

2023-2024 学年广西柳州市第一中学高考压轴卷：数学试题试卷

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 $z = a^2i - 2a - i$ 是正实数，则实数 a 的值为()

- A. 0 B. 1 C. -1 D. ± 1

2. 若 $z = 1 - i + \frac{2}{i}$ ，则 z 的虚部是

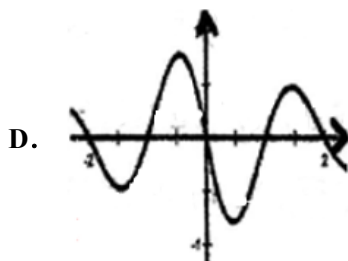
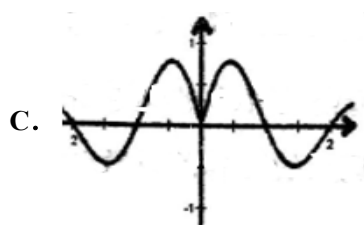
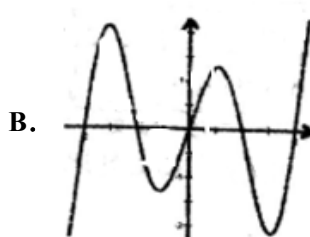
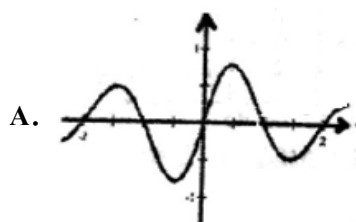
- A. 3 B. -3 C. $3i$ D. $-3i$

3. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ ，其导函数为 $f'(x)$ ，当 $x \geq 0$ 时，恒有 $\frac{x}{3}f'(x) + f(x) > 0$ 。则不等式

$x^3f(x) - (1+2x)^3f(1+2x) < 0$ 的解集为 ()。

- A. $\{x | -3 < x < -1\}$ B. $\{x | -1 < x < -\frac{1}{3}\}$
 C. $\{x | x < -3 \text{ 或 } x > -1\}$ D. $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > -\frac{1}{3}\}$

4. 函数 $\square(\square) = \sin(\square\square)\square^{-\frac{1}{2}}$ 的图象可能是下列哪一个？ ()



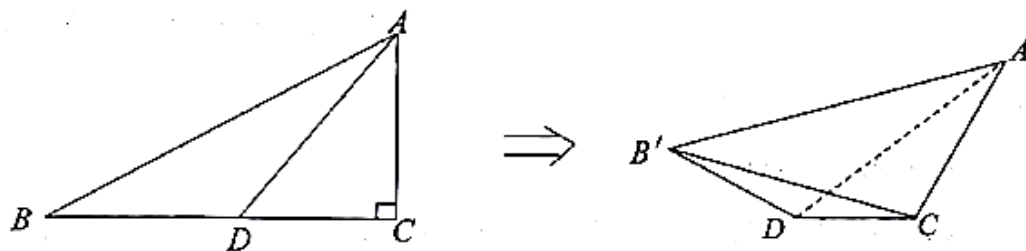
5. 已知 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边， $a \cos C + \sqrt{3}c \sin A = b + c$ ，则 $A =$ ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

6. 已知圆 $C_1: (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$, 圆 $C_2: (x-4)^2 + (y-5)^2 = 9$, 点 M 、 N 分别是圆 C_1 、圆 C_2 上的动点, P 为 x 轴上的动点, 则 $|PN| - |PM|$ 的最大值是 ()

- A. $2\sqrt{5} + 4$ B. 9 C. 7 D. $2\sqrt{5} + 2$

7. 如图, $\triangle ABC$ 中 $\angle A = 2\angle B = 60^\circ$, 点 D 在 BC 上, $\angle BAD = 30^\circ$, 将 $\triangle ABD$ 沿 AD 旋转得到三棱锥 $B' - ADC$, 分别记 $B'A$, $B'D$ 与平面 ADC 所成角为 α , β , 则 α , β 的大小关系是 ()



- A. $\alpha < \beta \leq 2\alpha$ B. $2\alpha \leq \beta \leq 3\alpha$
C. $\beta \leq 2\alpha$, $2\alpha < \beta \leq 3\alpha$ 两种情况都存在 D. 存在某一位置使得 $\beta > 3\alpha$

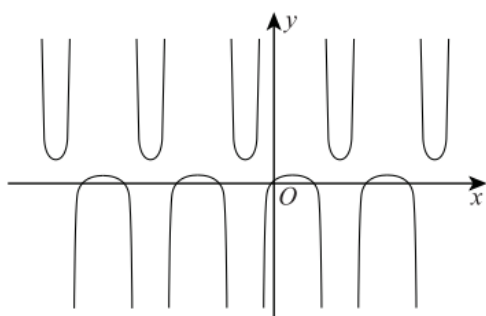
8. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y + 4 \geq 0, \\ x - 2 \leq 0, \\ x + y - 2 \geq 0, \end{cases}$ 且 $z = ax + y$ 的最大值为 $2a + 6$, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $[-1, +\infty)$ B. $(-\infty, -1]$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1)$

9. 2019 年 10 月 17 日是我国第 6 个“扶贫日”, 某医院开展扶贫日“送医下乡”医疗义诊活动, 现有五名医生被分配到四所不同的乡镇医院中, 医生甲被指定分配到医院 A, 医生乙只能分配到医院 A 或医院 B, 医生丙不能分配到医生甲、乙所在的医院, 其他两名医生分配到哪所医院都可以, 若每所医院至少分配一名医生, 则不同的分配方案共有 ()

- A. 18 种 B. 20 种 C. 22 种 D. 24 种

10. 已知函数 $f(x) = \frac{\sin x}{1 + 2\sin x}$ 的部分图象如图所示, 将此图象分别作以下变换, 那么变换后的图象可以与原图象重合的变换方式有 ()



- ①绕着 x 轴上一点旋转 180° ;
 ②沿 x 轴正方向平移;
 ③以 x 轴为轴作轴对称;
 ④以 x 轴的某一条垂线为轴作轴对称.

A. ①③ B. ③④ C. ②③ D. ②④

11. 已知函数 $f(x) = xe^{1-x}$, 若对于任意的 $x_0 \in (0, e]$, 函数 $g(x) = \ln x - x^2 + ax - f(x_0) + 1$ 在 $(0, e]$ 内都有两个不同的零点, 则实数 a 的取值范围为 ()

A. $(1, e]$ B. $(e - \frac{2}{e}, e]$ C. $(e - \frac{2}{e}, e + \frac{2}{e}]$ D. $(1, e - \frac{2}{e}]$

12. 已知函数 $f(x) = x + e^{x-a}$, $g(x) = \ln(x+2) - 4e^{a-x}$, 其中 e 为自然对数的底数, 若存在实数 x_0 , 使 $f(x_0) - g(x_0) = 3$ 成立, 则实数 a 的值为 ()

A. $-\ln 2 - 1$ B. $-1 + \ln 2$ C. $-\ln 2$ D. $\ln 2$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 $C: xy = \sqrt{3}$ 上任意一点 P 到直线 $l: x + \sqrt{3}y = 0$ 的距离的最小值为_____.

14. 已知二面角 $\alpha - l - \beta$ 为 60° , 在其内部取点 A , 在半平面 α, β 内分别取点 B, C . 若点 A 到棱 l 的距离为 1, 则 $\triangle ABC$ 的周长的最小值为_____.

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2 - 2^x, & x \geq 0, \\ 2^{-x}, & x < 0, \end{cases}$, 则 $f(\lg \frac{1}{5}) + f(\lg \frac{1}{2}) + f(\lg 2) + f(\lg 5)$ 的值为 _____

16. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1 + \log_2(2-x), & x < 1 \\ 2^{x-1}, & x \geq 1 \end{cases}$, 则 $f(-2) + f(\log_2 3) =$ _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 随着现代社会的发展, 我国对于环境保护越来越重视, 企业的环保意识也越来越强. 现某大型企业为此建立了 5 套环境监测系统, 并制定如下方案: 每年企业的环境监测费用预算定为 1200 万元, 日常全天候开启 3 套环境监测系统, 若至少有 2 套系统监测出排放超标, 则立即检查污染源处理系统; 若有且只有 1 套系统监测出排放超标, 则立即同时启动另外 2 套系统进行 1 小时的监测, 且后启动的这 2 套监测系统中只要有 1 套系统监测出排放超标, 也立即检查污染源处理系统. 设每个时间段 (以 1 小时为计量单位) 被每套系统监测出排放超标的概率均为 p ($0 < p < 1$), 且各个时间段每套系统监测出排放超标情况相互独立.

(1) 当 $p = \frac{1}{2}$ 时, 求某个时间段需要检查污染源处理系统的概率;

(2) 若每套环境监测系统运行成本为 300 元/小时 (不启动则不产生运行费用), 除运行费用外, 所有的环境监测系统每年的维修和保养费用需要 100 万元. 现以此方案实施, 问该企业的环境监测费用是否会超过预算 (全年按 9000 小时计算)? 并说明理由.

18. (12 分) 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, 满足 $a_1 = 3$, $a_4 = 12$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 4$, $b_4 = 20$, 且 $\{b_n - a_n\}$ 是等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

19. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 \cos \alpha \\ y = 2 + 2 \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数, 以坐标原点 O 为极点, x 轴

的正半轴为极轴, 取相同长度单位建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 4 \cos \theta$.

(1) 求曲线 C_1 的极坐标方程和曲线 C_2 的普通方程;

(2) 设射线 $OP: \theta = \frac{\pi}{6}$ 与曲线 C_1 交于不同于极点的点 A , 与曲线 C_2 交于不同于极点的点 B , 求线段 AB 的长.

20. (12 分) 已知 a, b 都是大于零的实数.

(1) 证明 $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$;

(2) 若 $a > b$, 证明 $a^2 + \frac{a}{b^3} + \frac{1}{a(a-b)} > 4$.

21. (12 分) 已知点 $P(1, 2)$ 到抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 准线的距离为 1.

(I) 求 C 的方程及焦点 F 的坐标;

(II) 设点 P 关于原点 O 的对称点为点 Q , 过点 Q 作不经过点 O 的直线与 C 交于两点 A, B , 直线 PA, PB , 分别交 x 轴于 M, N 两点, 求 $|MF| \cdot |NF|$ 的值.

22. (10 分) 设抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 过点 $(m, 2\sqrt{m})$ ($m > 0$).

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) F 是抛物线 C 的焦点, 过焦点的直线与抛物线交于 A, B 两点, 若 $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{FA}$, 求 $|AB|$ 的值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

将复数化成标准形式，由题意可得实部大于零，虚部等于零，即可得到答案.

【详解】

因为 $z = a^2i - 2a - i = -2a + (a^2 - 1)i$ 为正实数，

所以 $-2a > 0$ 且 $a^2 - 1 = 0$ ，解得 $a = -1$.

故选：C

【点睛】

本题考查复数的基本定义，属基础题.

2、B

【解析】

因为 $z = 1 - i - 2i = 1 - 3i$ ，所以 z 的虚部是 -3 . 故选 B.

3、D

【解析】

先通过 $\frac{x}{3}f'(x) + f(x) > 0$ 得到原函数 $g(x) = \frac{x^3f(x)}{3}$ 为增函数且为偶函数，再利用到 y 轴距离求解不等式即可.

【详解】

构造函数 $g(x) = \frac{x^3f(x)}{3}$,

则 $g'(x) = x^2f(x) + \frac{x^3}{3}f'(x) = x^2\left(\frac{x}{3}f'(x) + f(x)\right)$

由题可知 $\frac{x}{3}f'(x) + f(x) > 0$ ，所以 $g(x) = \frac{x^3f(x)}{3}$ 在 $x \geq 0$ 时为增函数；

由 x^3 为奇函数， $f(x)$ 为奇函数，所以 $g(x) = \frac{x^3 f(x)}{3}$ 为偶函数；

又 $x^3 f(x) - (1+2x)^3 f(1+2x) < 0$ ，即 $x^3 f(x) < (1+2x)^3 f(1+2x)$

即 $g(x) < g(1+2x)$

又 $g(x)$ 为开口向上的偶函数

所以 $|x| < |1+2x|$ ，解得 $x < -1$ 或 $x > -\frac{1}{3}$

故选：D

【点睛】

此题考查根据导函数构造原函数，偶函数解不等式等知识点，属于较难题目.

4、A

【解析】

由 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{-\frac{1}{2}} > 0$ 排除选项 B； $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2^{-\frac{1}{2}} < 0$ 排除选项 C；由函数 $f(x)$ 有无数个零点，排除选项 D，从而可得结果.

【详解】

由 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{-\frac{1}{2}} > 0$ ，可排除选项 B， $f(-1) = -2^{-\frac{1}{2}} < 0$ 可排除选项 C；由 $f(x) = 0$ 可得 $2^x = x \Rightarrow x = 0, x \in \mathbb{R}$ ，

即函数 $f(x)$ 有无数个零点，可排除选项 D，故选 A.

【点睛】

本题通过对多个图象的选择考查函数的图象与性质，属于中档题.这类题型也是近年高考常见的命题方向，该题型的特点是综合性较强、考查知识点较多，但是并不是无路可循.解答这类题型可以从多方面入手，根据函数的定义域、值域、单调性、奇偶性、特殊点以及 $x \rightarrow 0^+$, $x \rightarrow 0^-$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ 时函数图象的变化趋势，利用排除法，将不合题意的选项一一排除.

5、C

【解析】

原式由正弦定理化简得 $\sqrt{3} \sin C \sin A = \cos A \sin C + \sin C$ ，由于 $\sin C \neq 0$ ， $0 < A < \pi$ 可求 A 的值.

【详解】

解：由 $a \cos C + \sqrt{3}c \sin A = b + c$ 及正弦定理得 $\sin A \cos C + \sqrt{3} \sin C \sin A = \sin B + \sin C$.

因为 $B = \pi - A - C$ ，所以 $\sin B = \sin A \cos C + \cos A \sin C$ 代入上式化简得 $\sqrt{3} \sin C \sin A = \cos A \sin C + \sin C$.

由于 $\sin C \neq 0$ ，所以 $\sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

又 $0 < A < \pi$ ，故 $A = \frac{\pi}{3}$.

故选：C.

【点睛】

本题主要考查正弦定理解三角形，三角函数恒等变换等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力，属于中档题.

6、B

【解析】

试题分析：圆 $C_1: (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$ 的圆心 $E(1, -1)$ ，半径为1，圆 $C_2: (x-4)^2 + (y-5)^2 = 9$ 的圆心 $F(4, 5)$ ，半径是3. 要使 $|PN| - |PM|$ 最大，需 $|PN|$ 最大，且 $|PM|$ 最小， $|PN|$ 最大值为 $|PF| + 3$ ， $|PM|$ 的最小值为 $|PE| - 1$ ，故

$|PN| - |PM|$ 最大值是 $(|PF| + 3) - (|PE| - 1) = |PF| - |PE| + 4$ ； $F(4, 5)$ 关于 x 轴的对称点 $F'(4, -5)$ ，

$|PF| - |PE| = |PF'| - |PE| \leq |EF'| = \sqrt{(4-1)^2 + (-5+1)^2} = 5$ ，故 $|PF| - |PE| + 4$ 的最大值为 $5 + 4 = 9$ ，故选 B.

考点：圆与圆的位置关系及其判定.

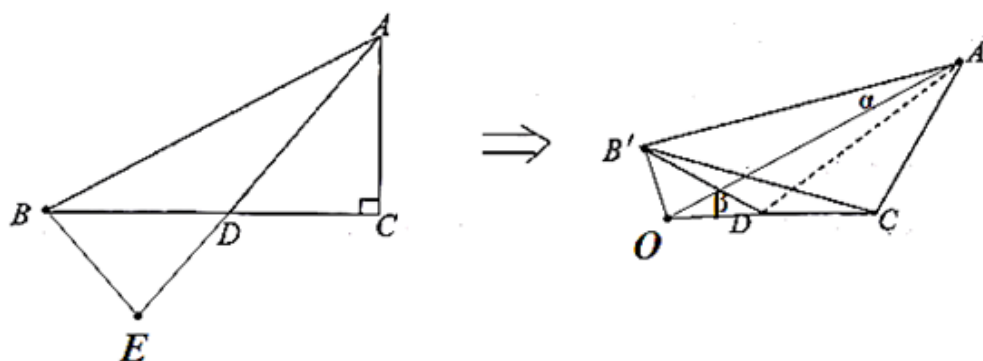
【思路点睛】先根据两圆的方程求出圆心和半径，要使 $|PN| - |PM|$ 最大，需 $|PN|$ 最大，且 $|PM|$ 最小， $|PN|$ 最大值为 $|PF| + 3$ ， $|PM|$ 的最小值为 $|PE| - 1$ ，故 $|PN| - |PM|$ 最大值是 $(|PF| + 3) - (|PE| - 1) = |PF| - |PE| + 4$ ，再利用对称性，求出所求式子的最大值.

7、A

【解析】

根据题意作出垂线段，表示出所求得 α 、 β 角，分别表示出其正弦值进行比较大小，从而判断出角的大小，即可得答案.

【详解】



由题可得过点 B 作 $BE \perp AD$ 交 AD 于点 E ，过 B' 作 CD 的垂线，垂足为 O ，则易得 $\alpha = \angle B'AO$ ， $\beta = \angle B'DO$.

设 $CD = 1$ ，则有 $BD = AD = 2$ ， $DE = 1$ ， $BE = \sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 可得 $AB' = AB = 2\sqrt{3}$ ， $B'D = BD = 2$.

$$\text{Q } \sin \alpha = \frac{OB'}{AB'}, \sin \beta = \frac{OB'}{DB'},$$

$$\therefore \sin \beta = \sqrt{3} \sin \alpha > \sin \alpha, \therefore \beta > \alpha;$$

$$\text{Q } OB' \in [0, \sqrt{3}], \therefore \sin \alpha \in [0, \frac{1}{2}];$$

$$\text{Q } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha},$$

$$2\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \in [\sqrt{3}, 2], \therefore \sin 2\alpha \dots \sqrt{3} \sin \alpha = \sin \beta,$$

$$\therefore 2\alpha \dots \beta.$$

综上可得, $\alpha < \beta, 2\alpha$.

故选: A.

【点睛】

本题考查空间直线与平面所成的角的大小关系, 考查三角函数的图象和性质, 意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

8、A

【解析】

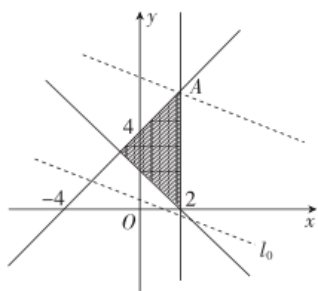
画出约束条件的可行域, 利用目标函数的最值, 判断 a 的范围即可.

【详解】

作出约束条件表示的可行域, 如图所示. 因为 $z = ax + y$ 的最大值为 $2a + 6$, 所以 $z = ax + y$ 在点 $A(2, 6)$ 处取得最大值,

则 $-a \leq 1$, 即 $a \geq -1$.

故选: A



【点睛】

本题主要考查线性规划的应用, 利用 z 的几何意义, 通过数形结合是解决本题的关键.

9、B

【解析】

分两类: 一类是医院 A 只分配 1 人, 另一类是医院 A 分配 2 人, 分别计算出两类的分配种数, 再由加法原理即可得到答案.

【详解】

根据医院 A 的情况分两类:

第一类: 若医院 A 只分配 1 人, 则乙必在医院 B , 当医院 B 只有 1 人, 则共有 $C_3^2 A_2^2$ 种不同

分配方案, 当医院 B 有 2 人, 则共有 $C_2^1 A_2^2$ 种不同分配方案, 所以当医院 A 只分配 1 人时,

共有 $C_3^2 A_2^2 + C_2^1 A_2^2 = 10$ 种不同分配方案;

第二类: 若医院 A 分配 2 人, 当乙在医院 A 时, 共有 A_3^3 种不同分配方案, 当乙不在 A 医院,

在 B 医院时, 共有 $C_2^1 A_2^2$ 种不同分配方案, 所以当医院 A 分配 2 人时,

共有 $A_3^3 + C_2^1 A_2^2 = 10$ 种不同分配方案;

共有 20 种不同分配方案.

故选: B

【点睛】

本题考查排列与组合的综合应用, 在做此类题时, 要做到分类不重不漏, 考查学生分类讨论的思想, 是一道中档题.

10、D

【解析】

计算得到 $f(x+2k\pi) = f(x)$, $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$, 故函数是周期函数, 轴对称图形, 故②④正确, 根据图像

知①③错误, 得到答案.

【详解】

$$f(x) = \frac{\sin x}{1+2\sin x}, \quad f(x+2k\pi) = \frac{\sin(x+2k\pi)}{1+2\sin(x+2k\pi)} = \frac{\sin x}{1+2\sin x} = f(x), \quad k \in \mathbb{Z},$$

当沿 x 轴正方向平移 $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 个单位时, 重合, 故②正确;

$$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \frac{\cos x}{1+2\cos x}, \quad f\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{1+2\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \frac{\cos x}{1+2\cos x},$$

故 $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$, 函数关于 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称, 故④正确;

根据图像知: ①③不正确;

故选: D.

【点睛】

本题考查了根据函数图像判断函数性质，意在考查学生对于三角函数知识和图像的综合应用.

11、D

【解析】

将原题等价转化为方程 $\ln x - x^2 + ax + 1 = f(x_0)$ 在 $(0, e]$ 内都有两个不同的根，先求导 $f'(x)$ ，可判断 $x \in (0, 1)$ 时，

$f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 是增函数；

当 $x \in (1, e)$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 是减函数. 因此 $0 < f(x) \leq 1$ ，再令 $F(x) = \ln x - x^2 + ax + 1$ ，求导得

$F'(x) = -\frac{2x^2 - ax - 1}{x}$ ，结合韦达定理可知，要满足题意，只能是存在零点 x_1 ，使得 $F'(x) = 0$ 在 $(0, e)$ 有解，通过导

数可判断当 $x \in (0, x_1)$ 时 $F'(x) > 0$ ， $F(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上是增函数；当 $x \in (x_1, e)$ 时 $F'(x) < 0$ ， $F(x)$ 在 (x_1, e) 上是

减函数；则应满足 $F(x)_{\max} = F(x_1) > 1$ ，再结合 $2x_1^2 - ax_1 - 1 = 0$ ，构造函数 $m(x) = \ln x + x^2 - 1$ ，求导即可求解；

【详解】

函数 $g(x) = \ln x - x^2 + ax - f(x_0) + 1$ 在 $(0, e]$ 内都有两个不同的零点，

等价于方程 $\ln x - x^2 + ax + 1 = f(x_0)$ 在 $(0, e]$ 内都有两个不同的根.

$f'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} = (1-x)e^{1-x}$ ，所以当 $x \in (0, 1)$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 是增函数；

当 $x \in (1, e)$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 是减函数. 因此 $0 < f(x) \leq 1$.

设 $F(x) = \ln x - x^2 + ax + 1$ ， $F'(x) = \frac{1}{x} - 2x + a = -\frac{2x^2 - ax - 1}{x}$ ，

若 $F'(x) = 0$ 在 $(0, e)$ 无解，则 $F(x)$ 在 $(0, e]$ 上是单调函数，不合题意；所以 $F'(x) = 0$ 在 $(0, e)$ 有解，且易知只能有一个解.

设其解为 x_1 ，当 $x \in (0, x_1)$ 时 $F'(x) > 0$ ， $F(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上是增函数；

当 $x \in (x_1, e)$ 时 $F'(x) < 0$ ， $F(x)$ 在 (x_1, e) 上是减函数.

因为 $\forall x_0 \in (0, e]$ ，方程 $\ln x - x^2 + ax + 1 = f(x_0)$ 在 $(0, e]$ 内有两个不同的根，

所以 $F(x)_{\max} = F(x_1) > 1$ ，且 $F(e) \leq 0$. 由 $F(e) \leq 0$ ，即 $\ln e - e^2 + ae + 1 \leq 0$ ，解得 $a \leq e - \frac{2}{e}$.

由 $F(x)_{\max} = F(x_1) > 1$ ，即 $\ln x_1 - x_1^2 + ax_1 + 1 > 1$ ，所以 $\ln x_1 - x_1^2 + ax_1 > 0$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/926113135040010232>