

绝密★启用前

试卷类型：A

南京市 2025 届高三学业水平调研考试

数学

本试卷共 4 页，19 小题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，请务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上。将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔在答题卡上将对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的。请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上。

1. 已知集合 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 4\}$, $B = \{(x, y) | y = 2 \cos x\}$ ，则 $A \cap B$ 的真子集个数为（ ）
A. 5 个 B. 6 个 C. 7 个 D. 8 个
2. 在复平面内，复数 z 对应的点 Z 在第二象限，则复数 $\frac{z}{4i}$ 对应的点 Z_1 所在象限为（ ）
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
3. 某考生参加某高校的综合评价招生并成功通过了初试，在面试阶段中，8 位老师根据考生表现给出得分，分数由低到高依次为：76, a , b , 80, 80, 81, 84, 85，若这组数据的下四分位数为 77，则该名考生的面试平均得分为（ ）
A. 79 B. 80 C. 81 D. 82
4. “ $\tan^2 \alpha = \frac{1}{4}$ ”是“ $\frac{\tan 3\alpha}{\tan \alpha} = 11$ ”的（ ）

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 若单位向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 120^\circ$, 向量 \vec{c} 满足 $(\vec{c} - \vec{a}) \perp (\vec{c} - \vec{b})$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ B. $\frac{1-\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ D. $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

6. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 1}$, 若 $S_{2024} \in (k, k+1)$, 则正整数 k 的值为 ()

- A. 2024 B. 2023 C. 2022 D. 2021

7. 已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 在双曲线 C 上任意一点 P 处作双曲线 C 的切线

($x_p > 0, y_p > 0$), 交 C 在第一、四象限的渐近线分别于 A, B 两点. 当 $S_{\triangle OP_A} = 2$ 时, 该双曲线的离心率为 ()

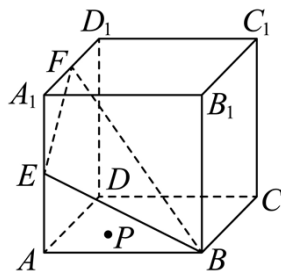
- A. $\sqrt{17}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $\sqrt{19}$ D. $2\sqrt{5}$

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $A < B < C$ 且 $\tan A, \tan B, \tan C$ 均为整数, D 为 AC 中点, 则 $\frac{BC}{BD}$ 的值为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1

三、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 如图, 棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别是 AA_1, A_1D_1 的中点, 点 P 为底面 $ABCD$ 内 (包括边界) 的动点, 则下列说法正确的是 ()



- A. 过 B, E, F 三点的平面截正方体所得截面图形是梯形
 B. 存在点 P , 使得 $C_1P \perp$ 平面 BEF

C. 若点 P 到直线 BB_1 与到直线 AD 的距离相等, 则点 P 的轨迹为抛物线的一部分

D. 若直线 D_1P 与平面 BEF 无公共点, 则点 P 的轨迹长度为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

10. 芯片时常制造在半导体晶元表面上. 某企业使用新技术对某款芯片制造工艺进行改进. 部分芯片由智能检测系统进行筛选, 其中部分次品芯片会被淘汰, 筛选后的芯片及未经筛选的芯片进入流水线由工人进行抽样检验. 记 A 表示事件“某芯片通过智能检测系统筛选”, B 表示事件“某芯片经人工抽检后合格”. 改进生产工艺后, 这款芯片的某项质量指标 ξ 服从正态分布 $N(5.40, 0.05^2)$, 现从中随机抽取 M 个, 这 M 个芯片中恰有 m 个的质量指标 ξ 位于区间 $(5.35, 5.55)$, 则下列说法正确的是 () (参考数据:

$$P(\mu - \sigma < \xi \leq \mu + \sigma) \approx 0.6826, \quad P(\mu - 3\sigma < \xi \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9974)$$

A. $P(B|A) > P(B)$

B. $P(A|B) > P(A|\bar{B})$

C. $P(5.35 < \xi < 5.55) \approx 0.84$

D. $P(m=45)$ 取得最大值时, M 的估计值为

54

11. 麦克斯韦妖(Maxwell'sdemon), 是在物理学中假想的妖, 能探测并控制单个分子的运动, 是第二类永动机的一个范例. 而直到信息熵的发现后才推翻了麦克斯韦妖理论. 设随机变量 x 所有取值为 $1, 2, \dots, n$, 且 $P(x=i) = P_i > 0 (i=1, 2, \dots, n)$, $\sum_{i=1}^n P_i = 1$, 定义 X 信息熵

$$H(x) = -\sum_{i=1}^n P_i \log_2 P_i, \text{ 则下列说法正确的是 ()}$$

A. 当 $n=1$ 时, $H(x) = 0$

B. 当 $n=2$ 时, 若 $P_i \in (0, \frac{1}{2})$, 则 $H(x)$ 与 P_i 正相关

C. 若 $P_1 = P_2 = \frac{1}{2^{n-1}}, P_{k+1} = 2P_k (k \geq 2, k \in \mathbf{N})$, 则 $H(x) = 2 - \frac{n}{2^{n-1}}$

D. 若 $n=2m$, 随机变量 y 的所有可能取值为 $1, 2, \dots, m$, 且

$$P(y=j) = P_j + P_{2m+1-j} (j=1, 2, \dots, m), \text{ 则 } H(x) \geq H(y)$$

三、填空题: 本大题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 在正四棱台 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 4$, $A_1B_1 = 2$, $AA_1 = 2\sqrt{2}$, 则该棱台的体积为_____.

13. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 与抛物线 $x^2 = 4y$ 在第一象限的交点为点 A , 抛物线 $y^2 = 4x$ 与直线

$x - ey - e^2 = 0$ (e 为自然常数) 在第四象限的交点为点 B , 点 O 为坐标原点, 则 $\triangle OAB$ 的面积为_____.

14. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(-1-x) + f(x) = -7$, 且 $f\left[f(x) + \frac{1}{f(x)+3} - x - \frac{1}{x} + 2\right] = -4$, 则 $f(2024) =$ _____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. 已知函数 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + bx^2 + cx + bc$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有极值 $-\frac{4}{3}$, 求 b, c 的值;

(2) 若函数 $g(x) = f(x) - c(x+b) - 2$ 在 $x \in [4, +\infty)$ 内单调递减, 求 b 的取值范围.

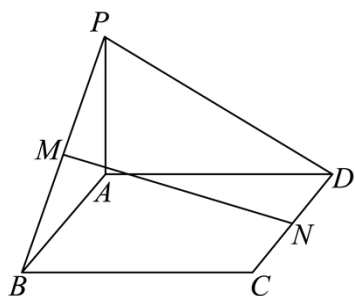
16. 4 月 19 日是中国传统二十四节气之一的“谷雨”, 联合国将这天定为“联合国中文日”, 以纪念“中华文字始祖”仓颉[jié]造字的贡献, 旨在庆祝多种语言以及文化多样性, 促进联合国六种官方语言平等使用. 某大学面向在校留学生举办中文知识竞赛, 每位留学生随机抽取问题并依次作答, 其中每个问题的回答相互独立. 若答对一题记 2 分, 答错一题记 1 分, 已知甲留学生答对每个问题的概率为 $\frac{1}{4}$, 答错的概率为 $\frac{3}{4}$.

(1) 甲留学生随机抽取 3 题, 记总得分为 X , 求 X 的分布列与数学期望;

(2) (i) 若甲留学生随机抽取 m 道题, 记总得分恰为 $2m$ 分的概率为 P_m , 求数列 $\{P_m\}$ 的前 m 项和;

(ii) 记甲留学生已答过的题累计得分恰为 n 分的概率为 Q_n , 求数列 $\{Q_n\}$ 的通项公式.

17. 如图, 已知四边形 $ABCD$ 是矩形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $PA = 2$, M, N 是线段 PB, DC 上的点, 满足 $\frac{BM}{MP} = \frac{DN}{NC} = \lambda$.



(1) 若 $\lambda = 1$, 求证: 直线 $MN \parallel$ 平面 PDA ;

(2)是否存在实数 λ ，使直线 MN 同时垂直于直线 PB ，直线 DC ？如果有请求出 λ 的值，否则请说明理由；

(3)若 $\lambda=1$ ，求直线 MN 与直线 PD 所成最大角的余弦值.

18. 已知双曲线 $C_1: x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 与曲线 $C_2: 2(x-m)^2 + (y-n)^2 = 6$ 有 4 个交点 A, B, C, D (按逆时针排列)

(1)当 $m=n=0$ 时，判断四边形 $ABCD$ 的形状；

(2)设 O 为坐标原点，证明： $|OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2 + |OD|^2$ 为定值；

(3)求四边形 $ABCD$ 面积的最大值.

附：若方程 $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 有 4 个实根 x_1, x_2, x_3, x_4 ，则 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a$ ，

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = b.$$

19. 称 $I \subseteq \mathbf{Z}$ 是 \mathbf{Z} 的一个向往集合，当且仅当其满足如下两条性质：(1) 任意 $a, b \in I$ ，

$a+b \in I$ ；(2) 任意 $a \in I$ 和 $c \in \mathbf{Z}$ ，有 $ca \in I$. 任取 $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{Z}$ ，称包含 a_1, a_2, \dots, a_n 的最小

向往集合称为 a_1, a_2, \dots, a_n 的生成向往集合，记为 (a_1, a_2, \dots, a_n) .

(1)求满足 $(6, 8) = (x)$ 的正整数 x 的值；

(2)对两个向往集合 I_1, I_2 ，定义集合

$$S(I_1, I_2) = \{a+b \mid a \in I_1, b \in I_2\}, P(I_1, I_2) = \{a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in I_1, b_1, b_2, \dots, b_n \in I_2, n=1, 2, \dots\}$$

(i) 证明： $P((4, 6), (3))$ 仍然是向往集合，并求正整数 x ，满足 $P((4, 6), (3)) = (x)$ ；

(ii) 证明：如果 $S(I_1, I_2) = \mathbf{Z}$ ，则 $I_1 \cap I_2 = P(I_1, I_2)$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/926143122004010221>

