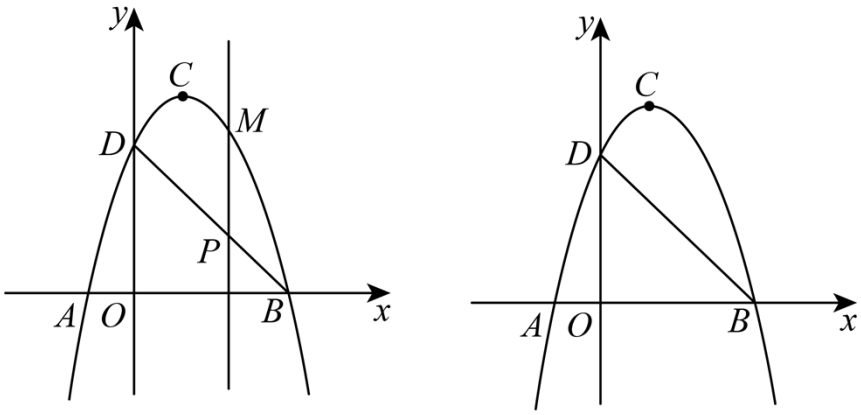
难关必刷 02 二次函数综合（线段周长、面积、角度问题专练）

【题型专练】

题型一：线段周长问题

1.（2023 春·山东淄博·九年级统考期中）如图，二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象交 x 轴于 A，B 两点，交 y 轴于点 D，点 B 的坐标为 $(3,0)$，顶点 C 的坐标为 $(1,4)$.



备用图

(1)求二次函数的解析式和直线 BD 的解析式；

(2)点 P 是直线 BD 上的一个动点，过点 P 作 x 轴的垂线，交抛物线于点 M，点 P 在第一象限时，求线段 PM 长度的最大值；

(3)在抛物线上是否存在异于 B，D 的点 Q，使 $\triangle BDQ$ 中 BD 边上的高为 $2\sqrt{2}$？若存在求出点 Q 的坐标；若不存在请说明理由.

【答案】(1) $y=-x^2+2x+3$；$y=-x+3$

(2) $\frac{9}{4}$

(3)存在，$(-1,0)$ 或 $(4,-5)$

【详解】（1）解：∵抛物线的顶点 C 的坐标为 $(1,4)$，设抛物线解析式为 $y=a(x-1)^2+4$，

∵点 $B(3,0)$ 在该抛物线的图象上，

∴ $0=a(3-1)^2+4$，解得 $a=-1$，

∵抛物线解析式为 $y=-(x-1)^2+4$，即 $y=-x^2+2x+3$，

∴点 D 在 y 轴上，令 $x=0$ 可得 $y=3$，

∴ D 点坐标为 $(0,3)$，

设直线 BD 解析式为 $y=kx+3$，

把 B 点坐标代入可得 $3k+3=0$，解得 $k=-1$，

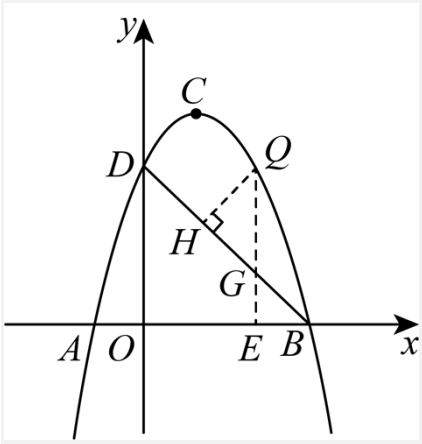
∴直线 BD 解析式为 $y=-x+3$．

（2）设 P 点横坐标为 $m(m>0)$，则 $P\left(m,-m+3\right)$，$M\left(m,-m^2+2m+3\right)$，

$\therefore PM=-m^2+2m+3-\left(-m+3\right)=-m^2+3m=-(m-\frac{3}{2})^2+\frac{9}{4}$，

∴当 $m=\frac{3}{2}$ 时，PM 有最大值 $\frac{9}{4}$．

（3）如图，过 Q 作 $QG\parallel y$ 轴交 BD 于点 G，交 x 轴于点 E，作 $QH\perp BD$ 于 H，



设 $Q\left(x,-x^2+2x+3\right)$，则 $G\left(x,-x+3\right)$，

则：$QG=\left|-x^2+2x+3-\left(-x+3\right)\right|=\left|-x^2+3x\right|$，

∵$\triangle BOD$ 是等腰直角三角形，

∴$\angle DBO=45°$，

∴$\angle HGQ=\angle BGE=45°$，

当 $\triangle BDQ$ 中 BD 边上的高为 $2\sqrt{2}$ 时，即 $QH=HG=2\sqrt{2}$，

∴$QG=\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=4$，

∴$\left|-x^2+3x\right|=4$，

当 $-x^2+3x=4$ 时，$\Delta=9-16<0$，方程无实数根，

当 $-x^2+3x=-4$ 时，解得 $x=-1$ 或 $x=4$，

∴$Q\left(-1,0\right)$ 或 $\left(4,-5\right)$，

综上可知存在满足条件的点 Q，其坐标为 $\left(-1,0\right)$ 或 $\left(4,-5\right)$．

【点睛】本题考查二次函数的综合应用．正确的求出函数解析式，利用数形结合的思想进行求解，是解题

的关键.

2.（2022 秋·湖北荆州·九年级统考期中）将抛物线 $y=\frac{1}{4}(x-1)^2+3$ 先向左平移 1 个单位长度，再向下平移 3 个单位长度得到抛物线 C，经过定点 D 的直线 $y=kx+1(k\neq 0)$ 交抛物线 C 于 A、B 两点（点 A 在点 B 的左侧），点 O 为坐标原点.

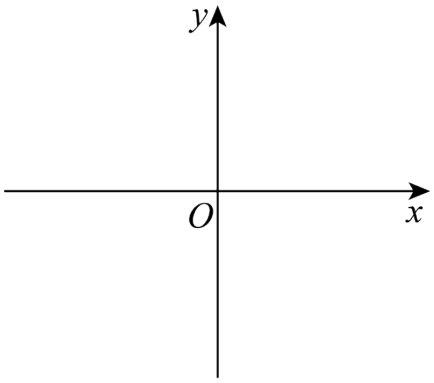


图1

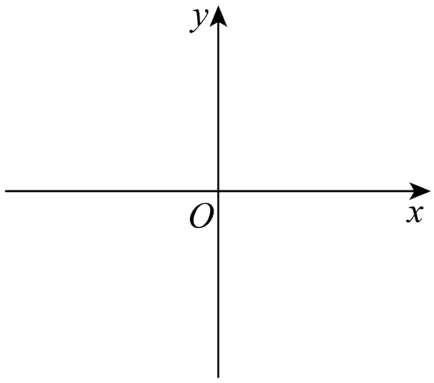


图2

(1)直接写出抛物线 C 的解析式和定点 D 的坐标；

(2)用字母 S 表示三角形的面积，若 $S_{\triangle AOD}-2S_{\triangle BOD}=1$，请补充图 1，求 k 的值；

(3)若 $k=0$，直线 $y=1$ 交抛物线 C 于 A、B 两点（点 A 在点 B 的左侧），点 P 的坐标是 $(0,-1)$，不平行 y 轴的直线 l 分别交线段 AP、BP（不含端点）于 M、N 两点，若直线 l 与抛物线只有一个公共点，求证 $PM+PN$ 的值是定值.

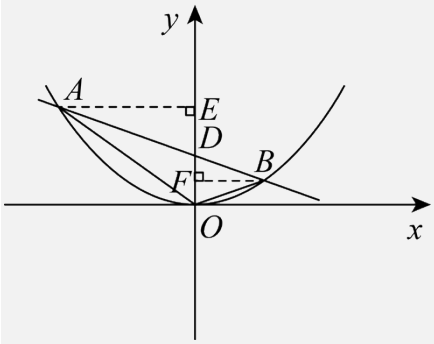
【答案】(1)$y=\frac{1}{4}x^2$，点 D 的坐标为 $(0,1)$

(2)$k=-\frac{3}{4}$

(3)见解析

【详解】（1）利用抛物线平移的规律得抛物线 C 的解析式为 $y=\frac{1}{4}x^2$，令 $x=0$ 求得 $y=1$，则 $D(0,1)$；

（2）依题意画出图形，如图，过点 A 作 $AE\perp OD$ 于点 E，过点 B 作 $BF\perp OD$ 于点 F，设 $A\left(x_A,\frac{1}{4}x_A^{\,2}\right)$，$B\left(x_B,\frac{1}{4}x_B^{\,2}\right)$，则 $x_A<x_B$，$AE=-x_A$，$BF=x_B$，



∵$S_{\triangle AOD}-2S_{\triangle BOD}=1$，

∴$\frac{(-x_A)\times OD}{2}-2\times\frac{x_B\times OD}{2}=1$，

∴$x_A+2x_B=-2$，

联立$\begin{cases}y=\frac{1}{4}x^2\\y=kx+1\end{cases}$，得$x^2-4kx-4=0$，

∴$x_A+x_B=4k$，$x_A\cdot x_B=-4$，

∴$\begin{cases}x_A+2x_B=-2\\x_A\cdot x_B=-4\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}x_A=-4\\x_B=1\end{cases}$，

又∵$x_A+x_B=4k$，

∴$-4+1=4k$，

∴$k=-\frac{3}{4}$；

（3）令$\frac{1}{4}x^2=1$，得$x_1=2$，$x_2=-2$，

∴$A(-2,1)$，$B(2,1)$，

由$P(0,-1)$，设直线PB的解析式为$y=kx-1$，

令$1=2k-1$，解得$k=1$，

∴直线PB的解析式为$y=x-1$，

同理，直线PA的解析式为$y=-x-1$，

设直线l的解析式为$y=mx+n$，

联立$\begin{cases}y=mx+n\\y=\frac{1}{4}x^2\end{cases}$，消去$y$得$x^2-4mx-4n=0$，

∵直线l与抛物线只有一个公共点，

∴$\Delta=(-4m)^2-4(-4n)=0$，得$m^2+n=0$，

联立$\begin{cases}y=x-1\\y=mx-m^2\end{cases}$，且$m\neq1$，解得$x_N=m+1$，

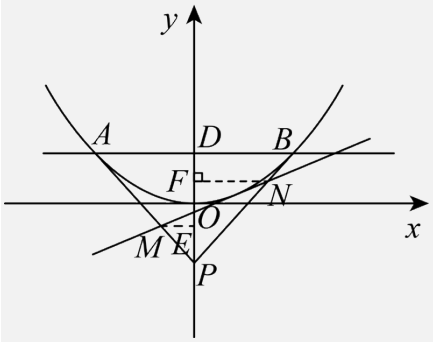
同理可得$x_M=m-1$，

∵直线PB、PA的解析式一次项系数分别为1、-1，

∴直线PB、PA与y轴的夹角为$45°$，

$\therefore PM+PN=\sqrt{2}(-m+1+m+1)=2\sqrt{2}$，

$\therefore PM+PN$ 的值是定值.



【点睛】本题主要考查了二次函数的图象与性质，一次函数的图象与性质，抛物线上的点的坐标的特征，一次函数图象上点的坐标的特征，待定系数法确定函数的解析式，抛物线的平移的性质，利用点的坐标表示出相应线段的长度是解题的关键.

3.（2023 春·吉林松原·九年级校联考期中）已知，二次函数 $y=-x^2+2ax+2a$ 的图象过点 $A(-1,m)$.

(1)填空：$m=$_____；

(2)若二次函数的图象经过 $B(3,-1)$，当 $-2\le x\le 3$ 时，求二次函数 $y=-x^2+2ax+2a$ 的最大值与最小值；

(3)过点 A 作 $AC\parallel x$ 轴，交二次函数图象于点 C，点 A 与点 C 不重合，请用含有 a 的式子表示线段 AC 的长度.

(4)已知点 $E(a-1,-1)$，点 $F(2a+3,-1)$，当二次函数的图象与线段 EF 有且仅有一个公共点时，直接写出 a 的取值范围.

【答案】(1)-1

(2)函数的最大值为 3，最小值为 -6；

(3)当 $a>-1$ 时，$AC=2a+2$；当 $a<-1$ 时，$AC=-2-2a$.

(4)$a\ge 0$ 或 $a=-1$ 或 $a=-2$

【详解】（1）解：将点 $A(-1,m)$ 代入此二次函数，得 $m=-(-1)^2-2a+2a=-1$；

故答案为：-1；

（2）解：将点 $B(3,-1)$ 代入此二次函数，

$\therefore -1=-3^2+2a\cdot 3+2a$，

解得 $a=1$，

$\therefore y=-x^2+2x+2=-(x-1)^2+3$，

∴当$x=1$时，函数的最大值为3；

当$x=-2$时，$y=-(-2)^2+2\times(-2)+2=-6$；

当$x=3$时，$y=-3^2+2\times3+2=-1$；

∴函数的最大值为3，最小值为-6；

（3）解：由题知，该二次函数图象的对称轴为直线$x=a$，

当$a>-1$时，$AC=2(a+1)=2a+2$；

当$a<-1$时，$AC=2(-1-a)=-2-2a$；

（4）解：由（3）可知，当$y=-1$时，二次函数上的点$(-1,-1)$和$(2a+1,-1)$，$E(a-1,-1)$，

$F(2a+3,-1)$，

当二次函数图象与线段EF有且只有一个公共点时，需要分以下四种情况：

①当点A和点C重合时，$2a+1=-1$，解得$a=-1$，

②当$2a+1<2a+3\le-1\le a-1$时，方程无解；

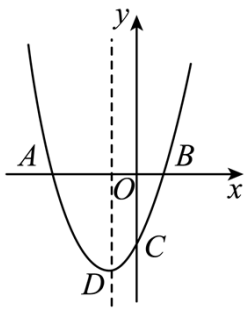
③当$a-1\le2a+1<2a+3\le-1$时，可得$a=-2$，

④当$-1\le a-1\le2a+1<2a+3$时，得$a\ge0$，

综上可得，若二次函数图象与线段EF有且只有一个公共点时，a的取值范围为：$a\ge0$或$a=-1$或$a=-2$.

【点睛】本题属于二次函数的综合性质，涉及待定系数法求函数解析式，二次函数的性质等知识，包括分类讨论思想等相关知识，（4）中注意进行正确的分类讨论.

4.（2022秋·河南洛阳·九年级河南省洛阳市第二十三中学校考期中）如图，已知二次函数$y=x^2+bx+c$的图象与x轴交于A、B两点，其中点A的坐标为$(-3,0)$，与y轴交于点C，点$D(-2,-3)$在抛物线上；



(1)求抛物线的解析式；

(2)抛物线的对称轴上是否存在点P，使得$\triangle PAD$周长最小，若存在，求出P点的坐标及$\triangle PAD$周长的最小值；

(3)若点 M 是直线 AC 下方的抛物线上的一动点，过 M 作 y 轴的平行线与线段 AC 交于点 N，求线段 MN 的最大值.

【答案】(1) $y=x^2+2x-3$

(2) $P(-1,-2)$，$\sqrt{10}+3\sqrt{2}$

(3) $\frac{9}{4}$

【详解】（1）解：将点 $A(-3,0)$、$D(-2,-3)$ 代入抛物线表达式得：$\begin{cases}0=9-3b+c\\-3=4-2b+c\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}b=2\\c=-3\end{cases}$，

抛物线的表达式为：$y=x^2+2x-3$；

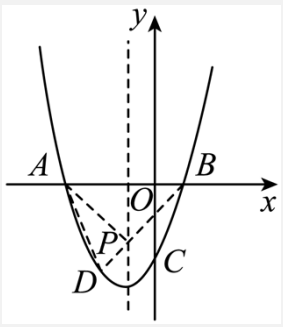
（2）$y=x^2+2x-3$，令 $y=0$，则 $0=x^2+2x-3$，

解得 $x=-3$ 或 $x=1$，

令 $x=0$，则 $y=-3$，

故点 B、C 的坐标分别为：$(1,0)$、$(0,-3)$；

函数的对称轴为直线 $x=\frac{1-3}{2}=-1$，



点 A 关于函数对称轴的对称点为点 B，连接 BD 交函数对称轴于点 P，则点 P 为所求点，

设直线 BD 的表达式为 $y=kx+m$，

将点 D、B 的坐标代入一次函数表达式 $y=kx+m$ 得：

$\begin{cases}0=k+m\\-2k+m=-3\end{cases}$，

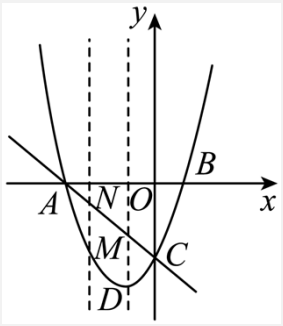
解得：$\begin{cases}k=1\\m=-1\end{cases}$，

故 BD 的函数表达式为 $y=x-1$，

当$x=-1$时，$y=-1-1=-2$，即点$P(-1,-2)$，

此时$\triangle PAD$周长的最小值$=PA+PD+AD=BD+AD=\sqrt{1+9}+\sqrt{9+9}=\sqrt{10}+3\sqrt{2}$；

（3）如图，



设直线AC的解析式是$y=nx+p$，

把点$A(-3,0)$，$C(0,-3)$代入$y=nx+p$中

$\begin{cases}0=-3n+p\\-3=p\end{cases}$，

解得$\begin{cases}n=-1\\p=-3\end{cases}$，

∴直线AC解析式为$y=-x-3$.

设N横坐标为x，则$y_N=-x-3$，$y_M=x^2+2x-3$，

$\therefore MN=-x-3-\left(x^2+2x-3\right)=-x^2-3x=-(x+\frac{3}{2})^2+\frac{9}{4}$，

$\because -1<0$，

∴抛物线开口向下，

∴当$x=-\frac{3}{2}$时，MN的最大值为$\frac{9}{4}$.

【点睛】本题考查了二次函数综合运用，涉及到抛物线和直线的待定系数法求解析式，轴对称-最短问题，二次函数的最值等，解题关键是熟练掌握待定系数法求抛物线解析式.

题型二：面积问题

1.（2023 春·江苏无锡·九年级统考期中）如图，二次函数$y=x^2+bx+c$的图像与x轴交于A、$B(4,0)$两点（A在B的左侧），与y轴交于点$C(0,-4)$，点P在抛物线上，连接BC，BP.

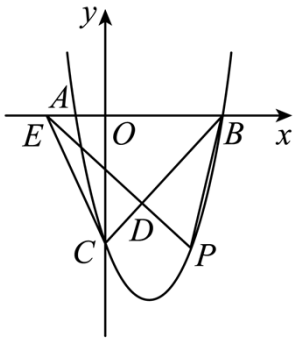


图1

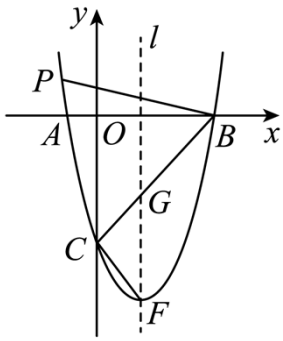


图2

(1)求抛物线的解析式；

(2)如图 1，若点 P 在第四象限，点 D 在线段 BC 上，连接 PD 并延长交 x 轴于点 E，连接 CE，记 $\triangle DCE$ 的面积为 S_1，$\triangle DBP$ 的面积为 S_2，当 $S_1=S_2$ 时，求点 P 的坐标；

(3)如图 2，将线段 BC 绕点 B 顺时针旋转 $60°$，得到线段 BP，点 P 是否落在二次函数图像上？通过计算说明理由.

【答案】(1) $y=x^2-3x-4$

(2) $P(3,-4)$

(3)不在，理由见解析

【详解】（1）解：将 $B(4,0)$、$C(0,-4)$ 两点代入 $y=x^2+bx+c$ 得，

$$\begin{cases}16+4b+c=0\\0+0+c=-4\end{cases},$$

解得：$\begin{cases}b=-3\\c=-4\end{cases}$，

∴抛物线的解析式为：$y=x^2-3x-4$；

（2）由 $y=x^2-3x-4$，令 $y=0$

即 $x^2-3x-4=0$

解得：$x_1=-1,x_2=4$，

∴ $A(-1,0)$，

∵ $C(0,-4)$，则 $OC=4$，

设点 $P(m,m^2-3m-4)$，

则 $S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}OC\cdot BE=2BE$，　$S_{\triangle BPE}=\frac{1}{2}(m^2-3m-4)BE$，

$\because S_{\triangle BCE}=S_1+S_{\triangle BDE}$，$S_{\triangle BPE}=S_2+S_{\triangle BDE}$，$S_1=S_2$，

$\therefore S_{\triangle BCE}=S_{\triangle BPE}$，

$\therefore m^2-3m-4=-4$，

解得：$m_1=3$，$m_2=0$（舍去），

$\therefore P(3,-4)$；

（3）$\because$ 线段 BC 绕点 B 顺时针旋转 $60°$，得到线段 BP，P 在第二象限，

$\therefore\triangle BCP$ 是等边三角形，

$\because B(4,0)$、$C(0,-4)$，

$\therefore BP=CP=BC=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

设 P 点坐标为 (a,b)，

$$\begin{cases}(a-4)^2+b^2=\left(4\sqrt{2}\right)^2\\ a^2+(b+4)^2=\left(4\sqrt{2}\right)^2\end{cases}$$

解得：$\begin{cases}a=-2\sqrt{3}+2\\ b=2\sqrt{3}-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=2\sqrt{3}+2\\ b=-2\sqrt{3}-2\end{cases}$（舍去）

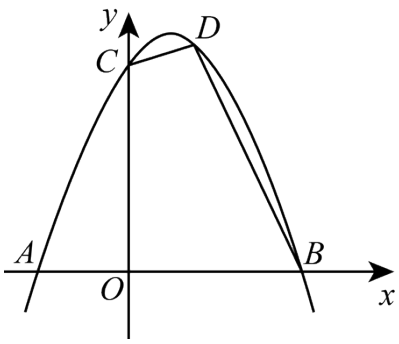
$\therefore P$ 点坐标为 $\left(-2\sqrt{3}+2,2\sqrt{3}-2\right)$

当 $x=-2\sqrt{3}+2$ 时，$y=x^2-3x-4=\left(-2\sqrt{3}+2\right)^2-3\left(-2\sqrt{3}+2\right)-4=6-2\sqrt{3}\neq 2\sqrt{3}-2$

$\therefore$ 点 P 不落在二次函数图象上.

【点睛】本题主要考查二次函数的综合应用，一次函数的应用，三角形的相似，勾股定理，掌握相关知识正确构造辅助线是解题的关键.

2.（2022 秋·甘肃陇南·九年级校考期中）如图，抛物线 $y=ax^2+bx+6$ 经过点 $A(-2,0)$，$B(4,0)$，与 y 轴交于点 C，点 D 是抛物线上的一个动点，设点 D 的横坐标为 $m(1<m<4)$，连接 AC、BD、DC.



(1)求该抛物线的函数解析式；

(2)当 $CD \parallel AB$ 时，求点 D 坐标；

(3)连接 BC，求 $\triangle BCD$ 面积的最大值及此时点 D 的坐标.

【答案】(1) $y=-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+6$

(2) $(2,6)$

(3)面积的最大值为 6，$(2,6)$

【详解】（1）设抛物线的表达式为 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$

$=a(x+2)(x-4)$

$=a(x^2-2x-8)$

$=ax^2-2ax-8a$，

故 $-8a=6$，解得 $a=-\frac{3}{4}$，

故抛物线的表达式为 $y=-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+6$；

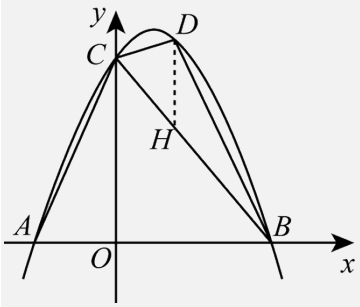
（2）当 $CD \parallel AB$ 时，点 C、D 关于抛物线的对称轴对称，

抛物线的对称轴为 $x=\frac{1}{2}\times(4-2)=1$，

由抛物线的表达式知，点 $C(0,6)$，

故点 D 的坐标为 $(2,6)$；

（3）如图，连接 BC，过点 D 作 y 轴的平行线交 BC 于点 H，



设直线 BC 的表达式为 $y=kx+b$，点 $C(0,6)$，点 $B(4,0)$，

则 $\begin{cases}b=6\\0=4k+b\end{cases}$，解得 $\begin{cases}k=-\dfrac{3}{2}\\b=6\end{cases}$，

故直线 BC 的表达式为 $y=-\dfrac{3}{2}x+6$，

设点 $D\left(x,-\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{3}{2}x+6\right)$，则点 $H\left(x,-\dfrac{3}{2}x+6\right)$，

则设 $\triangle BCD$ 面积为 S，

则 $S=S_{\triangle HDC}+S_{\triangle DHB}$

$=\dfrac{1}{2}\times HD\times OB$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{3}{2}x+6+\dfrac{3}{2}x-6\right)\times 4$

$=-\dfrac{3}{2}x^2+6x$，

$\because -\dfrac{3}{2}<0$，放 S 有最大值，

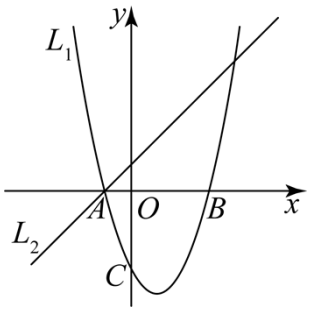
当 $x=2$ 时，S 的最大值为 6，

当 $x=2$ 时，$y=-\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{3}{2}x+6=6$，

故点 D 的坐标为 $(2,6)$.

【点睛】主要考查了二次函数的解析式的求法和与几何图形结合的综合能力的培养．要会利用数形结合的思想把代数和几何图形结合起来，利用点的坐标的意义表示线段的长度，从而求出线段之间的关系．

3．（2022 春·江西九江·九年级校考期中）如图，已知二次函数 L_1：$y=x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 A、B 两点，A 点坐标 $(-1,0)$，B 点坐标 $(3,0)$，与 y 轴交于点 C，直线 L_2：$y=x+n$ 经过点 A.



(1)求二次函数L_1的表达式及顶点P的坐标；

(2)二次函数L_3与二次函数L_1关于X轴对称，直线L_2与二次函数L_3相交于A、D两点.

①直接写出二次函数L_3的表达式；

②求出D点的坐标；

③在直线L_2上半部分的二次函数L_3上，是否存在一点M，使得$\triangle AMD$的面积最大？若存在，请求出M坐标，并求出最大面积.

【答案】(1) $y=x^2-2x-3$ $(1,-4)$

(2)① $y=-x^2+2x+3$ ② $(2,3)$ ③存在 $\left(\frac{1}{2},\frac{15}{4}\right)$ $\frac{27}{8}$

【详解】（1）将点$A(-1,0)$与点$B(3,0)$的坐标代入二次函数L_1：$y=x^2+bx+c$中得：

$\begin{cases}0=1-b+c\\0=9+3b+c\end{cases}$，解得：$\begin{cases}b=-2\\c=-3\end{cases}$

∴二次函数L_1的表达式为：$y=x^2-2x-3$.

即$y=(x-1)^2-4$

∴二次函数L_1的顶点$P(1,-4)$.

（2）①在二次函数L_1上取点(x,y)，其关于x轴的对称点为$(x,-y)$，把点$(x,-y)$代入二次函数L_1的解析式得：$-y=x^2-2x-3$

∴二次函数L_3的表达式为：$y=-x^2+2x+3$.

②∵直线$L_2:y=x+n$经过点$A(-1,0)$，

∴$0=-1+n$，

∴$n=1$.

∴直线L_2的表达式为：$y=x+1$.

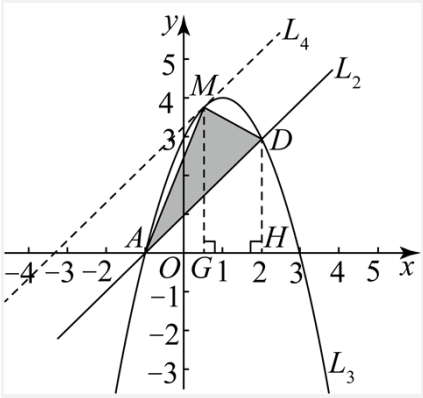
∵直线L_2与二次函数L_3相交于$A(-1,0)$、D两点，

∴联立直线L_2与二次函数L_3的表达式，得$\begin{cases}y=-x^2+2x+3\\y=x+1\end{cases}$

解得：$\begin{cases}x_1=-1\\y_1=0\end{cases}$，$\begin{cases}x_2=2\\y_2=3\end{cases}$

∴D点的坐标为$(2,3)$.

③如下图所示，当直线L_4与L_2平行，且直线L_4与二次函数L_3相切于点M时，$\triangle AMD$的面积最大.



设直线L_4的表达式为：$y=x+t$.

∴$\begin{cases}y=x+t\\y=-x^2+2x+3\end{cases}$

消去y，得$x^2-x+(t-3)=0$

∵L_4与L_3相切于点M，

$\Delta=(-1)^2-4(t-3)=0$.

解得：$t=\dfrac{13}{4}$

故直线L_4的表达式为：$y=x+\dfrac{13}{4}$

解方程组$\begin{cases}y=x+\dfrac{13}{4}\\y=-x^2+2x+3\end{cases}$得：$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\y=\dfrac{15}{4}\end{cases}$

∴点M的坐标为$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{15}{4}\right)$.

自点M、D分别作x轴的垂线，垂足为点G、H.

则$S_{\triangle AMD}=S_{\triangle AMG}+S_{梯形DMGH}-S_{\triangle ADH}$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/925331311242011244