

北京市东城区 2023-2024 学年高一下学期期末统一检测数学

试题

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、单选题

1. 已知复数 $z_1 = 3 - i$, $z_2 = -1 + 2i$, 则在复平面内表示复数 $z_1 + z_2$ 的点位于 ()
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
2. $\cos 30^\circ \cos 15^\circ - \sin 30^\circ \sin 15^\circ$ 的值为 ()
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1
3. 从装有 2 张红色卡片和 2 张黑色卡片的盒子中任取 2 张卡片, 则下列结论正确的是 ()
A. “恰有一张黑色卡片”与“都是黑色卡片”为互斥事件
B. “至少有一张红色卡片”与“至少有一张黑色卡片”为互斥事件
C. “恰有一张红色卡片”与“都是黑色卡片”为对立事件
D. “至多有一张黑色卡片”与“都是红色卡片”为对立事件
4. 在 $\triangle ABC$ 中, $\frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\sin C}$, 则 $\angle B =$ ()
A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$
5. 设 \vec{a} , \vec{b} 为非零向量, 下列结论中正确的是 ()
A. $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} - \vec{b}|$ B. $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a}| - |\vec{b}|$
C. $(2\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (2\vec{b})$ D. $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$
6. 某高校的入学面试为每位面试者准备了 3 道难度相当的题目. 每位面试者最多有三次抽

题机会，若某次答对抽到的题目，则面试通过，否则就一直抽题到第3次为止。若李明答

对每道题目的概率都是0.6，则他最终通过面试的概率为（ ）

- A. 0.24 B. 0.6 C. 0.84 D. 0.936

7. 将函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度，得到的图象关于点 $(\varphi, 0)$ 对称，

则 $|\varphi|$ 的最小值为（ ）

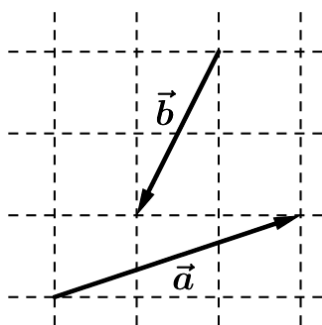
- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

8. 设 α, β 是两个不同的平面， l, m 是两条直线，且 $m \subset \alpha, l \perp \alpha$. 则 “ $l \perp \beta$ ” 是 “ $m \parallel \beta$ ”

的（ ）

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

9. 向量 \vec{a}, \vec{b} 在正方形网格中的位置如图所示，则 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle =$ （ ）

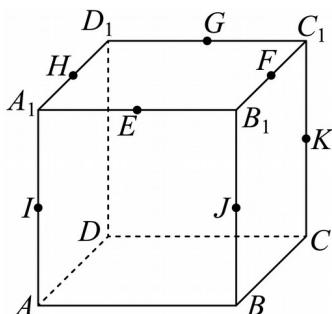


- A. 45° B. 60°
C. 120° D. 135°

10. 如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2，其中 E, F, G, H, I, J, K 分别为

棱 A_1B_1 , B_1C_1 , C_1D_1 , D_1A_1 , AA_1 , BB_1 , CC_1 的中点, 那么三棱柱 B_1FJ-A_1HI 与三棱柱

B_1EJ-C_1GK 在正方体内部的公共部分的体积为 ()



- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

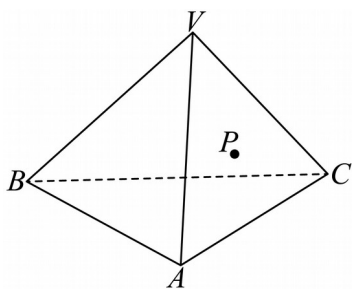
二、填空题

11. 已知向量 $\vec{a} = (x+1, 2)$, $\vec{b} = (2, -3)$, 若 \vec{a} 与 \vec{b} 垂直, 则实数 x 的值为_____.

12. 已知纯虚数 z 满足 $|z-2i|=1$, 则 z 可以是_____.

13. 一木块如图所示, 所有棱长都等于 10cm , 点 P 为三角形 VAC 的中心, 过点 P 将木块锯

开, 截面平行于直线 VB 和 AC , 则截面面积为_____ cm^2 .

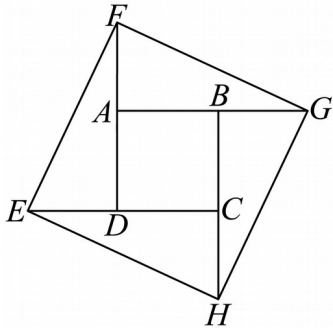


14. 某实验室一天的温度 (单位: $^{\circ}\text{C}$) 随时间 t (单位: h) 的变化近似满足函数关系:

$f(t) = 10 - a \cos \frac{\pi\pi}{12}t - b \sin \frac{\pi\pi}{12}t$, $t \in [0, 24]$, a, b 为正实数, 若 $a = \sqrt{3}$, $b = 1$, 则该实验室

这一天的最大温差为 $\underline{\hspace{2cm}}$ °C; 若该实验室这一天的最大温差为 10 °C, 则 $a+b$ 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 赵爽为《周髀算经》一书作注时介绍了“勾股圆方图”，即“赵爽弦图”。下图是某同学绘制的赵爽弦图，其中 $AD = ED = 2$ ，点 P, Q 分别是正方形 $ABCD$ 和正方形 $EFGH$ 上的动点，给出下列四个结论：



① $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{EF} = 4$;

② $|\overrightarrow{EQ}| \leq 2\sqrt{10}$;

③ 设 \overrightarrow{FB} 与 \overrightarrow{FE} 的夹角为 θ ，则 $\tan \theta$ 的值为 3;

④ $\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{EQ}$ 的最大值为 12.

其中所有正确结论的序号是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

16. 已知 $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(1) 求 $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ 的值;

(2)求 $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin 2\alpha$ 的值.

17. 某中学调查了某班全部 45 名同学参加书法小组和科创小组的情况, 数据如下 (单位: 人):

	参加书法小组	未参加书法小组
参加科创小组	8	4
未参加科创小组	3	30

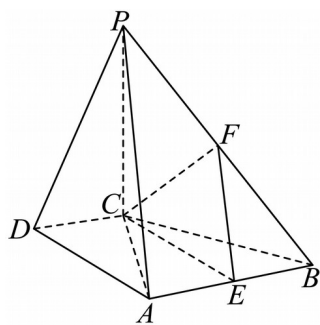
(1)从该班随机选 1 名同学, 求该同学至少参加上述一个小组的概率;

(2)在既参加书法小组又参加科创小组的 8 名同学中, 有 5 名男同学 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ,

3 名女同学 B_1, B_2, B_3 , 现从这 5 名男同学和 3 名女同学中各随机选 1 人, 求 A_1 被选中且

B_1 未被选中的概率.

18. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PC \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \parallel DC$, $DC \perp AC$.



(1)求证: $DC \perp$ 平面 PAC ;

(2)求证: 平面 $PAB \perp$ 平面 PAC ;

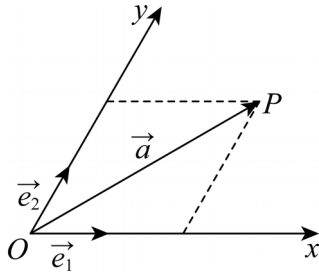
(3)设点 E 为 AB 的中点, 过点 C, E 的平面与棱 PB 交于点 F , 且 $PA \parallel$ 平面 CEF , 求 $\frac{PF}{PB}$

的值.

19. 如图, 设 Ox, Oy 是平面内相交成 60° 角的两条数轴, \vec{e}_1, \vec{e}_2 分别是与 x 轴、 y 轴正方向

同向的单位向量. 若向量 $\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$, 则把有序数对 (x, y) 叫做向量 \overrightarrow{OP} 在坐标系 Oxy 中

的坐标. 设 $\overrightarrow{OP} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$,



(1) 求 $|\overrightarrow{OP}|$ 的模长;

(2) 设 $\overrightarrow{OQ} = \vec{e}_1 + m\vec{e}_2$, 若 $\overrightarrow{OP} // \overrightarrow{OQ}$, 求实数 m 的值;

(3) 若 $\overrightarrow{OA} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OB} = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$, 有同学认为 “ $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ ” 的充要条件是 “

$x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ ”, 你认为是否正确? 若正确, 请给出证明, 若不正确, 请说明理由.

20. 设函数 $f(x) = \sin \omega x + \sqrt{3} \cos \omega x (\omega > 0)$. 从下列三个条件中选择两个作为已知, 使函数

$f(x)$ 存在.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期及单调递减区间;

(2) 若对于任意的 $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$, 都有 $f(x) \leq c$, 求实数 c 的取值范围.

条件①: 函数 $f(x)$ 的图象经过点 $\left(-\frac{\pi}{6}, 2 \right)$;

条件②: $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12} \right]$ 上单调递增;

条件③: $x = \frac{\pi}{12}$ 是 $f(x)$ 的一条对称轴.

注: 如果选择的条件不符合要求, 第(1)问得0分; 如果选择多个符合要求的条件分别解答, 按第一个解答计分.

21. 设 n 为正整数, 集合 $A_n = \{\alpha \mid \alpha = (t_1, t_2, \dots, t_n), t_k \in \{0, 1\}, k = 1, 2, \dots, n\}$. 对于集合 A_n 中的任

意元素 $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和 $\beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, 定义 $\alpha * \beta = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \dots, x_n \cdot y_n)$,

$\alpha \odot \beta = (|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|)$, 以及 $|\alpha| = x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

(1) 若 $n = 5$, $\alpha = (1, 1, 1, 0, 1)$, $\alpha * \beta = (0, 1, 1, 0, 1)$, $|\beta| = 4$, 求 β ;

(2) 若 $n = 9$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k (k \geq 2)$ 均为 A_n 中的元素, 且 $|\alpha_i| = 3 (1 \leq i \leq k)$,

$|\alpha_i * \alpha_j| = 0 (1 \leq i < j \leq k)$, 求 k 的最大值;

(3) 若 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k (k \geq 2)$ 均为 $A_n (n \geq 5)$ 中的元素, 其中 $|\alpha_0| = 0$, $|\alpha_k| = n$, 且满足

$|\alpha_i \odot \alpha_{i+1}| = n - 2 (0 \leq i \leq k - 1)$, 求 k 的最小值.

参考答案:

1. A

【分析】计算出复数的表达式，即可求出在复平面内所表示的点的位置.

【详解】由 $z_1 = 3 - i$ ， $z_2 = -1 + 2i$ ， $z = z_1 + z_2 = 3 - i - 1 + 2i = 2 + i$ ，

由复数的几何意义，可知 $z = z_1 + z_2$ 对应的是第一象限.

故选：A

2. B

【分析】逆用和、差角的余弦公式化简、求值.

【详解】 $\cos 30^\circ \cos 15^\circ - \sin 30^\circ \sin 15^\circ = \cos(30^\circ + 15^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

故选：B

3. A

【分析】记 2 张红色卡片为 A 、 B ，2 张黑色卡片为 a 、 b ，列出样本空间，再对各选项的事件列出其基本事件，根据互斥事件、对立事件的定义判断即可.

【详解】记 2 张红色卡片为 A 、 B ，2 张黑色卡片为 a 、 b ，

所以样本空间 $\Omega = \{AB, Aa, Ab, Ba, Bb, ab\}$ ，

对于 A：“恰有一张黑色卡片” $= \{Aa, Ab, Ba, Bb\}$ ，

“都是黑色卡片” $= \{ab\}$ ，故“恰有一张黑色卡片”与“都是黑色卡片”为互斥事件，故

A 正确；

对于 B：“至少有一张红色卡片” $= \{AB, Aa, Ab, Ba, Bb\}$ ，

“至少有一张黑色卡片” $= \{Aa, Ab, Ba, Bb, ab\}$ ，

所以“至少有一张红色卡片”与“至少有一张黑色卡片”不互斥，故 B 错误；

对于 C：“恰有一张红色卡片” $= \{Aa, Ab, Ba, Bb\}$ ，

“都是黑色卡片” = $\{ab\}$ ，所以恰有一张红色卡片”与“都是黑色卡片”为互斥事件，但不是对立事件，故 C 错误；

对于 D：“至多有一张黑色卡片” = $\{AB, Aa, Ab, Ba, Bb\}$ ，

“都是红色卡片” = $\{AB\}$ ，

所以“都是红色卡片”包含于“至多有一张黑色卡片”，故 D 错误。

故选：A

4. B

【分析】利用正弦定理将边化角，即可求出 $\tan B$ ，从而得解。

【详解】因为 $\frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\sin C}$ ，由正弦定理可得 $\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin C}{\sin C} = 1$ ，即 $\tan B = 1$ ，

又 $B \in (0, \pi)$ ，所以 $B = \frac{\pi}{4}$ 。

故选：B

5. C

【分析】根据线性运算判断 AB；根据数量积的运算律判断 CD。

【详解】当 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 时， $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ，故 A 错；

当 \vec{a} 与 \vec{b} 反向共线时，且 $|\vec{a}| > |\vec{b}|$ 时， $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$ ，故 B 错；

$(2\vec{a}) \cdot \vec{b} = 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (2\vec{b})$ ，故 C 正确；

$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cos^2 \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ ， $\vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2$ ，故 D 错。

故选：C。

6. D

【分析】设李明最终通过面试为事件 A ，根据对立事件及相互独立事件的概率公式计算可得.

【详解】设李明最终通过面试为事件 A ，

则 $P(A) = 1 - 0.4 \times 0.4 \times 0.4 = 0.936$.

故选：D

7. A

【分析】由三角函数平移变换可得函数解析式 $y = \sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$ ，令 $2\pi - \frac{2\pi}{3} = \pi + k$ ，可得

对称中心，进而得到 $|\varphi|$ 的最小值.

【详解】将函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位得：

$$y = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{令 } 2\pi - \frac{2\pi}{3} = k, \quad k \in Z, \quad \text{得 } x = \frac{\pi}{3} + \frac{k}{2},$$

所以 $y = \sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$ 图象的对称中心为 $\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k}{2}, 0\right)$

\therefore

当 $k = -1$ 时， $|\varphi|$ 取得最小值 $\frac{\pi}{6}$.

故选：A.

8. A

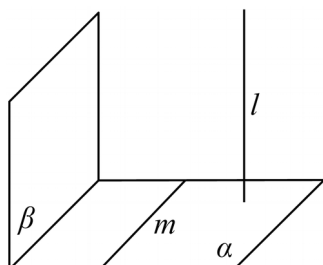
【分析】通过面面平行的性质判断充分性，通过列举例子判断必要性.

【详解】 $l \perp \beta$ ，且 $l \perp \alpha$ ，所以 $\alpha // \beta$ ，又 $m \subset \alpha$ ，所以 $m // \beta$ ，充分性满足，

如图：满足 $m // \beta$ ， $m \subset \alpha$ ， $l \perp \alpha$ ，但 $l \perp \beta$ 不成立，故必要性不满足，

所以“ $l \perp \beta$ ”是“ $m // \beta$ ”的充分而不必要条件.

故选：A.

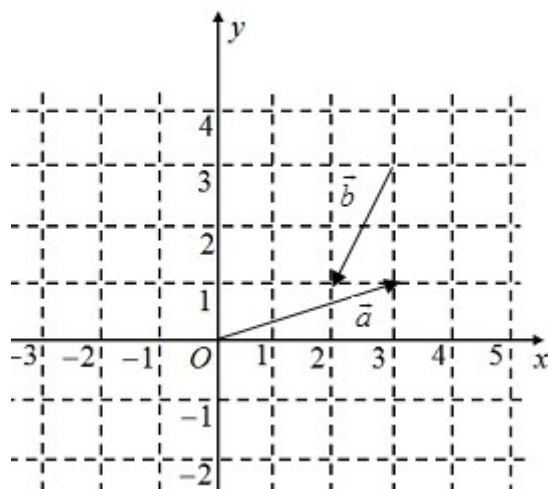


9. D

【分析】建立平面直角坐标系，利用数量积的坐标运算即可求解.

【详解】设小正方形的边长为1，

建立如图所示的平面直角坐标系，



则 $\vec{a} = (3,1)$ ， $\vec{b} = (2,1) - (3,3) = (-1,-2)$ ，

$$\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-3-2}{\sqrt{10} \times \sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}，$$

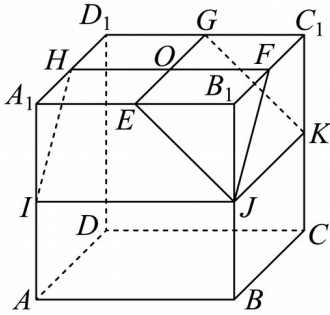
因为 $0 \leq \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \leq \pi$ ，所以 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 135^\circ$ 。

故选：D

10. C

【分析】先得出公共部分为四棱锥 $J-B_1FOE$ ，然后结合棱锥的体积公式直接计算即可求解。

【详解】



如图所示，设 HF, GE 交于点 O ，由题意三棱柱 B_1FJ-A_1HI 与三棱柱 B_1EJ-C_1GK 在正方体

内部的公共部分为四棱锥 $J-B_1FOE$ ，

显然四棱锥 $J-B_1FOE$ 的高为 $JB_1=1$ ，底面是边长为 1 的正方形，

故所求体积为 $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3}$ 。

故选：C.

11. 2

【分析】根据 \vec{a} 与 \vec{b} 垂直，数量积求解参数 x 的值。

【详解】由 $\vec{a} = (x+1, 2), \vec{b} = (2, -3)$ ，若 \vec{a} 与 \vec{b} 垂直，则 $2(x+1) - 2 \times 3 = 0$ ，解得 $x = 2$ 。

故答案为：2.

12. $3i$ （答案不唯一）

【分析】由复数概念和复数的模即可求解。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/927054051021006133>