

2024—2025 学年度第一学期

高二年级 10 月学情调研数学试卷

注意事项:

1. 本试卷包括单项选择题(第 1 题~第 8 题)、多项选择题(第 9 题~第 11 题)、填空题一(第 12 题~第 19 题)、填空题二(第 20 题~第 22 题)四部分. 本试卷满分为 150 分, 考试时间为 100 分钟.

2. 答卷前, 考生务必将自己的班级、姓名、学号填涂在答题卡上指定的位置.

3. 作答选择题时, 选出每小题的答案后, 用 2B 铅笔在答题卡上将对应题目选项的答案信息点涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案. 答案不能答在试卷上.

4. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上; 如需改动, 先划掉原来的答案, 再写上新答案; 不准使用铅笔和涂改液.

一、单项选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 6 分, 共 48 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的, 请把答案填涂在答题卡相应位置上.

1. $A(-2,0)$, $B(2,0)$, $C(0,2)$, $E(-1,0)$, $F(1,0)$, 一束光线从点 F 出发射到 BC 上的点 D , 经 BC 反射后, 再经 AC 反射, 落到线段 AE 上(不含端点), 则 FD 的斜率的取值范围是 ()

A. $(-\infty, 2)$

B. $(0, +\infty)$

C. $(1, +\infty)$

D. $(4, +\infty)$

【答案】D

【解析】

【分析】先根据题意求得 $A(-2,0)$ 关于直线 BC 对称的点为 $A_1(2,4)$, 点 $E(-1,0)$ 关于直线 AC 的对称点为 $E_1(-2,1)$, 点 $E_1(-2,1)$ 关于直线 BC 的对称点为 $E_2(1,4)$, 再数形结合得到点 D 的变动范围, 从而得到 $k_{FD} > k_{AF}$, 由此得解.

【详解】设直线 BC 方程为 $y = kx + b$, 则 $\begin{cases} 0 = 2k + b \\ 2 = b \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} k = -1 \\ b = 2 \end{cases}$, 即 $BC: y = -x + 2$, 即

$BC: x + y - 2 = 0$,

设 $A(-2,0)$ 关于直线 BC 对称的点为 $A_1(x,y)$, 则 $\begin{cases} \frac{y}{x+2}=1 \\ \frac{x-2}{2}+\frac{y}{2}-2=0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$, 即 $A_1(2,4)$,

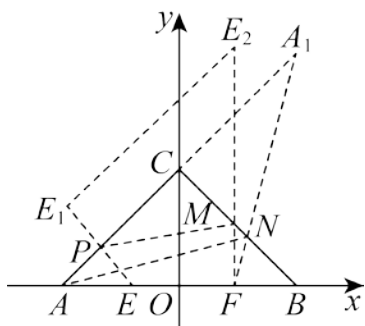
$$k_{A_1F}=4,$$

同理可得:

点 $E(-1,0)$ 关于直线 $AC: y=x+2$ 的对称点为 $E_1(-2,1)$,

点 $E_1(-2,1)$ 关于直线 $BC: y=-x+2$ 的对称点为 $E_2(1,4)$,

如图所示:



利用光线反射的性质可知, 当这束光线反射后最终经过点 A 时, 则其先经过点 N ; 当这束光线反射后最终经过点 E 时, 则其先经过点 M ;

所以点 M, N 之间为点 D 的变动范围,

因为 $E_2(1,4)$, $F(1,0)$, 所以直线 FE_2 , 即直线 FM 斜率不存在, 而 $k_{FN}=k_{A_1F}=4$,

所以 $k_{FD} > k_{FN}=4$, 即 $k_{FD} \in (4, +\infty)$.

故选: D

2. 已知 M 是圆 $C: x^2 + y^2 = 1$ 上一个动点, 且直线 $l_1: mx - ny - 3m + n = 0$ 与直线

$l_2: nx + my - 3m - n = 0 (m, n \in \mathbb{R}, m^2 + n^2 \neq 0)$ 相交于点 P , 则 $|PM|$ 的取值范围是 ()

- A. $[\sqrt{3}-1, 2\sqrt{3}+1]$ B. $[\sqrt{2}-1, 3\sqrt{2}+1]$ C. $[\sqrt{2}-1, 2\sqrt{2}+1]$ D. $[\sqrt{2}-1, 3\sqrt{3}+1]$

【答案】B

【解析】

【分析】根据给定条件确定出点 P 的轨迹, 再借助圆与圆的位置关系及圆的几何性质计算作答.

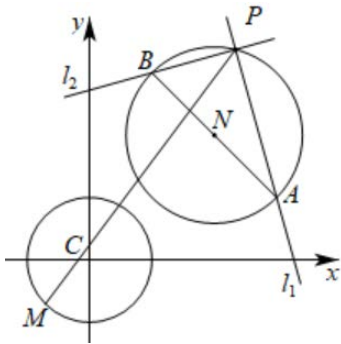
【详解】依题意, 直线 $l_1: m(x-3)-n(y-1)=0$ 恒过定点 $A(3,1)$, 直线 $l_2: n(x-1)+m(y-3)=0$ 恒过定

点 $B(1,3)$,

显然直线 $l_1 \perp l_2$, 因此, 直线 l_1 与 l_2 交点 P 的轨迹是以线段 AB 为直径的圆,

其方程为: $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$, 圆心 $N(2,2)$, 半径 $r_2 = \sqrt{2}$, 而圆 C 的圆心 $C(0,0)$, 半径 $r_1 = 1$,

如图:



$|NC| = 2\sqrt{2} > r_1 + r_2$, 两圆外离, 由圆的几何性质得: $|PM|_{\min} = |NC| - r_1 - r_2 = \sqrt{2} - 1$,

$|PM|_{\max} = |NC| + r_1 + r_2 = 3\sqrt{2} + 1$,

所以 $|PM|$ 的取值范围是: $[\sqrt{2} - 1, 3\sqrt{2} + 1]$.

故选: B

【点睛】思路点睛: 判断两圆的位置关系常用几何法, 即用两圆圆心距与两圆半径和与差之间的关系, 一般不采用代数法.

3. 已知两个不同的圆 C_1 , C_2 均过定点 $A(a,b)$, 且圆 C_1 , C_2 均与 x 轴、 y 轴相切, 则圆 C_1 与圆 C_2 的半径之积为 ()

- A. $|ab|$ B. $2|ab|$ C. $a^2 + b^2$ D. $\frac{a^2 + b^2}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】按点 A 的位置分不在坐标轴与在坐标轴上两种情况讨论, 结合圆的标准方程, 点在圆上, 以及方程根的情况综合分析 $r_1 r_2$ 的值即可.

【详解】当点 A 在第一象限时, 圆 C_1 , C_2 的方程为 $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2 (r > 0)$ 的形式,

代入点 $A(a,b)$ 的坐标, 可得关于 r 的方程 $r^2 - 2(a+b)r + a^2 + b^2 = 0$,

圆 C_1 , C_2 的半径 r_1 , r_2 是该方程的两个不同实根,

所以 $r_1 r_2 = a^2 + b^2$ ，同理，当点 A 在第二、三、四象限时也可得 $r_1 r_2 = a^2 + b^2$ 。

当点 A 在 y 轴上时， $a = 0$ ，

此时圆 C_1 ， C_2 的圆心分别位于第一、二象限（或第三、四象限），两圆在 A 点处相切，

且 $r_1 = r_2 = |b|$ ，满足 $r_1 r_2 = b^2 = a^2 + b^2$ 。

同理，当点 A 在 x 轴上时， $b = 0$ ，同样满足 $r_1 r_2 = a^2 = a^2 + b^2$ 。

故选：C。

【点睛】结论点睛：圆的标准方程为 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ，其中圆心为 (a, b) ，半径为 r 。

4. 过椭圆的左焦点 F 作直线交椭圆于 A、B 两点，若 $|AF| : |BF| = 2 : 3$ ，且直线与长轴的夹角为 $\frac{\pi}{4}$ ，则椭圆的离心率为（ ）

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{5}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{5}$

D. $\frac{2}{5}$

【答案】B

【解析】

【分析】过点 A、B 作准线的垂线，垂足分别为 C、D，过点 A 作 $AH \perp BD$ ，垂足为 H，交 x 轴于点 E，

设 $|AB| = 5t$ ，得到 $|AF| = 2t$ ， $|BF| = 3t$ ，求得 $|BH| = \frac{5\sqrt{2}}{2}t$ ，结合椭圆的第二定义，求得

$|BH| = |BD| - |DH| = \frac{t}{e}$ ，得出 $\frac{t}{e} = \frac{5\sqrt{2}}{2}t$ ，即可求解。

【详解】如图所示，设准线与 x 轴的交点为 M，过点 A、B 作准线的垂线，垂足分别为 C、D，

过点 A 作 $AH \perp BD$ ，垂足为 H，交 x 轴于点 E，

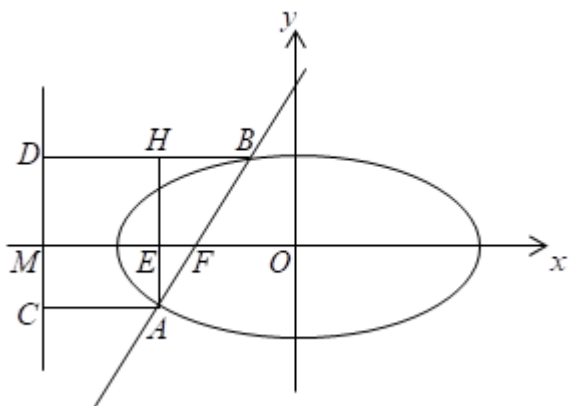
设 $|AB| = 5t$ ，因为 $|AF| : |BF| = 2 : 3$ ，则 $|AF| = 2t$ ， $|BF| = 3t$ ，

又因为直线与长轴的夹角为 $\frac{\pi}{4}$ ，所以 $\angle BAH = 45^\circ$ ，则 $|BH| = \frac{\sqrt{2}}{2}|AB| = \frac{5\sqrt{2}}{2}t$ ，

由椭圆的第二定义，可得 $|BH| = |BD| - |DH| = \frac{|BF|}{e} - \frac{|AF|}{e} = \frac{3t}{e} - \frac{2t}{e} = \frac{t}{e}$ ，

所以 $\frac{t}{e} = \frac{5\sqrt{2}}{2}t$ ，解得 $e = \frac{\sqrt{2}}{5}$ ，即椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{5}$ 。

故选：B。



5. 已知 P 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上一动点, $A(-2,1)$, $B(2,1)$, 则 $\cos \langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB} \rangle$ 的最大值是 ()

- A. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{17}}{17}$ C. $\frac{\sqrt{17}-\sqrt{7}}{6}$ D. $\frac{\sqrt{14}}{14}$

【答案】A

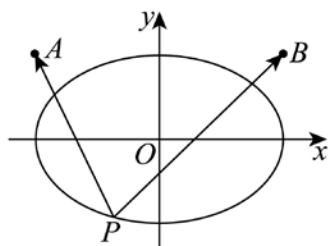
【解析】

【分析】记 $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB} = \theta$, 考虑 $\theta < 90^\circ$, 当直线 AP 、 BP 之中有一条直线的斜率不存在时

$\tan \theta = \frac{AB}{AP} = 4$, 当直线 AP 、 BP 斜率都存在时由 $\tan \theta = \frac{k_{AP} - k_{BP}}{1 + k_{AP} \cdot k_{BP}}$ 求出 $\tan \theta$ 关于 y 的表达式, 利用换

元法和基本不等式即可求得 $\tan \theta$ 的范围, 再由 $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$ 转化为 $\cos \theta$ 的范围即可求得最大值.

【详解】记 $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB} = \theta$, 若 $\theta > 90^\circ$, 则 $\cos \theta < 0$; 若 $\theta = 90^\circ$, 则 $\cos \theta = 0$;



考虑 $\theta < 90^\circ$, 当直线 AP 、 BP 之中有一条直线的斜率不存在时, 不妨设 P 点位于左顶点,

此时直线 AP 斜率不存在, $\tan \theta = \frac{AB}{AP} = 4$;

当直线 AP 、 BP 斜率都存在时, 设 $P(x, y)$, 有 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$,

$$\tan \theta = \frac{k_{AP} - k_{BP}}{1 + k_{AP} \cdot k_{BP}} = \frac{\frac{y-1}{x+2} - \frac{y-1}{x-2}}{1 + \frac{y-1}{x+2} \cdot \frac{y-1}{x-2}} = \frac{4(1-y)}{x^2 - 4 + (y-1)^2}$$

$$= \frac{4(1-y)}{4-4y^2-4+(y-1)^2} = \frac{4(1-y)}{-3y^2-2y+1}, \quad (-1 \leq y \leq 1)$$

$$\text{令 } t = 1 - y \in [0, 2], \text{ 则 } \tan \theta = \frac{4t}{-3t^2 + 8t - 4},$$

当 $t = 0$ 时, $\tan \theta = 0$ (此时 $y = 1, \theta = \pi, \cos \theta = -1$),

$$\text{当 } t \in (0, 2], \quad \tan \theta = \frac{4}{-3t - \frac{4}{t} + 8} = \frac{4}{8 - \left(3t + \frac{4}{t}\right)} \geq \frac{4}{8 - 4\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} < 4, \text{ 当且仅当 } 3t = \frac{4}{t} \text{ 即 } t = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ 时}$$

取等号,

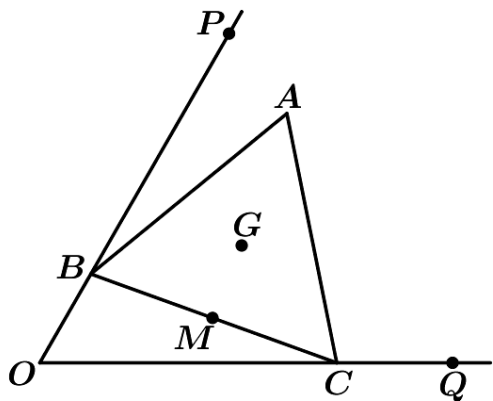
$$\text{则 } \cos \theta = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \theta}} \leq \sqrt{\frac{1}{1 + (2 + \sqrt{3})^2}} = \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

综上所述, $\cos \overline{PA}, \overline{PB}$ 的最大值是 $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

故选: A

【点睛】本题考查椭圆中的最值问题、椭圆的几何性质、直线的斜率, 涉及换元法求函数的最值、基本不等式、同角三角函数的关系, 属于较难题.

6. 如图, $\angle POQ = 60^\circ$, 等边 $\triangle ABC$ 的边长为 2, M 为 BC 中点, G 为 $\triangle ABC$ 的重心, B, C 分别在射线 OP, OQ 上运动, 记 M 的轨迹为 C_1 , G 的轨迹为 C_2 , 则 ()



- A. C_1 为部分圆, C_2 为部分椭圆
- B. C_1 为部分圆, C_2 为线段
- C. C_1 为部分椭圆, C_2 为线段
- D. C_1 为部分椭圆, C_2 也为部分椭圆

【答案】C

【解析】

【分析】建系如图，由两点间距离公式结合中点坐标公式可得点 M 的轨迹方程，由此得 C_1 为部分椭圆；

过点 A 作与 Y 轴垂直的直线分别交 OP 于点 E ，交 OQ 于点 F ，得等边 $\triangle OEF$ ，由平面几何可得 G 是等边 $\triangle OEF$ 的外心，由此可得点 G 的轨迹 C_2 为 Y 轴在曲线 C_1 内的一段线段。

【详解】以 O 为原点，以 $\angle POQ$ 的角平分线为 Y 轴建立平面直角坐标系如图所示。

依题意得直线 OQ 的方程为 $y = \sqrt{3}x$ ，直线 OP 的方程为 $y = -\sqrt{3}x$ 。

设点 $B(b, -\sqrt{3}b)$ ， $C(c, \sqrt{3}c)$ ，由 $|BC| = 2$ 得 $(b-c)^2 + 3(b+c)^2 = 4$ (*)，

$$\text{设点 } M(x, y), \text{ 因为 } M \text{ 是 } BC \text{ 的中点, 所以 } \begin{cases} x = \frac{b+c}{2} \\ y = \frac{-\sqrt{3}}{2}(b-c) \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} b+c = 2x \\ b-c = -\frac{2y}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

将其代入 (*) 得 $\frac{4}{3}y^2 + 12x^2 = 4$ ，即 $\frac{y^2}{3} + \frac{x^2}{\frac{1}{3}} = 1$ ，故 M 的轨迹 C_1 为椭圆在 $\angle POQ$ 内部的部分。

过点 A 作与 Y 轴垂直的直线分别交 OP 于点 E ，交 OQ 于点 F ，则 $\triangle OEF$ 显然也是等边三角形。

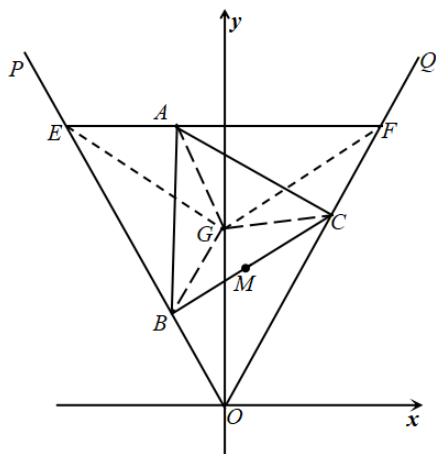
下面证明等边 $\triangle ABC$ 的重心 G 即等边 $\triangle OEF$ 的外心。

设 $\angle OCB = \theta$ ，则 $\angle OBC = 120^\circ - \theta = \angle ACF$ ，又 $\angle BOC = \angle CFA = 60^\circ$ ，且 $BC = AC$ ，所以 $\triangle OBC \cong \triangle FCA$ ，因此 $OC = AF$ 。

在 $\triangle OGC$ 和 $\triangle FGA$ 中， $\angle OCG = \theta + 30^\circ = \angle FAG$ ，又 $GA = GC$ ，所以 $\triangle OGC \cong \triangle FGA$ ，则

$OG = FG$ ，同理可证 $OG = EG$ ，即点 G 是等边 $\triangle OEF$ 的外心，所以，点 G 在 Y 轴上移动，故点 G 的轨迹 C_2 为 Y 轴在曲线 C_1 内的一段线段。

故选：C。



【点睛】关键点点睛：建立适当的坐标系是解决本题的关键.

7. 已知点 P 是椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 上一点, F_1, F_2 是椭圆的左、右焦点, 若 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$, 则下列说法正确的是 ()

A. $\triangle F_1PF_2$ 的面积为 $\sqrt{3}$

B. 若点 M 是椭圆上一动点, 则 $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2}$ 的最大值为 9

C. 点 P 的纵坐标为 $\frac{5\sqrt{3}}{6}$

D. $\triangle F_1PF_2$ 内切圆的面积为 $\frac{\pi}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】对 A, 根据椭圆定义和余弦定理求出 $|PF_1| \cdot |PF_2| = \frac{20}{3}$ 即可得出; 对 B, 根据椭圆的有界性可得;

对 C, 根据 $\triangle F_1PF_2$ 的面积建立关系求解; 对 D, 根据 $\triangle F_1PF_2$ 的面积求出内切圆半径即可得出.

【详解】对 A, 根据椭圆定义可得 $|PF_1| + |PF_2| = 6$, 则 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 + 2|PF_1| \cdot |PF_2| = 36$ ①,

在 $\triangle F_1PF_2$ 中, 由余弦定理 $|F_1F_2|^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2| \cdot \cos 60^\circ$ ②,

由①②可得 $|PF_1| \cdot |PF_2| = \frac{20}{3}$, 所以 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为 $\frac{1}{2}|PF_1| \cdot |PF_2| \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{20}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$, 故 A

错误;

对 B, 设 $M(x_0, y_0)$, 则 $\frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{5} = 1$, $-3 \leq x_0 \leq 3$,

$\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = (-2 - x_0, -y_0) \cdot (2 - x_0, -y_0) = x_0^2 + y_0^2 - 4$

$$= x_0^2 + 5 - \frac{5x_0^2}{9} - 4 = \frac{4x_0^2}{9} + 1,$$

则当 $x_0 = \pm 3$ 时, $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2}$ 取得最大值为 5, 故 B 错误;

对 C, 由 A, $\square F_1PF_2$ 的面积为 $\frac{5\sqrt{3}}{3}$, 则 $\frac{1}{2} \times 2c \times |y_P| = 2|y_P| = \frac{5\sqrt{3}}{3}$, 解得 $y_P = \pm \frac{5\sqrt{3}}{6}$, 故 C 错误;

对 D, 设 $\square F_1PF_2$ 内切圆的半径为 r , 因为 $\square F_1PF_2$ 的面积为 $\frac{5\sqrt{3}}{3}$,

所以 $\frac{1}{2}(|PF_1| + |PF_2| + |F_1F_2|) \cdot r = \frac{5\sqrt{3}}{3}$, 即 $\frac{1}{2}(6+4) \cdot r = \frac{5\sqrt{3}}{3}$, 解得 $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以 $\square F_1PF_2$ 内切圆的面积为 $\pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{\pi}{3}$, 故 D 正确.

故选: D.

8. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 内有一点 $M(2, 1)$, 过 M 的两条直线 l_1 、 l_2 分别与椭圆 E 交于

A、C 和 B、D 两点, 且满足 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{MD}$ (其中 $\lambda > 0$ 且 $\lambda \neq 1$), 若 λ 变化时直线 AB 的斜率总为 $-\frac{1}{2}$, 则椭圆 E 的离心率为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】D

【解析】

【详解】设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$, 由 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MC}$ 可得:

$$(2 - x_1, 1 - y_1) = \lambda(x_3 - 2, y_3 - 1),$$

$$\text{据此可得: } \begin{cases} x_1 + \lambda x_3 = 2 + 2\lambda \\ y_1 + \lambda y_3 = 1 + \lambda \end{cases},$$

$$\text{同理可得: } \begin{cases} x_2 + \lambda x_4 = 2 + 2\lambda \\ y_2 + \lambda y_4 = 1 + \lambda \end{cases},$$

$$\text{则: } \begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda(x_3 + x_4) = 4(1 + \lambda) \\ y_1 + y_2 + \lambda(y_3 + y_4) = 2(1 + \lambda) \end{cases},$$

将点 A, B 的坐标代入椭圆方程做差可得:

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{b^2}{a^2} \times \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2},$$

$$\text{即: } -\frac{1}{2} = -\frac{b^2}{a^2} \times \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} \Rightarrow a^2(y_1 + y_2) = 2b^2(x_1 + x_2),$$

$$\text{同理可得: } a^2(y_3 + y_4) = 2b^2(x_3 + x_4),$$

$$\text{两式相加可得 } a^2[(y_1 + y_2) + (y_3 + y_4)] = 2b^2[(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4)],$$

$$\text{故: } 2[(y_1 + y_2) + \lambda(y_3 + y_4)] = 1[(x_1 + x_2) + \lambda(x_3 + x_4)],$$

$$\text{据此可得: } \frac{a^2}{2} = \frac{2b^2}{1} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

点睛: 椭圆的离心率是椭圆最重要的几何性质, 求椭圆的离心率(或离心率的取值范围), 常见有两种方法:

① 求出 a, c , 代入公式 $e = \frac{c}{a}$;

② 只需要根据一个条件得到关于 a, b, c 的齐次式, 结合 $b^2 = a^2 - c^2$ 转化为 a, c 的齐次式, 然后等式(不等式)两边分别除以 a 或 a^2 转化为关于 e 的方程(不等式), 解方程(不等式)即可得 e (e 的取值范围).

二、多项选择题: 本大题共 3 小题, 每小题 9 分, 共 27 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 9 分, 部分选对的得部分分, 不选或有选错的得 0 分.

9. 已知点 A, B 为圆 $O: x^2 + y^2 = 26$ 上两动点, 且 $|AB| = 4\sqrt{6}$, 点 P 为直线 $l: x + y + 10 = 0$ 上动点, 则 ()

- A. 以 AB 为直径的圆与直线 l 相离
- B. $\angle APB$ 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$
- C. $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最小值为 8
- D. $|PA|^2 + |PB|^2$ 的最小值为 112

【答案】 ACD

【解析】

【分析】 对于 A, 设 AB 的中点为 C , 连接 OC, AO , 求出点 C 到直线 l 的距离的最小值进行判断, 对于 B, 举例判断, 对于 CD, 利用向量的数量积运算结合图形分析判断即可.

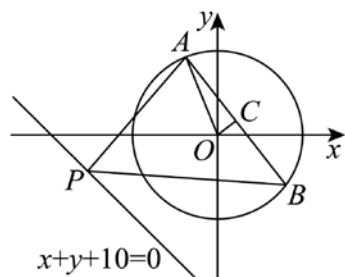
【详解】 对于 A, 设 AB 的中点为 C , 连接 OC, AO , 则 $OC \perp AB, |AC| = |BC| = \frac{1}{2}|AB| = 2\sqrt{6}$,

$$\text{所以 } |OC| = \sqrt{|AO|^2 - |AC|^2} = \sqrt{26 - 24} = \sqrt{2},$$

所以点 C 在以 O 为圆心, $\sqrt{2}$ 为半径的圆上,

所以点 C 到直线 l 的距离的最小值为 $\frac{10}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$,

因为 $4\sqrt{2} > 2\sqrt{6}$, 所以以 AB 为直径的圆与直线 l 相离, 所以 A 正确,

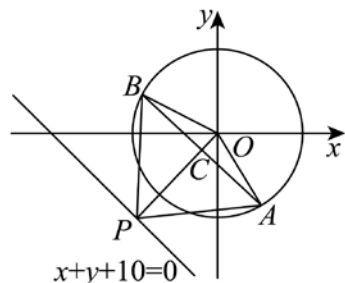


对于 B, 如图, 当直线 AB 与直线 l 平行, 且 O, C, P 共线时, 则 $\triangle ABP$ 为等腰三角形,

此时 $|CP| = 4\sqrt{2}, |BC| = 2\sqrt{6}, \angle APB = 2\angle CPB$,

$$\text{则 } \tan \angle CPB = \frac{|BC|}{|CP|} = \frac{2\sqrt{6}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{\sqrt{3}}{3},$$

所以 $\angle CPB > \frac{\pi}{6}$, 所以 $\angle APB > \frac{\pi}{3}$, 所以 B 错误,



对于 C, 因为 $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB}$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB})$$

$$= \overrightarrow{PO}^2 + \overrightarrow{PO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$$

$$= \overrightarrow{PO}^2 + 2\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OC} + |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cos \angle AOB$$

$$= \overrightarrow{PO}^2 + 2\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OC} + |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| (2\cos^2 \angle AOC - 1),$$

$$\text{因为 } |OP|_{\min} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{PO}^2 + 2\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OC} + |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| (2\cos^2 \angle AOC - 1)$$

$$\geq (5\sqrt{2})^2 + 2 \times 5\sqrt{2} \times \sqrt{2} \cos \pi + 26 \times \left[2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{26}} \right)^2 - 1 \right]$$

$$= 50 - 20 + 26 \times \left(-\frac{11}{13} \right) = 8, \text{ 当 } OP \perp l, O, C, P \text{ 共线, 且 } C \text{ 在 } O, P \text{ 之间时取等号,}$$

所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最小值为 8, 所以 C 正确,

对于 D, 因为 $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB}$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{PA}^2 = \overrightarrow{PO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + 2\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{PB}^2 = \overrightarrow{PO}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + 2\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OB},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PB}^2 = 2\overrightarrow{PO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + 2\overrightarrow{PO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

$$= 2\overrightarrow{PO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + 4\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OC}$$

$$= 2\overrightarrow{PO}^2 + 4\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OC} + 52$$

$$\geq 2 \times (5\sqrt{2})^2 + 4 \times 5\sqrt{2} \times \sqrt{2} \cos \pi + 52$$

$$= 2 \times 50 - 50 + 52 = 112, \text{ 当 } OP \perp l, O, C, P \text{ 共线, 且 } C \text{ 在 } O, P \text{ 之间时取等号,}$$

所以 $|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2$ 的最小值为 112, 所以 D 正确,

故选: ACD

【点睛】关键点点睛: 此题考查直线与圆的位置关系, 考查向量的数量积的运算, 解题的关键是画出图形, 结合图形分析判断, 考查数形结合思想和计算能力, 属于较难题.

10. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知动圆 $C: (x - 2m - 1)^2 + (y - m - 1)^2 = 4m^2 (m \neq 0)$ 则下列说法正确的是 ()

- A. 存在圆 C 经过原点
- B. 存在圆 C , 其所有点均在第一象限
- C. 存在定直线 l , 被圆 C 截得的弦长为定值
- D. 所有动圆 C 有两条公切线

【答案】ABD

【解析】

【分析】对于 A 选项: 将 $(0, 0)$ 代入圆 C 方程, 求得 m , 即可判断;

对于 B 选项: 根据圆 C 所有点均在第一象限得到
$$\begin{cases} 2m + 1 > 0 \\ m + 1 > 0 \\ 2m + 1 > 2|m|, \text{ 即可判断;} \\ m + 1 > 2|m| \\ m \neq 0 \end{cases}$$

对于 C 选项: 当定直线 l 的斜率存在, 设直线 $l: y = kx + b$, 当定直线 l 的斜率不存在, 设直线 $l: x = t$,

由垂径定理和勾股定理得到弦长 L ，要使弦长 L 为定值，则弦长 L 与 m 无关，得到关于 k 和 b 的方程组，即可求解；

对于 D 选项：求出所有动圆 C 的公切线，即可求解。

【详解】对于 A 选项：若圆 C 经过原点，则 $(0-2m-1)^2 + (0-m-1)^2 = 4m^2$ ，

化简得： $m^2 + 6m + 2 = 0$ ，解得： $m = -3 \pm \sqrt{7}$ ，

所以当 $m = -3 \pm \sqrt{7}$ 时，圆 C 经过原点，所以 A 选项正确；

对于 B 选项：由题意得圆 C 的圆心 $C(2m+1, m+1)$ ，半径 $r = 2|m|$ ($m \neq 0$)，

若圆 C 上的所有点均在第一象限，则 $\begin{cases} 2m+1 > 0 \\ m+1 > 0 \\ 2m+1 > 2|m| \\ m+1 > 2|m| \\ m \neq 0 \end{cases}$ ，解得： $\begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ m > -1 \\ m > -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$ ，

即 $-\frac{1}{4} < m < 1$ 且 $m \neq 0$ ，所以当 $m \in \left(-\frac{1}{4}, 0\right) \cup (0, 1)$ 时，圆 C 上的所有点均在第一象限，所以 B 选项正确；

对于 C 选项：当定直线 l 的斜率存在，

设存在定直线 $l: y = kx + b$ ，被圆 C 截得的弦长为定值，

则圆心 $C(2m+1, m+1)$ 到直线 l 的距离 $d = \frac{|(2m+1)k - (m+1) + b|}{\sqrt{1+k^2}}$ ，

则弦长 $L = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{4m^2 - \frac{(4m^2 + 4m + 1)k^2 + (b - m - 1)^2 + 2k(2m+1)(b - m - 1)}{k^2 + 1}}$

即 $L = 2\sqrt{\frac{(4k+3)m^2 + (-4k^2 + 6k - 4bk + 2b - 2)m + (-k^2 + 2k - 2bk - b^2 + 2b - 1)}{k^2 + 1}}$ ，

要使弦长 L 为定值，则弦长 L 与 m 无关，

所以 $\begin{cases} 3+4k=0 \\ -4k^2+6k-4bk+2b-2=0 \end{cases}$ ，解得： $\begin{cases} k=-\frac{3}{4} \\ b=\frac{7}{4} \end{cases}$ ，

此时弦长 $L = 2\sqrt{\frac{-k^2 + 2k - 2bk - b^2 + 2b - 1}{k^2 + 1}} = 0$ ，

不存在定直线 $l: y = kx + b$ ，被圆 C 截得的弦长为定值，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/926213012212010234>