

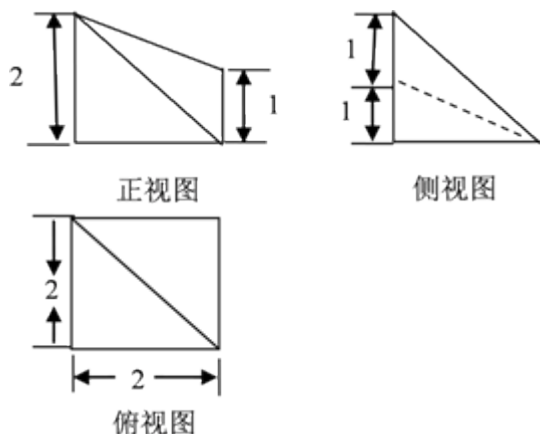
2023-2024 学年安徽省亳州市第三十二中学高三第二次联考数学试卷

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知某几何体的三视图如右图所示，则该几何体的体积为（ ）



- A. 3 B. $\frac{10}{3}$ C. $\frac{11}{3}$ D. $\frac{8}{3}$

2. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，过 F_1 的直线交椭圆于 A, B 两点，交 y 轴于点 M ，

若 F_1, M 是线段 AB 的三等分点，则椭圆的离心率为（ ）

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^3 + x^2, & x < 1 \\ \frac{a \ln x}{x(x+1)}, & x \geq 1 \end{cases}$ ，若曲线 $y = f(x)$ 上始终存在两点 A, B ，使得 $OA \perp OB$ ，且 AB 的中点在 y

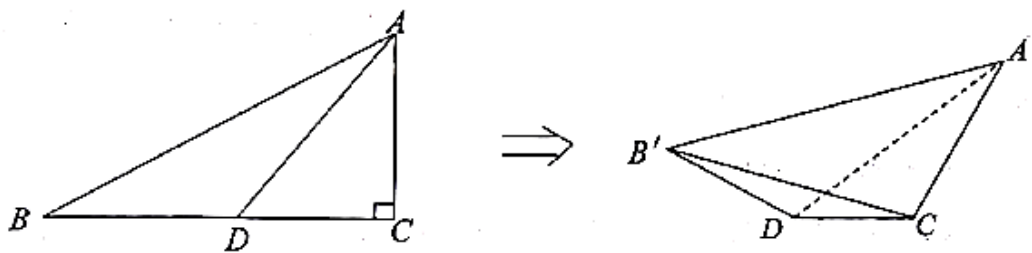
轴上，则正实数 a 的取值范围为（ ）

- A. $(0, +\infty)$ B. $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ C. $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ D. $[e, +\infty)$

4. 设正项等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且满足 $S_6 - 2S_3 = 2$ ，则 $\frac{3a_8^2}{a_2}$ 的最小值为

- A. 8 B. 16 C. 24 D. 36

5. 如图， $\triangle ABC$ 中 $\angle A = 2\angle B = 60^\circ$ ，点 D 在 BC 上， $\angle BAD = 30^\circ$ ，将 $\triangle ABD$ 沿 AD 旋转得到三棱锥 $B' - ADC$ ，分别记 $B'A, B'D$ 与平面 ADC 所成角为 α, β ，则 α, β 的大小关系是（ ）

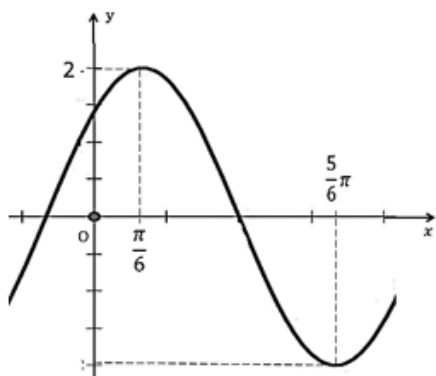


A. $\alpha < \beta \leq 2\alpha$

B. $2\alpha \leq \beta \leq 3\alpha$

C. $\beta \leq 2\alpha$, $2\alpha < \beta \leq 3\alpha$ 两种情况都存在 D. 存在某一位置使得 $\beta > 3\alpha$

6. 已知 $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}, x \in \mathbb{R}$) 的部分图象如图所示, 则 $f(x)$ 的表达式是 ()



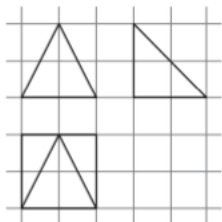
A. $2 \cos\left(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$

B. $2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

C. $2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

D. $2 \cos\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$

7. 如图所示, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗线画出的是某几何体的三视图, 则该几何体的体积是 ()



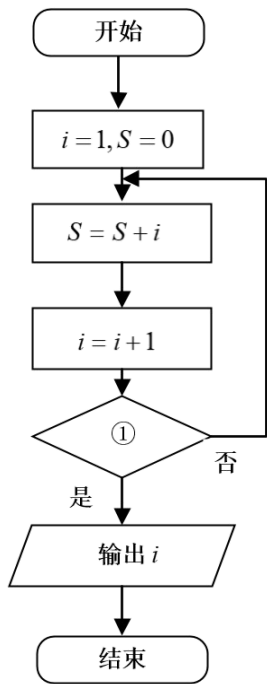
A. $\frac{8}{3}$

B. $\frac{16}{3}$

C. $\frac{4}{3}$

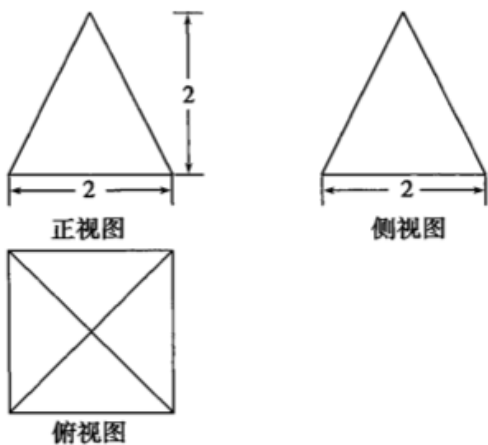
D. 8

8. 执行如图所示的程序框图, 若输出的值为 8, 则框图中①处可以填 ().



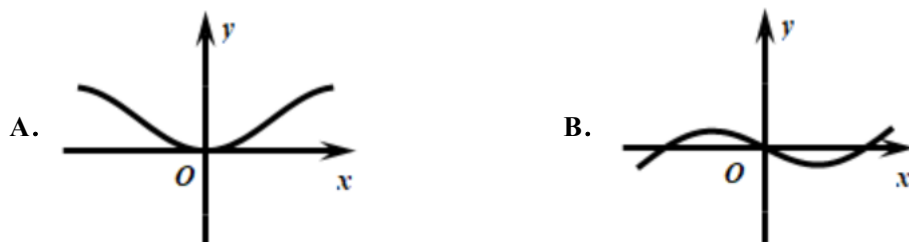
- A. $S \geq 7?$ B. $S \geq 21?$ C. $S \geq 28?$ D. $S \geq 36?$

9. 某几何体的三视图如图所示（单位： cm ），则该几何体的表面积是()

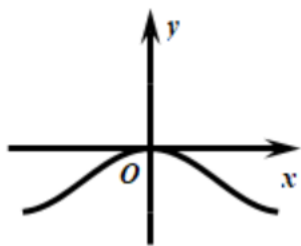


- A. $8cm^2$ B. $12cm^2$ C. $(4\sqrt{5}+2)cm^2$ D. $(4\sqrt{5}+4)cm^2$

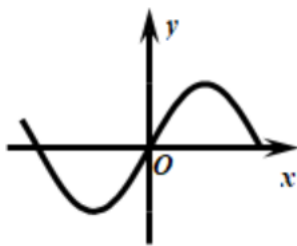
10. 函数 $f(x) = \left(\frac{2}{1+e^x} - 1\right) \cos x$ 图象的大致形状是 ()



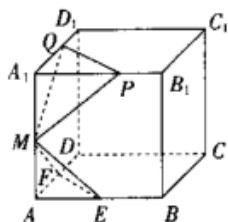
C.



D.



11. 在棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 、 F 、 M 分别是 AB 、 AD 、 AA_1 的中点, 又 P 、 Q 分别在线段 A_1B_1 、 A_1D_1 上, 且 $A_1P = A_1Q = m (0 < m < a)$, 设平面 $MEF \cap$ 平面 $MPQ = l$, 则下列结论中不成立的是 ()

A. $l \parallel$ 平面 BDD_1B_1 B. $l \perp MC$ C. 当 $m = \frac{a}{2}$ 时, 平面 $MPQ \perp MEF$ D. 当 m 变化时, 直线 l 的位置不变

12. 在菱形 $ABCD$ 中, $AC = 4$, $BD = 2$, E , F 分别为 AB , BC 的中点, 则 $\vec{DE} \cdot \vec{DF} =$ ()

A. $-\frac{13}{4}$ B. $\frac{5}{4}$

C. 5

D. $\frac{15}{4}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. (5 分) 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知棱长 $AB = 1$, 体对角线 $A_1C = \sqrt{6}$, 两异面直线 C_1D 与 A_1A 所成的角为 45° , 则该长方体的表面积是_____.

14. 若函数 $f(x) = 2^{|x-2a|} - 4^{|x+a|}$ 在区间 $(-2, +\infty)$ 上有且仅有一个零点, 则实数 a 的取值范围有_____.

15. 函数 $f(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 4) + x - 1$ 的值域为_____.

16. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_2 S_8 = 2 S_3 S_6$, $S_5 = -62$, 则 a_1 的值是_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) a , b , c 分别为 $\triangle ABC$ 内角 A , B , C 的对边. 已知 $a = 3$, $c \sin C = a \sin A + b \sin B$, 且 $B = 60^\circ$.

(1) 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) 若 D , E 是 BC 边上的三等分点, 求 $\sin \angle DAE$.

18. (12 分) 已知 2 件次品和 3 件正品混放在一起, 现需要通过检测将其区分, 每次随机检测一件产品, 检测后不放回, 直到检测出 2 件次品或者检测出 3 件正品时检测结束.

(1) 求第一次检测出的是次品且第二次检测出的是正品的概率;

(2) 已知每检测一件产品需要费用 100 元, 设 X 表示直到检测出 2 件次品或者检测出 3

件正品时所需要的检测费用（单位：元），求 X 的分布列.

19. (12 分) 某工厂为提高生产效率，需引进一条新的生产线投入生产，现有两条生产线可供选择，生产线①：有 A ， B 两道独立运行的生产工序，且两道工序出现故障的概率依次是 0.02，0.03. 若两道工序都没有出现故障，则生产成本为 15 万元；若 A 工序出现故障，则生产成本增加 2 万元；若 B 工序出现故障，则生产成本增加 3 万元；若 A ， B 两道工序都出现故障，则生产成本增加 5 万元. 生产线②：有 a ， b 两道独立运行的生产工序，且两道工序出现故障的概率依次是 0.04，0.01. 若两道工序都没有出现故障，则生产成本为 14 万元；若 a 工序出现故障，则生产成本增加 8 万元；若 b 工序出现故障，则生产成本增加 5 万元；若 a ， b 两道工序都出现故障，则生产成本增加 13 万元.

(1) 若选择生产线①，求生产成本恰好为 18 万元的概率；

(2) 为最大限度节约生产成本，你会给工厂建议选择哪条生产线？请说明理由.

20. (12 分) 设数阵 $A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ，其中 a_{11} 、 a_{12} 、 a_{21} 、 $a_{22} \in \{1, 2, \dots, 6\}$. 设 $S = \{e_1, e_2, \dots, e_l\} \subseteq \{1, 2, \dots, 6\}$ ，

其中 $e_1 < e_2 < \dots < e_l$ ， $l \in \mathbb{N}^*$ 且 $l \leq 6$. 定义变换 φ_k 为“对于数阵的每一行，若其中有 k 或 $-k$ ，则将这一行中每个数都乘以 -1 ；若其中没有 k 且没有 $-k$ ，则这一行中所有数均保持不变” ($k = e_1, e_2, \dots, e_l$). $\varphi_S(A_0)$ 表示“将 A_0 经过 φ_{e_1} 变换得到 A_1 ，再将 A_1 经过 φ_{e_2} 变换得到 A_2 ， $\dots$ ，以此类推，最后将 A_{l-1} 经过 φ_{e_l} 变换得到 A_l ”，记数阵 A_l 中四个数的和为 $T_S(A_0)$.

(1) 若 $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ ，写出 A_0 经过 φ_2 变换后得到的数阵 A_1 ；

(2) 若 $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ ， $S = \{1, 3\}$ ，求 $T_S(A_0)$ 的值；

(3) 对任意确定的一个数阵 A_0 ，证明： $T_S(A_0)$ 的所有可能取值的和不超过 -4 .

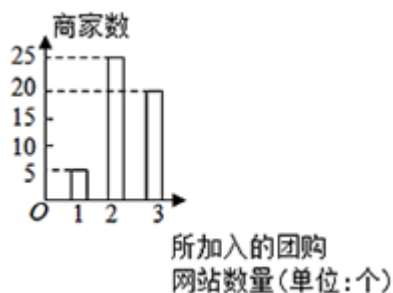
21. (12 分) 设函数 $f(x) = |x+2| - |2x-2|$.

(1) 解不等式 $f(x) \geq 2x-1$ ；

(2) 记 $f(x)$ 的最大值为 M ，若实数 a 、 b 、 c 满足 $a+b+c=M$ ，求证：

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} \geq 3\sqrt{2}.$$

22. (10 分) 团购已成为时下商家和顾客均非常青睐的一种省钱、高校的消费方式，不少商家同时加入多家团购网. 现恰有三个团购网站在 A 市开展了团购业务， A 市某调查公司为调查这三家团购网站在本市的开展情况，从本市已加入了团购网站的商家中随机地抽取了 50 家进行调查，他们加入这三家团购网站的情况如下图所示.



- (1) 从所调查的 50 家商家中任选两家，求他们加入团购网站的数量不相等的概率；
- (2) 从所调查的 50 家商家中任取两家，用 ξ 表示这两家商家参加的团购网站数量之差的绝对值，求随机变量 ξ 的分布列和数学期望；
- (3) 将频率视为概率，现从 A 市随机抽取 3 家已加入团购网站的商家，记其中恰好加入了两个团购网站的商家数为 η ，试求事件“ $\eta \geq 2$ ”的概率。

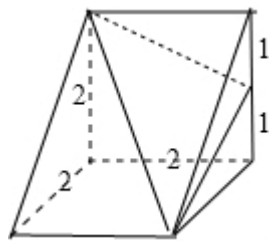
参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

由三视图知：几何体是直三棱柱消去一个三棱锥，如图：



直三棱柱的体积为 $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 = 4$ ，消去的三棱锥的体积为 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times 2 = \frac{2}{3}$ ，

$\therefore$ 几何体的体积 $V = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$ ，故选 B.

点睛：本题考查了由三视图求几何体的体积，根据三视图判断几何体的形状及相关几何量的数据是解答此类问题的关键；几何体是直三棱柱消去一个三棱锥，结合直观图分别求出直三棱柱的体积和消去的三棱锥的体积，相减可得几何体的体积。

2、D

【解析】

根据题意，求得 A, M, B 的坐标，根据点在椭圆上，点的坐标满足椭圆方程，即可求得结果.

【详解】

由已知可知， M 点为 AF_1 中点， F_1 为 BM 中点，

故可得 $x_{F_1} + x_A = 2x_M = 0$ ，故可得 $x_A = c$ ；

代入椭圆方程可得 $\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，解得 $y = \pm \frac{b^2}{a}$ ，不妨取 $y_A = \frac{b^2}{a}$ ，

故可得 A 点的坐标为 $\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$ ，

则 $M\left(0, \frac{b^2}{2a}\right)$ ，易知 B 点坐标 $\left(-2c, -\frac{b^2}{2a}\right)$ ，

将 B 点坐标代入椭圆方程得 $a^2 = 5c^2$ ，所以离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ，

故选：D.

【点睛】

本题考查椭圆离心率的求解，难点在于根据题意求得 A, B, M 点的坐标，属中档题.

3、D

【解析】

根据 AB 中点在 y 轴上，设出 A, B 两点的坐标 $A(-t, t^3 + t^2)$ ， $B(t, f(t))$ ，($t > 0$) .对 t 分成 $t < 1, t = 1, t > 1$ 三类，利用

$OA \perp OB$ 则 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$ ，列方程，化简后求得 $a = \frac{t}{\ln t}$ ，利用导数求得 $\frac{t}{\ln t}$ 的值域，由此求得 a 的取值范围.

【详解】

根据条件可知 A, B 两点的横坐标互为相反数，不妨设 $A(-t, t^3 + t^2)$ ， $B(t, f(t))$ ，($t > 0$)，若 $t < 1$ ，则

$f(t) = -t^3 + t^2$ ，由 $OA \perp OB$ ，所以 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$ ，即 $-t^2 + (t^3 + t^2)(-t^3 + t^2) = 0$ ，方程无解，若 $t = 1$ ，显然不满足

$OA \perp OB$ ；若 $t > 1$ ，则 $f(t) = \frac{a \ln t}{t(t+1)}$ ，由 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$ ，即 $-t^2 + (t^3 + t^2) \frac{a \ln t}{t(t+1)} = 0$ ，即 $a = \frac{t}{\ln t}$ ，因为

$\left(\frac{t}{\ln t}\right)' = \frac{\ln t - 1}{(\ln t)^2}$ ，所以函数 $\frac{t}{\ln t}$ 在 $(0, e)$ 上递减，在 $(e, +\infty)$ 上递增，故在 $t = e$ 处取得极小值也即是最小值 $\frac{e}{\ln e} = e$ ，

所以函数 $y = \frac{t}{\ln t}$ 在 $(1, +\infty)$ 上的值域为 $[e, +\infty)$ ，故 $a \in [e, +\infty)$. 故选 D.

【点睛】

本小题主要考查平面平面向量数量积为零的坐标表示，考查化归与转化的数学思想方法，考查利用导数研究函数的最小值，考查分析与运算能力，属于较难的题目。

4、B

【解析】

方法一：由题意得 $S_6 - 2S_3 = (S_6 - S_3) - S_3 = 2$ ，根据等差数列的性质，得 $S_9 - S_6, S_6 - S_3, S_3$ 成等差数列，设

$S_3 = x (x > 0)$ ，则 $S_6 - S_3 = x + 2$ ， $S_9 - S_6 = x + 4$ ，则

$$\frac{3a_8^2}{a_2} = \frac{(3a_8)^2}{3a_2} = \frac{(a_7 + a_8 + a_9)^2}{a_1 + a_2 + a_3} = \frac{(S_9 - S_6)^2}{S_3} = \frac{(x+4)^2}{x} = x + \frac{16}{x} + 8 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{16}{x}} + 8 = 16, \text{ 当且仅当 } x = 4 \text{ 时等号成立, 从而 } \frac{3a_8^2}{a_2}$$

的最小值为 16，故选 B。

方法二：设正项等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，由等差数列的前 n 项和公式及 $S_6 - 2S_3 = 2$ ，化简可得

$$6a_1 + \frac{6 \times 5}{2}d - 2(3a_1 + \frac{3 \times 2}{2}d) = 2, \text{ 即 } d = \frac{2}{9}, \text{ 则 } \frac{3a_8^2}{a_2} = \frac{3(a_2 + 6d)^2}{a_2} = \frac{3(a_2 + \frac{4}{3})^2}{a_2} = 3a_2 + \frac{16}{3a_2} + 8 \geq 2\sqrt{3a_2 \cdot \frac{16}{3a_2}} + 8 = 16, \text{ 当且}$$

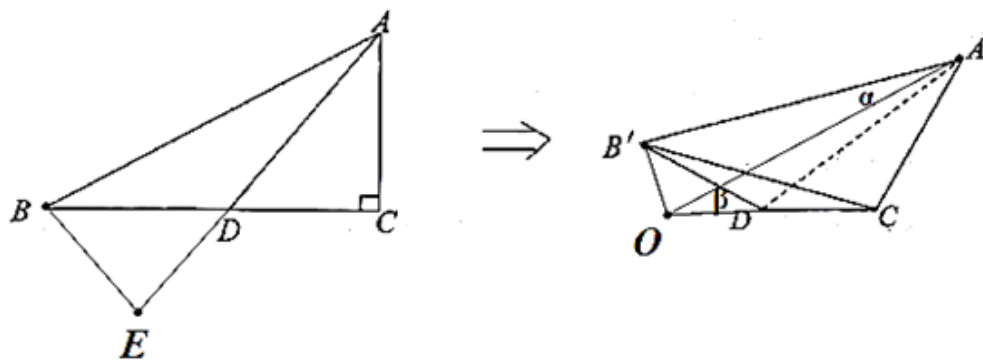
仅当 $3a_2 = \frac{16}{3a_2}$ ，即 $a_2 = \frac{4}{3}$ 时等号成立，从而 $\frac{3a_8^2}{a_2}$ 的最小值为 16，故选 B。

5、A

【解析】

根据题意作出垂线段，表示出所求得 α 、 β 角，分别表示出其正弦值进行比较大小，从而判断出角的大小，即可得答案。

【详解】



由题可得过点 B 作 $BE \perp AD$ 交 AD 于点 E ，过 B' 作 CD 的垂线，垂足为 O ，则易得 $\alpha = \angle B'AO$ ， $\beta = \angle B'DO$ 。

设 $CD = 1$ ，则有 $BD = AD = 2$ ， $DE = 1$ ， $BE = \sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 可得 $AB' = AB = 2\sqrt{3}$ ， $B'D = BD = 2$ 。

$$\text{Q } \sin \alpha = \frac{OB'}{AB'}, \sin \beta = \frac{OB'}{DB'},$$

$$\therefore \sin \beta = \sqrt{3} \sin \alpha > \sin \alpha, \therefore \beta > \alpha;$$

$$\text{Q } OB' \in [0, \sqrt{3}], \therefore \sin \alpha \in [0, \frac{1}{2}];$$

$$\text{Q } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha},$$

$$2\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \in [\sqrt{3}, 2], \therefore \sin 2\alpha \dots \sqrt{3} \sin \alpha = \sin \beta,$$

$$\therefore 2\alpha \dots \beta.$$

综上可得, $\alpha < \beta, 2\alpha$.

故选: A.

【点睛】

本题考查空间直线与平面所成的角的大小关系, 考查三角函数的图象和性质, 意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

6、D

【解析】

由图象求出 A 以及函数 $y = f(x)$ 的最小正周期 T 的值, 利用周期公式可求得 ω 的值, 然后将点 $(\frac{\pi}{6}, 2)$ 的坐标代入函数 $y = f(x)$ 的解析式, 结合 φ 的取值范围求出 φ 的值, 由此可得出函数 $y = f(x)$ 的解析式.

【详解】

$$\text{由图象可得 } A = 2, \text{ 函数 } y = f(x) \text{ 的最小正周期为 } T = 2 \times \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{4\pi}{3}, \therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{将点 } \left(\frac{\pi}{6}, 2 \right) \text{ 代入函数 } y = f(x) \text{ 的解析式得 } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos\left(\frac{3}{2} \times \frac{\pi}{6} + \varphi\right) = 2, \text{ 得 } \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

$$\text{Q } -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \therefore -\frac{\pi}{4} < \varphi + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}, \text{ 则 } \varphi + \frac{\pi}{4} = 0, \therefore \varphi = -\frac{\pi}{4},$$

$$\text{因此, } f(x) = 2 \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

故选: D.

【点睛】

本题考查利用图象求三角函数解析式, 考查分析问题和解决问题的能力, 属于中等题.

7、A

【解析】

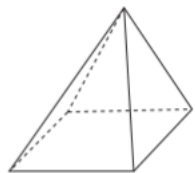
由三视图还原出原几何体，得出几何体的结构特征，然后计算体积.

【详解】

由三视图知原几何体是一个四棱锥，四棱锥底面是边长为 2 的正方形，高为 2，

直观图如图所示， $V = \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times 2 = \frac{8}{3}$.

故选：A.



【点睛】

本题考查三视图，考查棱锥的体积公式，掌握基本几何体的三视图是解题关键.

8、C

【解析】

根据程序框图写出几次循环的结果，直到输出结果是 8 时.

【详解】

第一次循环： $S = 0, i = 1$

第二次循环： $S = 1, i = 2$

第三次循环： $S = 3, i = 3$

第四次循环： $S = 6, i = 4$

第五次循环： $S = 10, i = 5$

第六次循环： $S = 15, i = 6$

第七次循环： $S = 21, i = 7$

第八次循环： $S = 28, i = 8$

所以框图中①处填 $S \geq 28?$ 时，满足输出的值为 8.

故选：C

【点睛】

此题考查算法程序框图，根据循环条件依次写出每次循环结果即可解决，属于简单题目.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/927115054164006063>