

# 河北省秦皇岛市安丰高级中学 2024 届高三上学期期末考试数学

## 试题

学校:\_\_\_\_\_姓名:\_\_\_\_\_班级:\_\_\_\_\_考号:\_\_\_\_\_

### 一、单选题

1. 已知集合  $A = \{y | y = x, x > 0\}$ ,  $B = \{x \in \mathbf{N} | 2x - 3 \leq 1\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )  
A.  $\{0, 1, 2\}$       B.  $\{1, 2\}$       C.  $\{1, 2, 3\}$       D.  $\{2, 3\}$
2. 复数  $z = \frac{2+i}{(i+1)^2} - i$  在复平面内所对应的点位于 ( )  
A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限
3. 已知圆台的轴截面为上底为 4, 下底为 8 的等腰梯形, 且圆台的母线长为 4, 则圆台的高为  
A.  $\sqrt{3}$       B. 3      C.  $2\sqrt{3}$       D. 4
4. 在数列  $\{a_n\}$  中, 已知  $a_1 = 1$ , 且  $a_{n+1} + a_n = 2n$ , 则其前 31 项和  $S_{31}$  的值为 ( )  
A. 361      B. 423      C. 481      D. 523
5. 现在流行网约车出行, 已知某人习惯在 A, B, C 三个网约车平台打车, 且根据以往经验, 在 A, B, C 三个网约车平台能顺利打到车的概率分别为  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{6}$ . 已知此人先选择 A 平台打车, 若不能顺利打到车, 则进而选择 B 平台, 最后选择 C 平台. 则此人在一次出行中, 能顺利打到车的概率为 ( )  
A.  $\frac{3}{4}$       B.  $\frac{5}{6}$       C.  $\frac{13}{18}$       D.  $\frac{7}{12}$
6. 已知函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 且  $f(x)$  单调递增, 则  $f(e^x - 1) + f((1 - e)x) < 0$  的解集为 ( )  
A.  $(-1, 1)$       B.  $(0, 1)$       C.  $(0, e)$       D.  $(1, e)$
7. 已知 A, B 是抛物线  $C: y^2 = 4x$  上关于  $x$  轴对称的两点, D 是抛物线 C 的准线与  $x$  轴的交点, 若直线 BD 与抛物线 C 的另一个交点为  $E(4, 4)$ , 则直线 AE 的方程为 ( )  
A.  $2x - y - 4 = 0$       B.  $4x - 3y - 4 = 0$   
C.  $x - 2y + 4 = 0$       D.  $4x - 5y + 4 = 0$

8. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 若对任意  $m > 0$ , 圆  $C: (x-m)^2 + (y-3m-1)^2 = 4m^2$  与直线  $l: y = kx + b (k > 0)$  恒相切, 则直线  $l$  的斜率是 ( )

- A.  $\frac{2\sqrt{6}-3}{3}$       B.  $\frac{2\sqrt{6}+3}{3}$       C.  $\frac{2\sqrt{3}-2}{3}$       D.  $\frac{2\sqrt{3}+2}{3}$

## 二、多选题

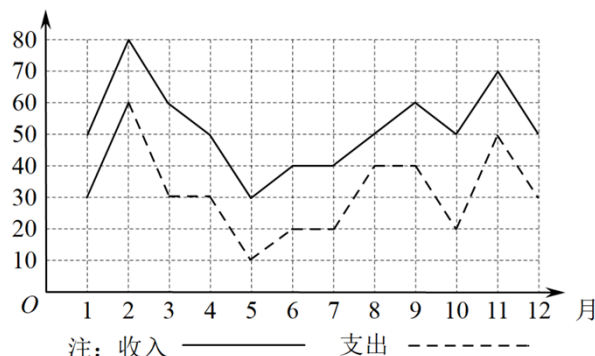
9. 已知向量  $\vec{a} = (x, 2-x)$ ,  $\vec{b} = (-1, -x)$ , 则下列说法中正确的是 ( )

- A. 若  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , 则  $x = -2$  或  $1$       B. 若  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , 则  $x = 0$  或  $-3$   
C. 若  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ , 则  $x = 1$  或  $3$       D. 若  $x = -1$ , 则向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  夹角的余弦值为  $\frac{\sqrt{5}}{5}$

10. 若  $a = 2^{0.01}$ ,  $c = \lg 3$ , 且  $a > b > c$ , 则  $b$  可能是 ( )

- A.  $2^{-0.5}$       B.  $2\lg 2$       C.  $(\sqrt{3})^{-1}$       D.  $3^{0.02}$

11. 刘女士的网店经营坚果类食品, 2019 年各月份的收入、支出 (单位: 百元) 情况的统计如图所示, 下列说法中正确的是 ( )



- A. 4 至 5 月份的收入的变化率与 11 至 12 月份的收入的变化率相同  
B. 支出最高值与支出最低值的比是 5:1  
C. 第三季度平均收入为 5000 元  
D. 利润最高的月份是 3 月份和 10 月份

12. 已知函数  $f_t(x) = \frac{\ln x}{x^t} (t \in \mathbf{R}, t \neq 0)$ , 则下列判断不正确的是 ( )

- A. 直线  $y = ex - 1$  与曲线  $y = f_t(x)$  相切  
B. 函数  $f_t(x)$  只有极大值, 无极小值  
C. 若  $t_1$  与  $t_2$  互为相反数, 则  $f_{t_1}(x)$  的极值与  $f_{t_2}(x)$  的极值互为相反数

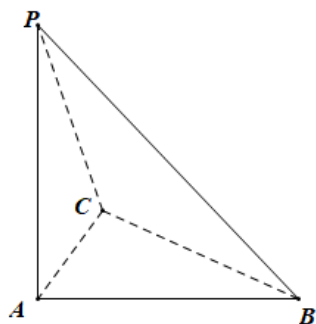
D. 若  $t_1$  与  $t_2$  互为倒数, 则  $f_{t_1}(x)$  的极值与  $f_{t_2}(x)$  的极值互为倒数

### 三、填空题

13. 在  $\left(x - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{12}$  的展开式中, 有理项的个数为\_\_\_\_\_.

14. 已知三角函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ) 的图象关于  $(\varphi, 0)$  对称, 且其相邻对称轴之间的距离为  $\frac{\pi}{2}$ , 则  $\varphi =$ \_\_\_\_\_.

15. 如图, 在三棱锥  $P-ABC$  中,  $PA \perp$  平面  $ABC$ ,  $AC \perp BC$ ,  $AB = 2$ ,  $AP = \sqrt{5}$ , 则三棱锥  $P-ABC$  的外接球的体积为\_\_\_\_\_.



16. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的离心率为  $\sqrt{3}$ , 虚轴长为  $2\sqrt{6}$ ,  $F_1, F_2$  为左, 右焦点, 则焦点  $F_2$  到渐近线的距离为\_\_\_\_\_; 设点  $B$  为  $\text{e } P: x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1 = 0$  上一点, 动点  $A$  为双曲线左支上一点, 则  $|AF_2| + |AB|$  的最小值为\_\_\_\_\_.

### 四、解答题

17. 在等差数列  $\{a_n\}$  中, 已知  $a_1 = 1$ , 公差  $d > 0$ , 其前  $n$  项和  $S_n$  满足  $4S_n = n(a_n + a_{n+1})$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 设数列  $\{a_n \cdot 2^{a_n}\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 求  $T_n$  的表达式.

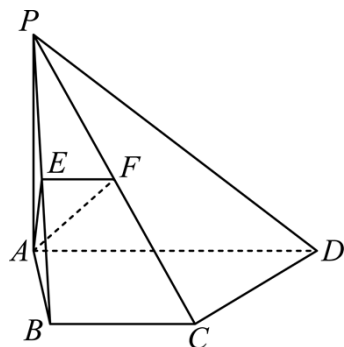
18. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 设  $\triangle ABC$  的面积为  $S$ , 且满足

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2 - c^2).$$

(1)求角  $C$  的大小;

(2)求  $\sin A \sin B$  的最大值.

19. 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  为直角梯形,  $AD \parallel BC, AB \perp AD, PA \perp$  底面  $ABCD$ , 且  $PA = \sqrt{2}AB = \sqrt{2}BC, AD = 2BC, E, F$  分别为  $PB, PC$  中点.



(1)证明:  $EF \parallel$  平面  $PAD$ ;

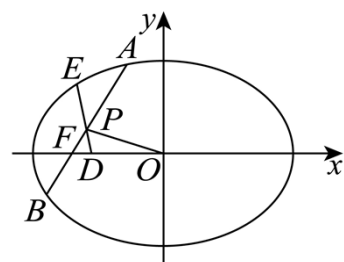
(2)求平面  $AEF$  与平面  $PBC$  所成角的正弦值.

20. 甲、乙两人玩一个掷骰子游戏, 游戏规则如下: 两人轮流掷骰子, 甲先掷, 规定甲、乙各掷一次为一个回合.  $n$  个回合之后, 先掷出点数之和为 3 的倍数的人获胜; 若同时掷出 3 的倍数, 则甲、乙平局. 如: 若甲第一次掷出 2, 乙第一次掷出 3, 则乙获胜; 若甲第一次掷出 2, 第二次掷出 4, 乙第一次掷出 1, 第二次掷出 5, 则甲乙平局. 若分出胜负或平局, 则游戏结束.

(1)试计算恰好 3 个回合之后甲乙平局的概率;

(2)若两人约定最多只玩 2 个回合, 2 个回合之后, 无论游戏结果如何, 都结束游戏. 试计算游戏回合数的数学期望.

21. 如图, 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 椭圆  $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$  的左焦点为  $F, E$  为椭圆  $C$  上的动点 (异于左顶点), 定点  $D\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$  在  $x$  轴上, 点  $P$  满足  $\overrightarrow{EP} = 2\overrightarrow{PD}$ , 直线  $FP$  与椭圆  $C$  交于  $A, B$  两点.



(1)求点  $P$  的轨迹方程;

(2)证明:  $P$  为  $AB$  中点.

22. 设函数  $f(x) = e^x + \frac{a}{x+1} - \frac{3}{4}a (x \in (-1, +\infty))$ , 其中  $e$  是自然对数的底数,  $e \approx 2.71828$  .

(1)若  $a=1$ , 求  $f(x)$  的最小值;

(2)若  $a \in (0, 4e)$ , 证明:  $f(x) > 0$  恒成立.



参考答案:

|    |     |     |   |   |   |   |   |   |    |     |
|----|-----|-----|---|---|---|---|---|---|----|-----|
| 题号 | 1   | 2   | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9  | 10  |
| 答案 | B   | D   | C | C | C | B | B | A | AC | ABC |
| 题号 | 11  | 12  |   |   |   |   |   |   |    |     |
| 答案 | ACD | ABD |   |   |   |   |   |   |    |     |

1. B

【分析】根据集合的交运算即可求解.

【详解】 $Q A = \{y | y = x, x > 0\} = \{y | y > 0\}$ ,  $B = \{x \in N | |2x - 3| \leq 1\} = \{x \in N | 1 \leq x \leq 2\} = \{1, 2\}$ ,

$\therefore A \cap B = \{1, 2\}$ ,

故选: B.

2. D

【分析】根据已知化简得出  $z = \frac{1}{2} - 2i$ , 即可根据复数的几何意义得出答案.

【详解】由  $z = \frac{2+i}{2i} - i = \frac{1}{2} - 2i$ ,

可知复数  $z$  在复平面内所对应的点为  $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ , 该点位于第四象限.

故选: D.

3. C

【分析】由题意, 作出圆台的轴截面, 在直角  $\triangle ABC$  中, 利用勾股定理, 即可求解, 得到答案.

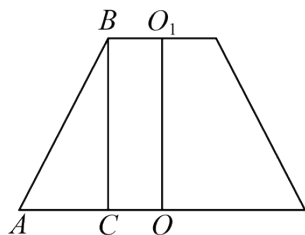
【详解】由题意, 作出圆台的轴截面, 如图所示,

因为圆台的轴截面为上底为 4, 下底为 8 的等腰梯形, 且圆台的母线长为 4,

则  $AB = 4, AO = 4, BO_1 = 2$ ,

在直角  $\triangle ABC$  中, 可得  $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ ,

即圆台的高为  $2\sqrt{3}$ , 故选 C.



【点睛】本题主要考查了圆台的轴截面的性质，其中解答中正确作出圆台的轴截面，利用等腰梯形的性质和直角三角形的勾股定理求解是解答的关键，着重考查了推理与运算能力，属于基础题.

4. C

【分析】采用并项求和的方式，自第二项起每两项作和，结合等差数列求和公式可求得结果.

【详解】 $S_{31} = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \cdots + (a_{30} + a_{31}) = 1 + 2 \times 2 + 2 \times 4 + \cdots + 2 \times 30$

$$= 1 + 2 \times (2 + 4 + \cdots + 30) = 1 + 2 \times \frac{15 \times (2 + 30)}{2} = 481.$$

故选：C.

5. C

【分析】利用概率的乘法公式、加法公式即可求解.

【详解】设能顺利打到车为事件  $M$ ，

$$P(M) = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{6} = \frac{13}{18}.$$

故选：C

6. B

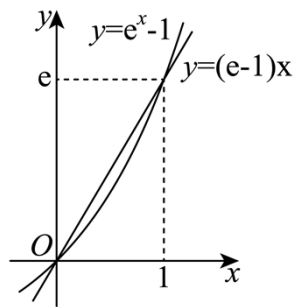
【分析】根据函数单调性和奇偶性得到  $e^x - 1 < (e-1)x$ ，画出曲线  $y = e^x - 1$  与曲线  $y = (e-1)x$  的图象，数形结合得到答案.

【详解】由奇函数可知，

$$f(e^x - 1) + f((1-e)x) < 0 \Rightarrow f(e^x - 1) < -f((1-e)x) \Rightarrow f(e^x - 1) < f((e-1)x),$$

又  $f(x)$  单调递增，则  $e^x - 1 < (e-1)x$ ，

画出曲线  $y = e^x - 1$  与曲线  $y = (e-1)x$  的图象，



可以看出  $y = e^x - 1$  与  $y = (e-1)x$  有两个交点，

且  $x=1$  与  $x=0$  分别为两交点横坐标，

所以不等式  $e^x - 1 < (e-1)x$  的解集为  $(0,1)$ .

故选：B

7. B

【分析】求出直线  $BD$  的方程与抛物线方程联立求出点  $B$  的坐标可得  $A$  点坐标，再由直线方程两点式可得答案.

【详解】因为直线  $BD$  所在的直线方程就是直线  $BE$  所在的直线方程，

而点  $D$  的坐标为  $(-1,0)$ ，

所以直线  $BD$  的方程为  $y = \frac{4}{5}(x+1)$ ，

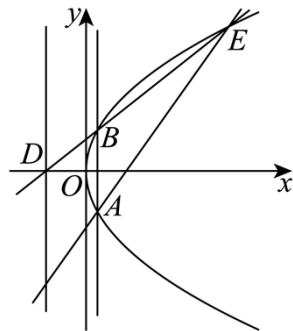
联立方程  $\begin{cases} y = \frac{4}{5}(x+1) \\ y^2 = 4x \end{cases}$ ，可得点  $B$  的坐标为  $B\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ ，

所以点  $A$  的坐标为  $A\left(\frac{1}{4}, -1\right)$ ，

所以直线  $AE$  的方程为  $\frac{y+1}{4+1} = \frac{x-\frac{1}{4}}{4-\frac{1}{4}}$ ，

即  $4x - 3y - 4 = 0$ .

故选：B.



8. A

【分析】由题意可得  $\frac{|km-3m-1+b|}{\sqrt{k^2+1}} = 2m$ ，结合  $m$  的任意性以及恒成立问题分析求解即可.

【详解】设直线  $l: y = kx + b$ ，则  $C$  到直线的距离  $d = \frac{|km-3m-1+b|}{\sqrt{k^2+1}} = 2m$ ，

若要对任意  $m$  恒成立，则  $b=1$ ，且  $(k-3)^2 = 4(k^2+1)$ ，

解得  $k = \frac{-3 \pm 2\sqrt{6}}{3}$ , 由  $k > 0$ , 有  $k = \frac{2\sqrt{6}-3}{3}$ .

故选: A

## 9. AC

【分析】根据向量平行求参判断 A 选项, 根据向量垂直求参判断 B 选项, 应用模长相等计算判断 C 选项, 根据向量坐标的模长公式先求模长再根据夹角余弦公式计算判断 D 选项.

【详解】A 选项, 若  $\vec{a} // \vec{b}$ , 有  $-(2-x) = -x^2$ , 解得  $x=1$  或  $x=-2$ , A 选项正确;

B 选项, 若  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , 有  $-x-x(2-x)=0$ , 解得  $x=0$  或  $3$ , B 选项错误,;

C 选项, 若  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ , 有  $\sqrt{x^2+(2-x)^2} = \sqrt{x^2+1}$ , 解得  $x=1$  或  $x=3$ , C 选项正确;

D 选项, 当  $x=-1$  时,  $\vec{a}=(-1,3)$ ,  $\vec{b}=(-1,1)$ ,  $|\vec{a}|=\sqrt{10}$ ,  $|\vec{b}|=\sqrt{2}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b}=4$ , 向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  夹

角的余弦值为  $\frac{4}{\sqrt{10} \times \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ , D 选项错误.

故选: AC.

## 10. ABC

【分析】对于 A: 用  $y=2^x$  为增函数, 比较利用  $\frac{1}{2}$  过渡比较  $b$ 、 $c$  大小;

对于 B: 利用  $\frac{1}{2}$  过渡比较  $a$ 、 $b$  大小; 比较  $b$ 、 $c$  大小;

对于 C: 利用 1 过渡比较  $a$ 、 $b$  大小; 用  $y=\lg x$  为增函数, 适当放缩, 比较  $b$ 、 $c$  的大小;

对于 D: 由  $3^{0.02} > 3^{0.01} > 2^{0.01}$ , 直接否定  $a > b$ .

【详解】对于 A: 当  $b=2^{-0.5}$  时,  $\because y=2^x$  为增函数,  $\therefore 2^{0.01} > 2^{-0.5}$ ,  $\therefore a > b$ ;

由  $2^{-0.5} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{1}{2}$ , 而  $\frac{1}{2} = \lg\left(10^{\frac{1}{2}}\right) > \lg\left(9^{\frac{1}{2}}\right) = \lg 3 = c$ , 所以  $b > c$ , 故 A 正确;

对于 B: 当  $b=2\lg 2$  时,  $a=2^{0.01} > 1 = \lg 10 > \lg 4 = 2\lg 2 > \lg 3$  ( $\because y=\lg x$  为增函数), 所以  $a > b > c$  成立, 故 B 正确;

对于 C: 当  $b=(\sqrt{3})^{-1}$  时,  $(\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1 < 2^{0.01}$ , 所以  $a > b$ ;

下面比较  $b$ 、 $c$  的大小:  $(\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \lg 10 > \frac{1}{\sqrt{3}} \lg 9 = \frac{2}{\sqrt{3}} \lg 3 > \lg 3$  ( $\because \sqrt{3} < 2, \therefore \frac{2}{\sqrt{3}} > 1$ ), 所

以  $b > c$ , 故 C 正确;

对于 D: 当  $b=3^{0.02}$  时,  $\because 3^{0.02} > 3^{0.01} > 2^{0.01}$ , 即  $a < b$ , 故 D 错误.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/925314131223011320>