alpha \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{1}{3}$, 则 $\cos \alpha \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) =$ ()

- A. $\frac{5}{6}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $-\frac{1}{6}$

【答案】A

【解析】 $\cos \frac{\pi}{3} = \cos[\alpha + (\frac{\pi}{3} - \alpha)] = \cos \alpha \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) - \sin \alpha \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{1}{2}$,

则 $\cos \alpha \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. 故选: A

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, 点 E 为 CD 的中点, 设 $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{b}$, 则 $\overrightarrow{AB} =$ ()

- A. $6\vec{b} - 3\vec{a}$ B. $6\vec{b} - 2\vec{a}$ C. $4\vec{b} - 3\vec{a}$ D. $3\vec{b} - 2\vec{a}$

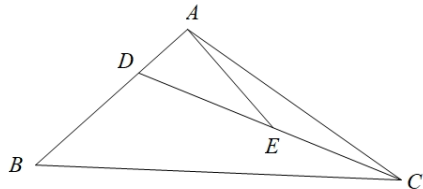
高级中学名校试卷

【答案】A

【解析】因为 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ，点 E 为 CD 的中点，

所以 $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AD} = 3(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA}) = 3\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{AC}$

$= 6(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}) + 3\overrightarrow{AC} = 6\overrightarrow{AE} - 3\overrightarrow{AC} = 6\overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{a}$. 故选：A.



5. 净水机通过分级过滤的方式使自来水逐步达到纯净水的标准，其工作原理中有多次的 PP 棉滤芯过滤，其中第一级过滤一般由孔径为 5 微米的 PP 棉滤芯（聚丙烯熔喷滤芯）构成，其结构是多层式，主要用于去除铁锈、泥沙、悬浮物等各种大颗粒杂质，假设每一层 PP 棉滤芯可以过滤掉三分之一的大颗粒杂质，若过滤前水中大颗粒杂质含量为 80mg/L ，现要满足过滤后水中大颗粒杂质含量不超过 2mg/L ，则 PP 棉滤芯的层数最少为（参考数据：

$\lg 2 \approx 0.30$ ， $\lg 3 \approx 0.48$ ）（ ）

A. 9

B. 8

C. 7

D. 6

【答案】A

【解析】设经过 n 层 PP 棉滤芯过滤后的大颗粒杂质含量为 y ，则 $y = 80 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^n = 80 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ，

令 $80 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 2$ ，解得 $\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \frac{1}{40}$ ，两边取常用对数得 $n \lg \frac{2}{3} \leq \lg \frac{1}{40}$ ，即 $n \lg \frac{3}{2} \geq \lg 40$

即 $n(\lg 3 - \lg 2) \geq 1 + 2\lg 2$ ，因为 $\lg 2 \approx 0.30$ ， $\lg 3 \approx 0.48$ ，

所以 $(0.48 - 0.30)n \geq 1.60$ ，解得 $n \geq \frac{80}{9}$ ，因为 $n \in \mathbb{N}^*$ ，所以 n 的最小值为 9.

故选：A

6. 已知 A, B 是一个随机试验中的两个事件，且 $P(A) = \frac{1}{2}$ ， $P(B) = \frac{1}{3}$ ， $P(A|B) = \frac{1}{4}$ ，则

$P(B|A) =$ （ ）

A. $\frac{5}{6}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{3}$

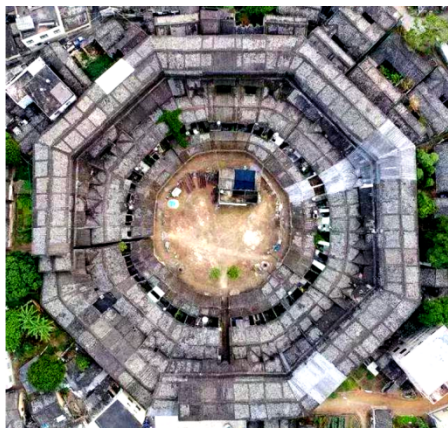
D. $\frac{1}{6}$

【答案】D

【解析】 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}, \therefore P(AB) = \frac{1}{12}, P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}.$

故选：D.

7. 道韵楼以“古、大、奇、美”著称，内部雕梁画栋，有倒吊莲花、壁画、雕塑等，是历史、文化、民俗一体的观光胜地。道韵楼可近似地看成一个正八棱柱，其底面面积约为 $3200(\sqrt{2}+1)$ 平方米，高约为 11.5 米，则该八棱柱的侧面积约是（ ）

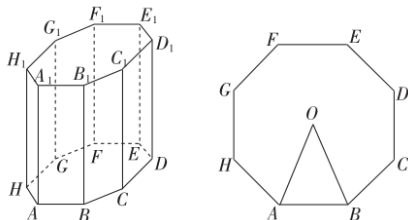


- A. 460 平方米 B. 1840 平方米 C. 2760 平方米 D. 3680 平方米

【答案】D

【解析】如图，由题意可知底面 $ABCDEFGH$ 是正八边形， $\angle AOB = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ ，由余弦定理可得 $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos \angle AOB = (2 - \sqrt{2})OA^2$ ，则 $OA^2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} AB^2$. 因为底面 $ABCDEFGH$ 的面积为 $3200(\sqrt{2} + 1)$ 平方米，所以 $8 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2 + \sqrt{2}}{2} AB^2 = 3200(\sqrt{2} + 1)$ ，解得 $AB = 40$. 则该八棱柱的侧面积为 $320 \times 11.5 = 3680$ 平方米.

故选：D.



8. 已知 F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，顶点在原点的抛物线 E 的焦点恰好是 F_2 ，设双曲线 C 与抛物线 E 的一个交点为 P ，若 $\cos \angle PF_1F_2 = \frac{3}{4}$ ，则双曲线 C

的离心率是 ()

- A. $2+\sqrt{3}$ B. $3+\sqrt{2}$ C. $\frac{3+\sqrt{2}}{3}$ D. $3\pm\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】过点 P 分别向 x 轴和抛物线的准线作垂线，垂足分别为 M, N ，不妨设

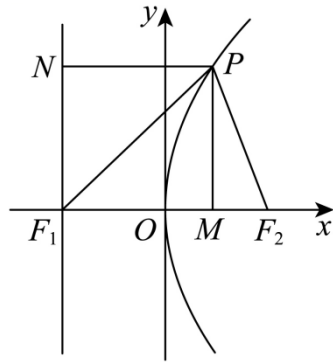
$$|PF_1|=m, |PF_2|=n,$$

$$\text{则 } |F_1M|=|PN|=|PF_2|=|PF_1|\cos\angle PF_1F_2=\frac{3}{4}m.$$

因为 P 为双曲线上的点，所以 $|PF_1|-|PF_2|=2a$ ，即 $m-\frac{3}{4}m=2a$ ，故 $m=8a, n=6a$ 。

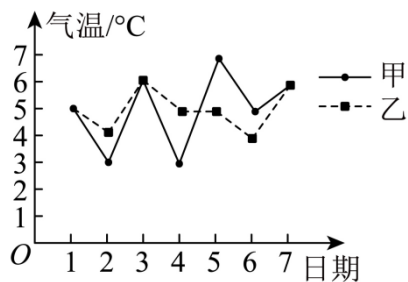
$$\text{又 } |F_1F_2|=2c, \text{ 在三角形 } PF_1F_2 \text{ 中，由余弦定理得 } \frac{3}{4}=\frac{64a^2+4c^2-36a^2}{2\times 8a\times 2c},$$

化简可得 $c^2-6ac+7a^2=0$ ，即 $e^2-6e+7=0$ ，解得 $e=3\pm\sqrt{2}$ ，故选：D。



二、多项选择题

9. 甲、乙两地 12 月初连续 7 天的日最高气温数据如图所示，则关于这 7 天，以下判断正确的是 ()



- A. 甲地日最高气温的平均数为 5°C B. 甲地日最高气温的极差为 3°C
C. 乙地日最高气温的众数为 6°C D. 乙地日最高气温的中位数为 5°C

【答案】AD

【解析】根据最高气温数据折线图可知，甲地日最高气温的平均数为

高级中学名校试卷

$$\frac{5+3+6+3+7+5+6}{7}=5, \text{ 即可知 A 正确;}$$

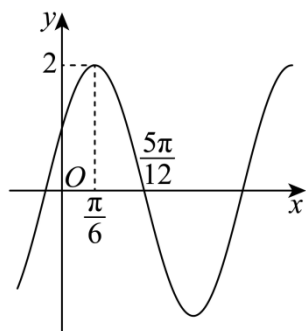
易知甲地日最高气温的极差为 $7^{\circ}\text{C}-3^{\circ}\text{C}=4^{\circ}\text{C}$, 故 B 错误;

由折线图可知乙地日最高气温分别为 $5^{\circ}\text{C}, 4^{\circ}\text{C}, 6^{\circ}\text{C}, 5^{\circ}\text{C}, 5^{\circ}\text{C}, 4^{\circ}\text{C}, 6^{\circ}\text{C}$, 所以众数为 5°C , 即 C 错误;

将乙地日最高气温排序可得 $4^{\circ}\text{C}, 4^{\circ}\text{C}, 5^{\circ}\text{C}, 5^{\circ}\text{C}, 5^{\circ}\text{C}, 6^{\circ}\text{C}, 6^{\circ}\text{C}$, 即中位数为 5°C , 可得 D 正确;

故选: AD

10. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示. 则 ()



- A. $f(x)$ 的图象关于 $\left(-\frac{\pi}{12}, 0\right)$ 中心对称
- B. $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$ 上单调递增
- C. 函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度可以得到函数 $g(x) = 2\sin 2x$ 的图象
- D. 将函数 $f(x)$ 的图象所有点的横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{2}$, 得到函数 $h(x) = 2\sin(4x + \frac{\pi}{6})$ 的图象

【答案】 ABD

【解析】 由图象可知 $A=2$, $\frac{T}{4} = \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4} \times \frac{2\pi}{\omega}$, 解得 $T=\pi, \omega=2$,

又 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$, 所以 $2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=2$, 即 $\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 结合 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 可知 $k=0, \varphi=\frac{\pi}{6}$,

所以函数 $f(x)$ 的表达式为 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,

对于 A, 由于 $f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=0$, 即 $f(x)$ 的图象关于 $\left(-\frac{\pi}{12}, 0\right)$ 中心对称, 故 A 正确;

对于 B, 当 $x \in \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$ 时, $t=2x+\frac{\pi}{6} \in \left[\frac{7\pi}{2}, \frac{25\pi}{6}\right] \subseteq \left[\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right]$, 由复合函数单调性可知 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$ 上单调递增, 故 B 正确;

高级中学名校试卷

对于 C, 函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度可以得到函数

$$g(x) = 2\sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right), \text{ 故 C 错误;}$$

对于 D, 将函数 $f(x)$ 的图象所有点的横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{2}$, 得到函数 $h(x) = 2\sin(4x + \frac{\pi}{6})$ 的图象, 故 D 正确.

故选: ABD.

11. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(1-x) = -f(x+1)$, 且函数 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 若 $x_1 + x_2 > 0$, 则下列说法正确的是 ()

A. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 中心对称 B. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 轴对称

C. $f(1-x_1) + f(1-x_2) < 0$

D. $f(1-x_1) + f(1-x_2) > 0$

【答案】AC

【解析】由题意 $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$, 且满足 $f(1-x) = -f(x+1)$, 所以函数 $f(x)$ 关于点 $(1, 0)$ 中心对称, A 正确, B 错误.

又 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上递增, 故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上递增.

$$\text{由 } f(1-x) = -f(x+1) \Rightarrow f(1-x_1) = -f(x_1+1),$$

$$\text{因为 } x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow x_1 > -x_2 \Rightarrow 1+x_1 > 1-x_2, \text{ 所以 } f(1+x_1) > f(1-x_2),$$

$$\text{则 } f(1+x_1) = -f(1-x_1) > f(1-x_2), \text{ 所以 } f(1-x_1) + f(1-x_2) < 0, \text{ C 正确, D 错误.}$$

故选: AC.

第 II 卷

三、填空题

12. $(x^3+1)(x-2)^4$ 展开式中 x^3 项的系数为_____.

【答案】8

【解析】由题意可知: $(x-2)^4$ 展开式的通项公式为 $T_{r+1} = C_4^r \cdot x^{4-r} \cdot (-2)^r, r=0,1,2,3,4$,

$$\text{所以 } (x^3+1)(x-2)^4 \text{ 展开式中 } x^3 \text{ 项的系数为 } C_4^4 \times (-2)^4 + C_4^1 \times (-2) = 16 - 8 = 8.$$

13. 过直线 $2x-y+3=0$ 上一点 P 向圆 $C: x^2+y^2-4x+6y+9=0$ 引切线, 切点为 M , 则

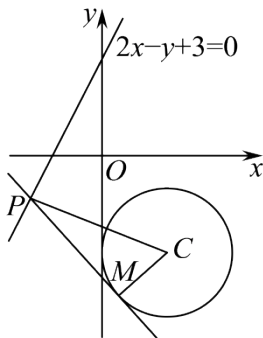
$|PM|$ 的最小值为_____.

【答案】4

【解析】由题设，圆 $C: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$ ，即 $C(2, -3)$ ，半径为 2，

而 $C(2, -3)$ 到 $2x - y + 3 = 0$ 的距离为 $\frac{|2 \times 2 + 3 + 3|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} > 2$ ，

所以直线 $2x - y + 3 = 0$ 与圆 C 相离，如下图，



由 $|PM|^2 = |CP|^2 - |CM|^2 = |CP|^2 - 4$ ，要使 $|PM|$ 的最小，只需 $|CP|$ 最小，

而 $|CP|_{\min} = 2\sqrt{5}$ ，故 $|PM|_{\min} = \sqrt{20 - 4} = 4$.

14. 在数列的每相邻两项之间插入此两项的积，形成新的数列，这样的操作称为该数列的一次“扩展”. 将数列 1, 3 进行“扩展”，第一次得到数列 1, 3, 3；第二次得到数列 1, 3, 3, 9, 3；...；第 n 次“扩展”后得到的数列为 $1, x_1, x_2, \dots, x_m, 3$. 记 $a_n = \log_3(1 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdots x_m \cdot 3)$ ，其中

$m = 2^n - 1$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的第 6 项 $a_6 =$ _____.

【答案】365

【解析】因为 $a_n = \log_3(1 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_m \cdot 3)$ ，

所以 $a_{n+1} = \log_3[1 \cdot (1 \cdot x_1) \cdot x_1 \cdot (x_1 \cdot x_2) \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_m \cdot (x_m \cdot 3) \cdot 3]$

$= \log_3 \frac{1^3 \cdot x_1^3 \cdot x_2^3 \cdot \dots \cdot x_m^3 \cdot 3^3}{3} = 3a_n - 1$ ，即 $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

故 $a_{n+1} - \frac{1}{2} = 3\left(a_n - \frac{1}{2}\right)$ ，又 $a_1 = \log_3(1 \times 3 \times 3) = 2$ ，

则数列 $\left\{a_n - \frac{1}{2}\right\}$ 是首项为 $2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ，公比为 3 的等比数列，故 $a_n - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times 3^{n-1}$ ，

所以 $a_n = \frac{3^n + 1}{2} (n \in \mathbf{N}^*)$ ，所以 $a_6 = 365$.

四、解答题

高级中学名校试卷

15. 已知函数 $f(x) = \frac{2\ln x}{x} + a(x^2 - 1)$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 求 $f(x)$ 的极值;

(2) 当 $a = 1$ 时, 求 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最小值.

解: (1) 当 $a = 0$ 时, $f(x) = \frac{2\ln x}{x}$, 定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{2 - 2\ln x}{x^2}$,

令 $f'(x) = 0$, 则 $x = e$, x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(0, e)$	e	$(e, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	单调递增	极大值 $\frac{2}{e}$	单调递减

则 $f(x)$ 的极大值为: $f(e) = \frac{2}{e}$, $f(x)$ 没有极小值;

(2) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = \frac{2\ln x}{x} + (x^2 - 1)$, 定义域为 $[1, +\infty)$,

$$f'(x) = \frac{2 - 2\ln x}{x^2} + 2x = \frac{2(1 - \ln x + x^3)}{x^2},$$

令 $g(x) = 1 - \ln x + x^3$, 定义域为 $[1, +\infty)$, $g'(x) = -\frac{1}{x} + 3x^2 = \frac{3x^3 - 1}{x} > 0$,

则 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是增函数, 则 $g(x)_{\min} = g(1) = 2$, 所以 $f'(x) > 0$,

即 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是增函数, 则 $f(x)_{\min} = f(1) = 0$.

16. 近年来, 国家鼓励德智体美劳全面发展, 舞蹈课是学生们热爱的课程之一, 某高中随机调研了本校 2023 年参加高考的 90 位考生是否喜欢跳舞的情况, 经统计, 跳舞与性别情况如下表: (单位: 人)

	喜欢跳舞	不喜欢跳舞
女性	25	35
男性	5	25

(1) 根据表中数据并依据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验, 分析喜欢跳舞与性别是否有关联?

(2) 用样本估计总体, 用本次调研中样本的频率代替概率, 从 2023 年本市考生中随机抽取 3

高级中学名校试卷

人，设被抽取的 3 人中喜欢跳舞的人数为 X ，求 X 的分布列及数学期望 $E(X)$ 。

$$\text{附: } \chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \quad n = a+b+c+d.$$

α	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005
χ_{α}	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879

解: (1) 零假设: H_0 : 喜欢跳舞与性别无关联,

$$\text{由题意, } \chi^2 = \frac{90(25 \times 25 - 35 \times 5)^2}{60 \times 30 \times 30 \times 60} = 5.625 > 3.841,$$

依据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验, 可推断 H_0 不成立, 即认为喜欢跳舞与性别有关联.

(2) 由题知, 考生喜欢跳舞的概率 $P = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$, 不喜欢跳舞的概率为 $\frac{2}{3}$

X 的可能取值为 0, 1, 2, 3

$$P(X=0) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}, \quad P(X=1) = C_3^1 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}, \quad P(X=3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

所以 X 的分布列如下:

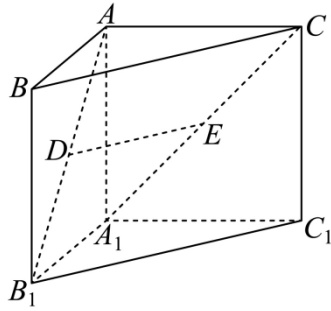
X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

由 $X \sim B\left(3, \frac{1}{3}\right)$, 数学期望 $E(X) = 3 \times \frac{1}{3} = 1$.

17. 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB \perp AC$, $AB = AC = AA_1 = 4$, 两个质点分别从

点 A 和点 C 同时出发, 均以每秒 $\sqrt{2}$ 个单位长度的速度分别向点 B_1 , A_1 作直线移动. 如图,

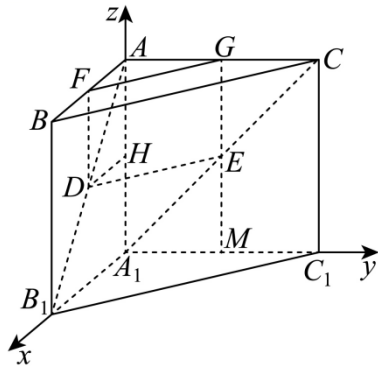
点 D, E 分别是两质点移动 $t(0 < t < 4)$ 秒后到达的位置.



(1)证明: $DE \parallel$ 平面 ABC ;

(2)当三棱锥 $C_1 - A_1DE$ 的体积最大时, 求直线 C_1D 与平面 A_1DE 所成角的正弦值.

(1)证明: 分别过 D, E 作平行于 AA_1 的直线交 AB 于 F , 交 AC 于 G , 连接 FG ,



因为 D, E 两点运动速度相同, 所以 $AD = CE$,

因为 $\angle BAB_1 = \angle ACA_1$, 所以 $DF = EG$,

又因为 $DF \parallel EG$, 所以四边形 $DFGE$ 为平行四边形,

所以 $DE \parallel FG$,

又因为 $DE \not\subset$ 平面 ABC , $FG \subset$ 平面 ABC ,

所以 $DE \parallel$ 平面 ABC ;

(2)解: 过 D 作 AA_1 的垂线, 垂足为 H , 过 E 作 A_1C_1 的垂线, 垂足为 M ,

由题意可得 $DH = t$, $EM = 4 - t$,

$$\text{所以 } V_{C_1 - A_1DE} = V_{D - A_1C_1E} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle A_1C_1E} \times DH = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times (4 - t) \times t = \frac{2}{3}(-t^2 + 4t),$$

当 $t = 2$ 时, $V_{C_1 - A_1DE}$ 最大, 此时 D, E 分别为 AB_1, A_1C 的中点,

如图建立空间直角坐标系, 则 $C_1(0, 4, 0)$, $D(2, 0, 2)$, $A_1(0, 0, 0)$, $E(0, 2, 2)$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{C_1D} = (2, -4, 2), \quad \overrightarrow{A_1D} = (2, 0, 2), \quad \overrightarrow{A_1E} = (0, 2, 2),$$

设平面 A_1DE 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{A_1D} = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{A_1E} = 0 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases},$$

令 $z=1$, 则 $\vec{m}=(-1,-1,1)$,

$$\text{所以 } |\cos \angle C_1D, \vec{m}| = \frac{|\vec{C_1D} \cdot \vec{m}|}{|\vec{C_1D}| |\vec{m}|} = \frac{|-2+4+2|}{\sqrt{24} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

所以直线 C_1D 与平面 A_1DE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

18. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 点 $C(0, -1)$ 和点 $D(-\frac{8}{5}, -\frac{3}{5})$ 在椭圆 E 上.

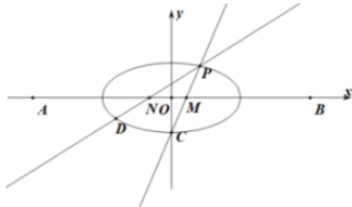
(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 设 P 是椭圆上一点 (异于 C, D), 直线 PC, PD 与 x 轴分别交于 M, N 两点. 证明: 在 x 轴上存在两点 A, B , 使得 $\vec{MB} \cdot \vec{NA}$ 是定值, 并求此定值.

$$\text{解: (1) 将点 } C, D \text{ 代入椭圆方程有 } \begin{cases} \frac{1}{b^2} = 1 \\ \frac{64}{25a^2} + \frac{9}{25b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \end{cases},$$

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$;

(2) 设 $P(x_0, y_0), A(m, 0), B(n, 0)$, 则 $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$,



$$\text{且直线 } PD: y + \frac{3}{5} = \frac{y_0 + \frac{3}{5}}{x_0 + \frac{8}{5}} \left(x + \frac{8}{5} \right), PC: y + 1 = \frac{y_0 + 1}{x_0} x,$$

$$\text{令 } y=0, \text{ 得 } x_N = \frac{\frac{3}{5}x_0 - \frac{8}{5}y_0}{\frac{3}{y_0 + \frac{5}}}, x_M = \frac{x_0}{y_0 + 1},$$

$$\text{所以 } \vec{MB} \cdot \vec{NA} = \left(n - \frac{x_0}{y_0 + 1} \right) \left(m - \frac{\frac{3}{5}x_0 - \frac{8}{5}y_0}{\frac{3}{y_0 + \frac{5}}} \right) = \frac{(ny_0 + n - x_0)(5my_0 + 8y_0 + 3m - 3x_0)}{5y_0^2 + 8y_0 + 3},$$

$$\text{令 } 5my_0 + 8y_0 + 3m = -3(ny_0 + n), \text{ 则 } \begin{cases} 5m + 8 = -3n \\ 3m = -3n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -4 \\ n = 4 \end{cases},$$

$$\begin{aligned}\text{则 } \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{NA} &= \frac{-3[(4y_0+4)^2 - x_0^2]}{5y_0^2 + 8y_0 + 3} = \frac{-3[(4y_0+4)^2 - (4-4y_0^2)]}{5y_0^2 + 8y_0 + 3} \\ &= \frac{-12(5y_0^2 + 8y_0 + 3)}{5y_0^2 + 8y_0 + 3} = -12,\end{aligned}$$

故存在 $A(-4,0)$ 和 $B(4,0)$, 使得 $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{NA}$ 是定值, 且定值为 -12 .

19. 若一个两位正整数 m 的个位数为 4, 则称 m 为“好数”.

(1) 求证: 对任意“好数” $m, m^2 - 16$ 一定为 20 的倍数;

(2) 若 $m = p^2 - q^2$, 且 p, q 为正整数, 则称数对 (p, q) 为“友好数对”, 规定: $H(m) = \frac{q}{p}$, 例

如 $24 = 5^2 - 1^2$, 称数对 $(5, 1)$ 为“友好数对”, 则 $H(24) = \frac{1}{5}$, 求小于 70 的“好数”中, 所有“友

好数对”的 $H(m)$ 的最大值.

(1) 证明: 设 $m = 10t + 4$, $1 \leq t \leq 9$ 且 t 为整数,

$$\therefore m^2 - 16 = (10t + 4)^2 - 16 = 100t^2 + 80t + 16 - 16 = 20(5t^2 + 4t)$$

$\because 1 \leq t \leq 9$, 且 t 为整数, $\therefore 5t^2 + 4t$ 是正整数,

$\therefore m^2 - 16$ 一定是 20 的倍数;

(2) 解: $\because m = p^2 - q^2$, 且 p, q 为正整数, $\therefore 10t + 4 = (p + q)(p - q)$,

当 $t = 1$ 时, $10t + 4 = 14 = 1 \times 14 = 2 \times 7$, 没有满足条件的 p, q ,

当 $t = 2$ 时, $10t + 4 = 24 = 1 \times 24 = 2 \times 12 = 3 \times 8 = 4 \times 6$,

$$\therefore \text{满足条件的有 } \begin{cases} p+q=12 \\ p-q=2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} p+q=6 \\ p-q=4 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} p=7 \\ q=5 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} p=5 \\ q=1 \end{cases}, \therefore H(m) = \frac{5}{7} \text{ 或 } \frac{1}{5},$$

当 $t = 3$ 时, $10t + 4 = 34 = 1 \times 34 = 2 \times 17$, 没有满足条件的 p, q ,

当 $t = 4$ 时, $10t + 4 = 44 = 1 \times 44 = 2 \times 22 = 4 \times 11$,

$$\therefore \text{满足条件的有 } \begin{cases} p+q=22 \\ p-q=2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} p=12 \\ q=10 \end{cases}, \therefore H(m) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6},$$

当 $t = 5$ 时, $10t + 4 = 54 = 1 \times 54 = 2 \times 27 = 3 \times 18 = 6 \times 9$, 没有满足条件的 p, q ,

当 $t = 6$ 时, $10t + 4 = 64 = 1 \times 64 = 2 \times 32 = 4 \times 16 = 8 \times 8$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/925310033331011134>