河南省信阳市固始县高级中学2023-2024学年高一下学期期末教学质量检测数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．复数$z=\dfrac{1+2\mathrm{i}^3}{1-\mathrm{i}}$（$\mathrm{i}$为虚数单位）在复平面内对应的点位于（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

2．已知α，β是平面，m，n是直线，下列命题中不正确的是（　　）

A．若$m//\alpha$，$\alpha\cap\beta=n$，则$m//n$

B．若$m//n$，$m\perp\alpha$，则$n\perp\alpha$

C．若$m\perp\alpha$，$m\perp\beta$，则$\alpha//\beta$

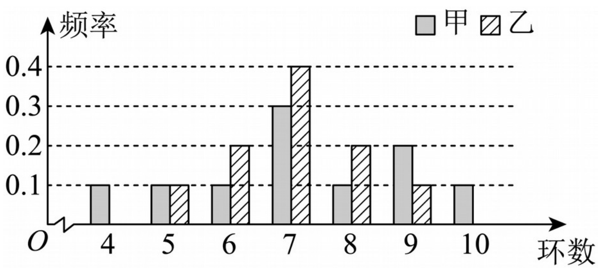
D．若$m\perp\alpha$，$m\subset\beta$，则$\alpha\perp\beta$

3．已知向量$\vec{m}=(2,\lambda)$，$\vec{n}=(2-\lambda,-4)$，若$\vec{m}$与$\vec{n}$共线且反向，则实数λ的值为（　　）

A．4　　B．2　　C．-2　　D．-2或4

4．甲、乙两名运动员在一次射击训练中各射靶20次，命中环数的频率分布条形图如下．

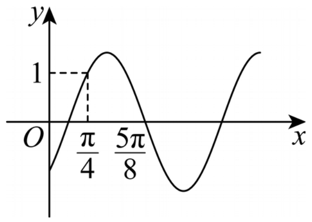
设甲、乙命中环数的众数分别为$Z_{甲}$，$Z_{乙}$，方差分别为$s_{甲}^2$，$s_{乙}^2$，则（　）



A．$Z_{甲乙}=Z$，$s_{甲}^2>s_{乙}^2$　　B．$Z_{甲乙}=Z$，$s_{甲乙}^2<s^2$

C． $Z_{甲乙}\geq Z$ ， $s_{甲}^2>s_{乙}^2$　　　　D． $Z_{甲乙}\leq Z$ ， $s_{甲}^2>s_{乙}^2$

5．已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，若将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\theta(\theta>0)$ 个单位后所得曲线关于 y 轴对称，则 θ 的最小值为（　）



A． $\frac{\pi}{8}$　　B． $\frac{\pi}{4}$　　C． $\frac{3\pi}{8}$　　D． $\frac{\pi}{2}$

6．已知 α ， $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$， $3\cos\left(\alpha+\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta$ ，则 $\tan\left(\alpha+\beta\right)$ 的最小值是（　）

A． $2\sqrt{3}$　　B． $2\sqrt{5}$　　C． $2\sqrt{6}$　　D． $2\sqrt{7}$

7．已知正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $\frac{52}{3}$， $AB=6$， $A_1B_1=2$ ，则 A_1A 与平面 ABC 所成角的正切值为（　）

A． $\frac{1}{2}$　　B．1　　C．2　　D．3

8．已知边长为2的菱形 $ABCD$ 中，点 F 为 BD 上一动点，点 E 满足 $\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{EC}$，

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=-\frac{1}{2}$，则 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE}$ 的最大值为（　）

A．0　　B． $\frac{2}{3}$　　C． $\frac{4}{3}$　　D．3

二、多选题

9．一个平面截正方体所得的截面图形可以是（　　）

A．等边三角形　B．正方形　C．梯形　D．正五边形

10．若 $b>c>1$，$0<a<1$，则下列结论正确的是（　　）

A．$b^a<c^a$　B．$\log_b a>\log_c a$

C．$cb^a<bc^a$　D．$b\log_c a>c\log_b a$

11．在锐角 $\triangle ABC$ 中，设 a，b，c 分别表示角 A，B，C 对边，$a=1$，$b\cos A-\cos B=1$，则下列选项正确的有（　　）

A．$B=2A$

B．b 的取值范围是 $\left(\sqrt{2},2\right)$

C．当 $b=\frac{3}{2}$ 时 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$

D．若当 A,B 变化时，$\sin B-2\lambda\sin^2 A$ 存在最大值，则正数 λ 的取值范围为 $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

三、填空题

12．若函数 $y=\tan\omega x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上为严格增函数，则实数 ω 的取值范围是____.

13．已知函数 $f\left(x\right)$ 是偶函数，对任意 $x\in\mathbf{R}$，均有 $f\left(x\right)=f\left(x+2\right)$，当 $x\in\left[0,1\right]$ 时，$f\left(x\right)=1-x$，则函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-\log_5\left(x+1\right)$ 的零点有______个.

14．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长均为2．以 A_1D_1 中点为球心，$\sqrt{6}$ 为半径的球面与

侧面B_1BCC_1的交线长为________.

四、解答题

15．已知$\left|\vec{a}\right|=4,\left|\vec{b}\right|=3,\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)=13$.

(1)求$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角；

(2)若$\vec{a}$在$\vec{b}$方向上的投影向量为$\vec{c}$，求$\vec{c}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$的值.

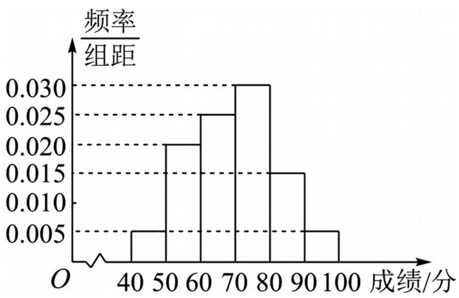
16．在$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别为$a,b,c,\triangle ABC$的面积为S，已知$c=2$，且

$a^2+b^2=4\sqrt{3}S+4$.

(1)求C；

(2)求$\sqrt{3}b-a$的取值范围.

17．为迎接冬季长跑比赛，重庆八中对全体高二学生举行了一次关于冬季长跑相关知识的测试，统计人员从高二学生中随机抽取100名学生的成绩作为样本进行统计，测试满分为100分，统计后发现所有学生的测试成绩都在区间$[40,100]$内，并制成如图所示的频率分布直方图.



(1)估计这100名学生的平均成绩；

(2)若在区间$[70,80)$内的学生测试成绩的平均数和方差为74和26，在区间$[80,100]$内的学

生测试成绩的平均数和方差为 89 和 106，据此估计在$[70,100]$内的所有学生测试成绩的平均数和方差．

18．已知函数$f(x)=\left(2\cos^2 x-1\right)\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 4x$，求：

（1）$f(x)$的最小正周期及最大值；

（2）若$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$且$f(\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，求$\alpha$的值；

（3）若$f(x)-2m+1=0$，在$x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$有两个不等的实数根，求$m$的取值范围.

19．在直角梯形$ABCD$中，$AD /\!/ BC, BC=2AD=2AB=2\sqrt{2}$，$\angle ABC=90^\circ$（如图 1），把$\triangle ABD$沿$BD$翻折，使得$A\notin$平面$BCD$，连接$AC$，$M$，$N$分别是$BD$和$BC$中点（如图 2）．

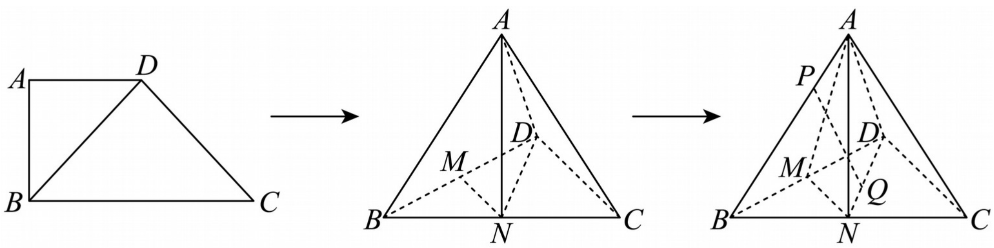


图1　　图2　　图3

(1)证明：平面$BCD\perp$平面AMN;

(2)记二面角A—BC—D的平面角为θ，当平面$BCD\perp$平面ABD时，求$\tan\theta$的值；

(3)若P、Q分别为线段AB与DN上一点，使得$\frac{AP}{PB}=\frac{NQ}{QD}=\lambda(\lambda\in\mathrm{R})$（如图 3），令$PQ$与$BD$和$AN$所成的角分别为$\theta_1$和$\theta_2$，求$\sin\theta_1+\sin\theta_2$的取值范围.

参考答案：

1．D

【分析】对复数进行分母实数化，根据复数的几何意义可得结果.

【详解】$\because z=\frac{1+2\mathrm{i}^3}{1-\mathrm{i}}=\frac{1-2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(1-2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{3-\mathrm{i}}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$，

$\therefore$复数z在复平面内对应的点的坐标是$\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$，位于第四象限.

故选：D

2．A

【分析】根据空间中线面、面面的位置关系一一判断即可.

【详解】对于A：若$m//\alpha$，$\alpha\cap\beta=n$，则$m//n$或m与n异面，故A错误；

对于B：两条平行线中的一条垂直于一个平面，则另一条也垂直于这个平面，

故若$m//n$，$m\perp\alpha$，则$n\perp\alpha$，故B正确；

对于C：垂直于同一条直线的两个平面互相平行，

故若$m\perp\alpha$，$m\perp\beta$，则$\alpha//\beta$，故C正确；

对于D：根据面面垂直的判断定理可知，若$m\perp\alpha$，$m\subset\beta$，则$\alpha\perp\beta$，故D正确；

故选：A

3．A

【分析】利用向量共线的坐标表示求出λ，再结合反向共线即可得解.

【详解】由向量$\vec{m}=(2,\lambda)$，$\vec{n}=(2-\lambda,-4)$共线，得$\lambda(2-\lambda)=-8$，解得$\lambda=-2$或$\lambda=4$，

当$\lambda=-2$时，$\vec{m}=(2,-2)$，$\vec{n}=(4,-4)$，$\vec{m}$与$\vec{n}$同向，不符合题意，

当$\lambda=4$时，$\vec{m}=(2,4)$，$\vec{n}=(-2,-4)$，$\vec{m}$与$\vec{n}$反向，符合题意，

所以实数λ的值为4.

故选：A

4．A

【分析】观察给定的图表，利用众数的意义运动员命中环数的集中与分散程度判断即可.

【详解】根据图表知，甲、乙命中环数的众数均为7环，则$Z_{甲}=Z_{乙}$；

甲运动员命中的环数比较分散，乙运动员命中的环数比较集中，则$s_{甲}^2>s_{乙}^2$.

故选：A

5．A

【分析】根据给定的图象特征，结合五点法作图列式求出ω和φ，再根据图象的平移变换，以及图象的对称性即可得解.

【详解】由$f(\frac{\pi}{4})=1$，得$\sin(\frac{\pi}{4}\omega+\varphi)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又点$(\frac{\pi}{4},1)$及附近点从左到右是上升的，则

$\frac{\pi}{4}\omega+\varphi=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in Z$，

由$f(\frac{5\pi}{8})=0$，点$(\frac{5\pi}{8},0)$及附近点从左到右是下降的，且上升、下降的两段图象相邻，得

$\frac{5\pi}{8}\omega+\varphi=\pi+2k\pi,\ k\in Z$，

联立解得$\omega=2$，$\varphi=-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in Z$，而$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，于是$\varphi=-\frac{\pi}{4}$，$f(x)=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$，

若将函数$f(x)$的图像向右平移$\theta(\theta>0)$个单位后，得到$y=\sin(2x-2\theta-\frac{\pi}{4})$，

则$-2\theta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}-k\pi,\ k\in Z$，而$\theta>0$，因此$\theta=-\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in N$，

所以当$k=1$时，θ取得最小值为$\frac{\pi}{8}$.

故选：A

6．C

【分析】由两角和的余弦展开式化简可得$\tan\alpha\tan\beta$的值，再由两角和的正切展开式、基本不等式可得答案.

【详解】由$3\cos\left(\alpha+\beta\right)=3\cos\alpha\cos\beta-3\sin\alpha\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta$，

得$2\cos\alpha\cos\beta=3\sin\alpha\sin\beta$，

因为α，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以$\tan\alpha\tan\beta=\frac{2}{3}$，且$\tan\alpha>0,\tan\beta>0$，

$\tan\left(\alpha+\beta\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=3\left(\tan\alpha+\tan\beta\right)\geq3\cdot2\sqrt{\tan\alpha\tan\beta}=2\sqrt{6}$，

当且仅当$\tan\alpha=\tan\beta=\frac{\sqrt{6}}{3}$取等号.

故选：C.

7．B

【分析】解法一：根据台体的体积公式可得三棱台的高$h=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，做辅助线，结合正三棱台的结构特征求得$AM=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，进而根据线面夹角的定义分析求解；解法二：将正三棱台$ABC-A_1B_1C_1$补成正三棱锥$P-ABC$，A_1A与平面ABC所成角即为PA与平面ABC所成角，根据比例关系可得$V_{P-ABC}=18$，进而可求正三棱锥$P-ABC$的高，即可得结果.

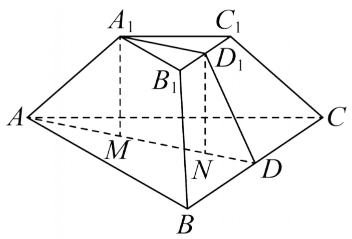
【详解】解法一：分别取BC,B_1C_1的中点D,D_1，则$AD=3\sqrt{3},A_1D_1=\sqrt{3}$，

可知$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 6\times 6\times \frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3},S_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}\times 2\times \sqrt{3}=\sqrt{3}$，

设正三棱台$ABC-A_1B_1C_1$的为h，

则$V_{ABC-A_1B_1C_1}=\frac{1}{3}\left(9\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{9\sqrt{3}\times\sqrt{3}}\right)h=\frac{52}{3}$，解得$h=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

如图，分别过A_1,D_1作底面垂线，垂足为M,N，设$AM=x$，



则$AA_1=\sqrt{AM^2+A_1M^2}=\sqrt{x^2+\frac{16}{3}}$，$DN=AD-AM-MN=2\sqrt{3}-x$，

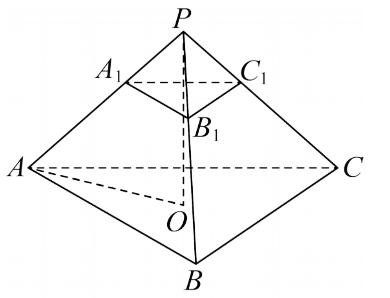
可得$DD_1=\sqrt{DN^2+D_1N^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}-x\right)^2+\frac{16}{3}}$，

结合等腰梯形BCC_1B_1可得$BB_1^2=\left(\frac{6-2}{2}\right)^2+DD_1^2$，

即$x^2+\frac{16}{3}=\left(2\sqrt{3}-x\right)^2+\frac{16}{3}+4$，解得$x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

所以A_1A与平面ABC所成角的正切值为$\tan\angle A_1AD=\frac{A_1M}{AM}=1$；

解法二：将正三棱台$ABC-A_1B_1C_1$补成正三棱锥$P-ABC$，



则 A_1A 与平面 ABC 所成角即为 PA 与平面 ABC 所成角，

因为 $\frac{PA_1}{PA}=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{1}{3}$，则 $\frac{V_{P-A_1B_1C_1}}{V_{P-ABC}}=\frac{1}{27}$，

可知 $V_{ABC-A_1B_1C_1}=\frac{26}{27}V_{P-ABC}=\frac{52}{3}$，则 $V_{P-ABC}=18$，

设正三棱锥 $P-ABC$ 的高为 d，则 $V_{P-ABC}=\frac{1}{3}d\times\frac{1}{2}\times 6\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=18$，解得 $d=2\sqrt{3}$，

取底面 ABC 的中心为 O，则 $PO\perp$ 底面 ABC，且 $AO=2\sqrt{3}$，

所以 PA 与平面 ABC 所成角的正切值 $\tan\angle PAO=\frac{PO}{AO}=1$.

故选：B.

8．D

【分析】设 $\angle DAB=\theta$，求得 $\cos\theta=\frac{1}{2}$，得到 $\theta=\frac{\pi}{3}$，以 AC 与 BD 交点 O 为原点，建立平

面直角坐标系，设 $F(0,t)$，求得 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE}=\frac{9}{4}+\frac{3}{4}t$，进而求得 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE}$ 的最大值为.

【详解】由 $\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{EC}$，可得 $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$，

设$\angle DAB=\theta$，

可得$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}^2+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=\frac{1}{4}\times 2\times 2\cos\theta-4+\frac{3}{4}\cdot 4=\cos\theta-1=-\frac{1}{2}$，所以$\cos\theta=\frac{1}{2}$，

因为$\theta\in[0,\pi]$，所以$\theta=\frac{\pi}{3}$，

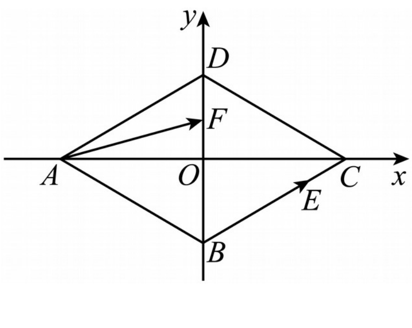
以AC与BD交点O为原点，以AC,BD所在的直线分别为x轴和y轴建立平面直角坐标系，

如图所示，则$A\left(-\sqrt{3},0\right)$，$E\left(\frac{3\sqrt{3}}{4},-\frac{1}{4}\right)$，$B\left(0,-1\right)$，

设$F\left(0,t\right)$，且$-1\le t\le 1$，则$\overrightarrow{AF}=\left(\sqrt{3},t\right)$，$\overrightarrow{BE}=\left(\frac{3\sqrt{3}}{4},\frac{3}{4}\right)$，$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE}=\frac{9}{4}+\frac{3}{4}t$，

当$t=1$时，$\left(\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE}\right)_{\max}=\frac{9}{4}+\frac{3}{4}=3$.

故选：D.



9．ABC

【分析】结合截面图形的性质逐项判断即可.

【详解】对于A，截面是正三角形，如图甲所示，故A正确；

对于B，截面可能是正方形，如图乙所示，故B正确；