MATLAB 在复变函数中的应用

摘要 MATLAB 是一种跨平台的数学语言，是在工程应用中被广泛用作数值计算和仿真的有力工具，MATLAB 有着强大的数学能力，并且靠矩阵作为基本运算元素，并且在对复杂数学问题求解上，MATLAB 有着良好的快速性和准确性，并且能对大量的数据运算结果进行可视化处理，目前成为了各个学校在教学和科研项目中不可或缺的工具。而对于理工学科所必备的课程，复变函数由于其不具有简单的现实性与空间性，在学习过程中学生较难理解，所以，如果将 MATLAB 的数学建模与结果可视化引入到复变函数的计算与演练中，对学生理解整个计算流程，建立对该数学学科的深刻理解是十分有帮助的，并且能够减轻任课老师的教学难度，增强学生的理解性。

关键词 复变函数 MATLAB 可视化

Application of Matlab in complex variable function

AbstractMATLAB is a cross-platform mathematical language, which is widely used as a powerful tool for numerical calculation and simulation in engineering applications. MATLAB has strong mathematical capabilities, and relies on matrices as basic computing elements, and is used to solve complex mathematical problems , MATLAB has good speed and accuracy, and can visually process a large number of data calculation results. It has become an indispensable tool in teaching and scientific research projects of various schools. As for the necessary courses in science and engineering, complex variable functions are difficult to understand during the learning process because of their lack of simple reality and spatiality. Therefore, if the mathematical modeling and result visualization of MATLAB are introduced into complex variable functions In the calculations and drills, it is very helpful for students to understand the entire calculation process and establish a deep understanding of the mathematics discipline. It can also reduce the difficulty of teaching by the teacher and enhance the students' understanding.

Key words Matlab complex analysis Visualization

目　　录

1. 引　言

复变函数理论诞生于 18 世纪，欧拉（Euler），达兰伯特（Dalambert），拉普拉斯（Laplace）等人是该领域的奠基人，并在 19 世纪，通过著名的考西（Cauchy），黎曼（Riemann），威尔斯特拉斯（Wilstras）学者，新的数学分支变量的复数函数理论是 19 世纪最好的。它是最丰富的数学分支之一，被认为是抽象科学中最和谐的理论之一。20 世纪初，该理论进一步发展，使得复变函数融入到越来越多的工程问题中，变量的多样性也和实际问题与工程问题中复杂的环境相符合。

Mathworks 公司推出的 MATLAB 数学软件，被广泛用于商业计算，该软件可以开发新型算法，对数据进行分类整理并且可以绘制数据图形，用户可以使用简单指令和 MATLAB 进行交互。其中包括两个部分，一个是主要用于计算的 MATLAB，另一个是主要用于仿真的 Simulink 仿真系统，MATLAB 的命名是源自于矩阵和实验室的两个英文单词的拼写，可以翻译为矩阵实验室。MATLAB 自开发之时就注重于与用户的可视化交互界面开发，相比于其他数学软件，其表现出强大的适用性与便捷性，用户可以通过简洁的可视化界面完成人机交互，无需进行变量的定义即可完成程序的编写，这种设计对于初学者来说十分友好。在图形处理方面，MATLAB 可以将用图形来表示向量和矩阵，其中对于图形处理也有着强大的能力，为普通用户提供图形处理工具的同时也为特殊用户提供特殊的功能函数，从不同的需求角度满足用户的需求。由于 Matlab 有很多特点，在欧美大学，Matlab 已经成为研究矩阵运算与控制系统仿真的首选工具。

MATLAB 在复变量函数领域中的使用越来越多，而 MATLAB 使您可以简化一些基本计算，例如导数，导数，积分，平方根，残差和复数的级数展开。在分析某些复杂变量函数的属性时，可以使用 MATLAB 图纸分析这些复杂变量函数的属性，因为 MATLAB 的计算函数不一定直观且不清楚。

本文基于上述问题的提出，采用 MATLAB 作为数据分析工具，结合复变函数学科的主要特征，实现了 MATLAB 软件在复变函数计算与结果图形可视化的应用，对于第一部分，主要应用 MATLAB 强大的数据处理能力，在复数的计算以及方程的建立与求解上进行了阐述，通过应用泰勒展开公式实现对工程问题误差的计算，其次，运用 MATLAB 强大的可视化图形处理能力，对运算结果在可以在四维图形上进行建模，由于以往的图形表现形式智能在三个坐标轴上进行图形处理，此次 MATLAB 使用不同的颜色表示值的大小来实现了第四维度的数值表述，结果较为直观。

2. MATLAB 在复变函数计算中的应用

2.1 复数的计算

对于复变函数计算是在本次研究中最关注的功能，MATLAB 强大的运算能力可以使该任务被轻松解决，与传统的数学计算不同，在传统计算中数值整理相对简单，但是在复变函数的计算中，就大不相同，工作量将成倍增加，可以通过调用工具包中的具体函数实现对复变函数各个部分的精确计算，节省大量人力与时间。

例 1 对下列复数进行化简,并求它们的实部、虚部、辐角、模、共轭复数.

$$i^{10}+i^3+i+12;\frac{(3+i)^2(1+i)^2}{(5+i)^3(2+i)^4};i^{2012};3-2i;\ln(\sqrt{5+i}+i)$$

.

分析：上述问题虽然看似结构并没有特别复杂，但是相对于传统数值计算中工作量翻倍，利用 MATLAB 中几个完善的函数即可对该函数进行分部求解，具体的求解编程如下中所示：

解：在 MATLAB 命令窗口输入如下复数矩阵：

```
>> A=[i^10+i^3+i+12 ((3+i)^2*(1+i)^2)/((5+i)^3*(2+i)^4) 3-2*i i^2012 log((5+i)^(1/2)+i)]



>> real(A)    %复数矩阵 A 的实部

ans =              11.0000        0.0059        3.0000        1.0000        0.9393

>> imag(A)    %复数矩阵 A 的虚部

ans =              0     -0.0014     -2.0000              0       0.4983

>> angle(A)    %复数矩阵 A 的辐角

ans =              0     -0.2325     -0.5880              0       0.4877

>> abs(A)    %复数矩阵 A 的模

ans =              11.0000        0.0060        3.6056        1.0000        1.0632

>> conj(A)    %复数矩阵 A 的共轭复数


ans =

  11.0000     0.0059 + 0.0014i     3.0000 + 2.0000i       1.0000    0.9393 - 0.4983i
```

在上面的示例中，使用 MATLAB，您不仅可以找到复数的加，减，乘和除，还可以找到复数，复数等，并且可以采用实数，虚数和共轭复数。 当您需要处理时，可以使用 MATLAB 强大的矩阵数学函

数将这些复数组织到矩阵中并一起求解。

例 2 计算$ie^{\frac{1}{3}i}$和$ie^{\frac{1}{3i}}$

分析：在 MATLAB 中的乘除由“*”和“/”来实现.

解：MATLAB 程序如下：

```
>> i*exp(1/3*i)

ans =

  -0.3272 + 0.9450i

>> i*exp((1/3*i))

ans =

  -0.3272 + 0.9450i
```

可见,MATLAB 程序中 i*exp(1/3*i)和 i*exp((1/3*i))是不相等的.

例 3 计算$\sqrt[3]{-8}$.

分析：在实数域内,$\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}=-2$.这时$\sqrt[3]{-8}$就只取三值中的实值.下面,我们按常规方法和利用 MATLAB 来计算此题.

解：因为$-8=8(\cos\pi+i\sin\pi)_8$，故

$(\sqrt[3]{-8})_k=\sqrt[3]{8}(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3})$ (k=0,1,2) 当 k=0 时，

$(\sqrt[3]{-8})_0=\sqrt[3]{8}(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3})=2(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=1+\sqrt{3i}$

；

$(\sqrt[3]{-8})_1=\sqrt[3]{8}(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3})$=-2；

$(\sqrt[3]{-8})_2=\sqrt[3]{8}(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3})=1-\sqrt{3i}$

由上述结果可以看出，MATLAB 对多个函数值进行求解的时候，并不会对每个函数值都进行逐个求解。

2.2 复变函数的微积分

复杂变量函数的演算包括极限，导数（包括偏导数），符号函数的积分以及可以通过 MATLAB 的符号计算工具箱获得的复杂方程。 让我们看下面的具体例子。

例 4 求下列极限：

(a) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin(z)}{z}$; (b) $\lim\limits_{t\to\infty} t(1+\frac{z}{t})^t$.

分析：通常，例如，如（a）中的 Taylor 扩展所证明的。 下面，我们使用 MATLAB 查找极限。解：(a)MATLAB 程序如下：

```
>> syms z   %定义符号变量
>>   f=limit((sin(z))/z,z,0) %f 表示 sin(z)/z 以 z 为变量在 0 处的极限
f = 1
```

$f(z)=\begin{cases}\frac{z}{|z|}, z\neq 0,\\ 0, z=0.\end{cases}$ {试求 f（z）在 z=0 点处的左右极限.

例 5

分析：首先,我们利用 MATLAB 符号计算方法计算.

解：MATLAB 程序如下：

```
>> syms z
>> f1=limit(z/abs(z),z,0,'left')
f1 =
-1
>> f2=limit(z/abs(z),z,0,'right')
f2 =
1
```

解：MATLAB 程序如下：

```
>> z1=-2:0.01:0;
f1=z1/abs(z1);   %abs()表示绝对值符号
zr=0:0.01:2;
fr=zr/abs(zr);
plot(z1,f1,zr,fr)
```

axis([-2 2 -1.5 1.5]) 仿真结果如下：

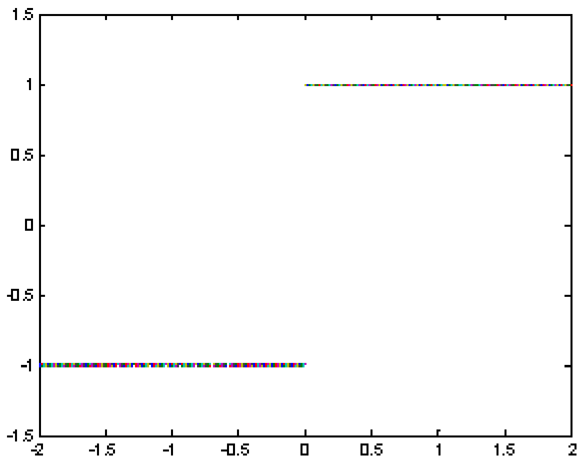


图 2-1

例 6 试对下列函数求导.

(a)设$f=z^9$，求f的导数f'；

(b)试对表达式f(x,y)=$x^3+4x^2y-y^2$求一阶导数和偏导数.

分析：以上两个示例代表了微分问题中的具体表达式（找到一阶导数和偏导数）。 在解决复杂的变量函数微分问题时，由于高阶和倍数，我们经常会产生微分误差。 如果您使用 MATLAB 查找微分值，则只需掌握一些命令.

解：(a)MATLAB 程序如下：

```
>> syms z
>>   f(z)=z^9;
>> df(z)= diff(f,z)   %f(z)对自变量 z 求导数
df (z)=
9*z^8
```

(b)MATLAB 程序如下：

```
>> syms x y
>>   f=x^3+4*x^2*y-y^2;
>> df=diff(f)
df =
3*x^2+8*x*y   %x 是默认的自变量
```

```
>> dfdx=diff(f,x)

dfdx =

3*x^2+8*x*y

>> dfdy=diff(f,y)

dfdy =

4*x^2-2*y

>> dfdxdy=diff(dfdx,y)

dfdxdy =

8*x

>> dfdydx=diff(dfdy,x)

dfdydx =

8*x
```

例 7 计算下列积分.

(a)计算积分 $\int_c (x+y+ix^2)dz$ ，积分路径 C 是连接由 0 到 1+i 的直线段；

(b)计算积分 f(z)= $\int_{|z|=2} \frac{1}{(z+i)^9(z-1)(z-3)}dz$.

分析：复数积分的积分路径可以是开放曲线或简单封闭曲线. 由于积分路径和整数之间的差异，一些复杂的积分计算会更加复杂。 但是，您可以使用 MATLAB 轻松计算复杂变量函数的并集. 让我们看具体的例子.

(a) 中 C 的参数方程为： z=(1+i)t,0 $\le t \le 1, x=t, y=t$,dz=(1+i)dt 由参数方程法得： $\int_c (x+y+ix^2)dz = \int_0^1 (t+t+it^2)(1+i)dt$ ，下面我们利用 MATLAB 来求积分.

解：MATLAB 程序如下：

```
>> syms t

>> int((t+t+i*t^2)*(1+i),0,1)    %int 积分符号

ans =

2/3+4/3*i
```

解：MATLAB 程序如下：

```
>> syms t z

>>    z=2*cos(t)+i*2*sin(t);    %建立积分路径 C 的参数方程
```

```
>> f2=1/(z+i)^9/(z-1)/(z-3);   %输入被积函数f（z）的表达式
>> f2=int(f2*diff(z),t,0,2*pi)
f2 =
-481/62500000*pi+1917/62500000*i*pi
f2 =
  -2.4178e-005 +9.6359e-005i
```

2.3 复数域求解

在 MATLAB 中如果有直接可用的函数求解工具就会十分方便，研究开发者利用计算机编程实现了一套完备的方程求解器的建立，即 solve 求解器，该方式对复变函数方程的求解完全适用。例 8 对两个方程进行求解

（a）;

（b）.

分析：利用 MATLAB 中自带的函数工具可以轻松的实现对复变函数方程的求解，并且结果易于后续分析与总结。

解：具体的解方程的程序如下所示：

```
>> solve('log(z^4+2*z^3+z^2+3)=10')  %solve 表示对方程求根
ans =
      -1/2+1/2*(1+4*(exp(10)-3)^(1/2))^(1/2)
      -1/2-1/2*(1+4*(exp(10)-3)^(1/2))^(1/2)
      -1/2+1/2*i*(-1+4*(exp(10)-3)^(1/2))^(1/2)
      -1/2-1/2*i*(-1+4*(exp(10)-3)^(1/2))^(1/2)
      >> solve('cos(z+i)=1/2')
      ans =

  -i+1/3*pi
```

2.4 留数的计算

留数在对于复变函数的计算与应用起到了极大地推动作用,并且学好留数的计算步骤与方法,才能更好地解决实际问题，如果对留数的概念模糊不清，那么将阻碍复变函数的学习。

(1).求解留数的主要方式。

R=limit(F*(z-z0),z,z0) %单奇点的留数

R=limit(diff(F*(z- z0)^n,z,n- 1)/prod(1:n-1),z,z0) %n 阶奇点的留数详见文献[13].

例 9 求函数在孤立奇点处的留数.

分析:可以从函数的结构特点可以看出，函数有两个奇点。

解：对于四阶和一阶的计算方式相同，下面采用编程求解两个奇点：

```
>> syms z
>> f=1/((z^4)*(z-i));
>> R1=limit(diff(f*(z-0)^4,z,3)/prod(1:3),z,0)
R1 =  %原函数处的留数
-1
>> R2=limit(f*(z-i),z,i)
```

例 10 求所给函数的留数，并且求函数的极点.

分析: 对于一个复变函数如果较为复杂没有重根，直接求解留数不准确不直观而且好费时间，那我们选择 MATLAB 中自带的函数命令，留数在复变函数的发展过程中取到了不可或缺的作用，并且推动了后者的发展与进步。

解：MATLAB 程序如下：

```
>> [r,p]=residue([1,1],[2,3,0,5,0])
r =  %所求函数的留数
    0.0386
  -0.1193 - 0.0705i
  -0.1193 + 0.0705i
    0.2000
p =  %所求函数的极点
```

−2.0786

0.2893 + 1.0578i

0.2893 - 1.0578i

0

由上述计算结果可知，当该结果只有一个解时，我们可以通过 MTLAB 中所自带的函数工具包对留数和极点进行求解。

2.5 利用 MATLAB 实现泰勒级数展开

泰勒级数展开广泛应用于高等数学各个领域，并且在工程中进行近似计算时候，通常也采用几个低阶的泰勒函数表达书对原函数进行表示，用以替代之前的精确但是耗时的计算过程，但是对于高阶复杂函数由于泰勒级数展开较为复杂，我们选择 MATLAB 作为泰勒级数展开计算工具对复变函数进行泰克展开，结果较为直观，具体展开方式如下 MATLAB 程序所示。

例 11 在 x=0 处对函数进行泰克级数展开。

分析：由于是题目中所给的函数不是函数，因此该函数有解析表达式，并且采用幂级数展开式时不存在发散的情况，应用现有的命令 taylor(f(z),n,z,k)对函数进行展开，方便快捷并且可以定义所需要的展开项数。

解：MATLAB 程序如下：

```
>> syms z
>> taylor(sin(z),8,z,0)  %展开级数的前 8 项
ans =
z-1/6*z^3+1/120*z^5-1/5040*z^7
>> taylor(cos(z),10,z,0)  %展开级数的前 10 项
ans =
1-1/2*z^2+1/24*z^4-1/720*z^6+1/40320*z^8
>> syms z
```

```
>> taylor(exp(z)/(1-z),5,z,0)  %展开级数的前5项

ans =

1+2*z+5/2*z^2+8/3*z^3+65/24*z^
```

3. 复变函数的图形

3.1 三角函数的 MATLAB 图形可视化

MATLAB 该软件在图形的编辑处理上具有巨大优势，成为用户进行图形处理的首选软件，并且在数据可视化后，曲线可以表现得非常自然平滑，可以方便的和其他软件对接，将运行结果导出到其他软件中进行后续编辑。

例12 画出 $\sin z$ 和 $\cos z$ 的图像.

解：MATLAB程序为：

```
>> z=4*cplxgrid(30);cplxmap(z,sin(z));colorbar(’vert’);
title(’sin(z)’)
>> z=3*cplxgrid(25);cplxmap(z,cos(z));colorbar(’vert’);
title(’cos(z)’)
```

仿真结果如下：

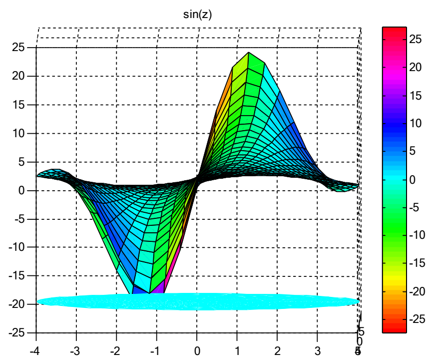


图3-1

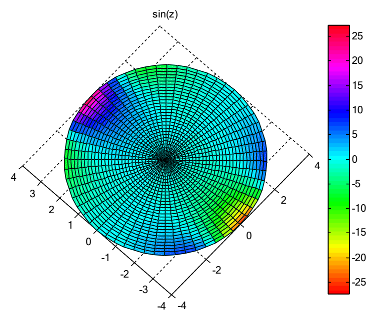


图3-2

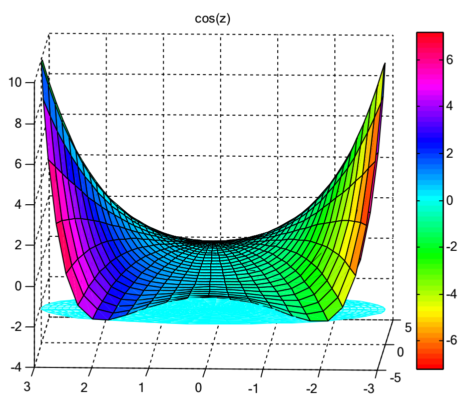


图 3-3

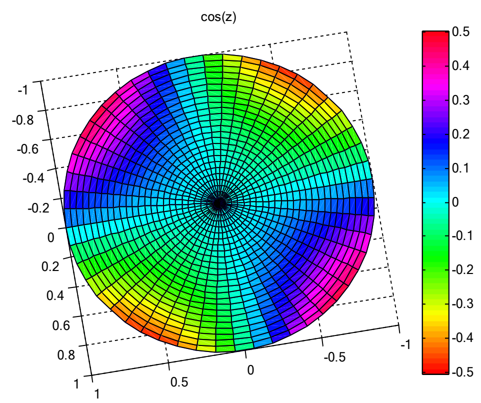


图 3-4

从上面两图可以看出，$f(z)=\sin z$ 和 $f(z)=\cos z$ 这两个函数对应于一个自变量只有一个函数值，并且用不同的颜色表示不同的虚部数值，从图中可以看出，两个函数的值相等，并且由颜色的深浅程度可以看出具有相同的实部和虚部。

所以,它们的模的数值也可以大于 1.在图 3-2 和图 3-4 中,从颜色的分布来看可知 $f(z)=\sin z$ 是关于原点对称的,$f(z)=\cos z$ 是关于虚轴对称的.周期均为 $2\pi i$.

3.2 其他函数图像

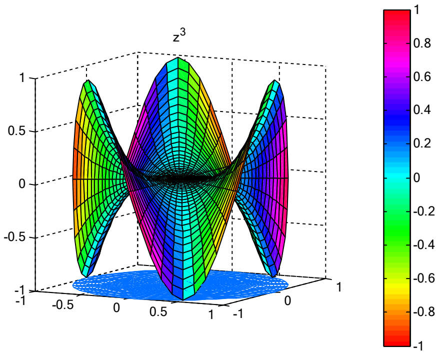
例 13：画出下列幂函数图像.

(a) $f(z)=z^3$；(b) $f(z)=z^{\frac{1}{5}}$

解：该复变函数的 MATLAB 解法为：

```
>> z=cplxgrid(30);      %建立一个单位为 30 的网格结构，并采用极坐标

>> cplxmep(z,z.^3);    %对复变函数做图

>> colorbar('vert');     %注各个颜色所代表的数值

>> title('z^3')            %给图加标题

>> z=cplxgrid(30);

>> cplxmap(z,z.^ (1/5));

>> colorbar('vert');

>> cplxroot(5);

>> title('z^(1/5)')
```

仿真结果如下：



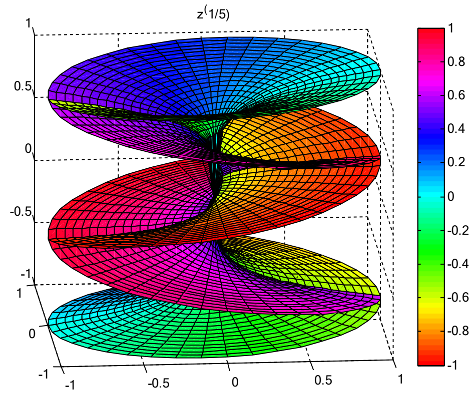


图 3-5　　　　　　　　　　　　图 3-6

从图 3-5 可以看出函数 $f(z)=z^3$ 是一个单值函数,我们在阴影部分任取一点

都唯一存在一点$f(z)$与之对应.从图 3-6 可以看出$f(z)=z^{\frac{1}{5}}$是一个五值函数.

例 14 画出$f(z)=\ln z$的图像.

解：MATLAB 程序为：

```
>> z=cplxgrid(20);w=log(z);
>> for k=0:5
w=w+i*2*pi;
surf(real(z),imag(z),imag(w),real(w)); %作三维表面图
hold on
title('Lnz')
end
>> syms z
>> z=cplxgrid(20);w=log(z);
>> for k=0
w=w+i*2*pi;
surf(real(z),imag(z),imag(w),real(w));
hold on
title('Lnz')
end
```

仿真结果如下：

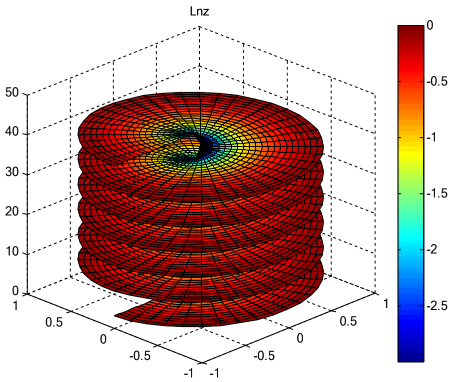


图 3-7

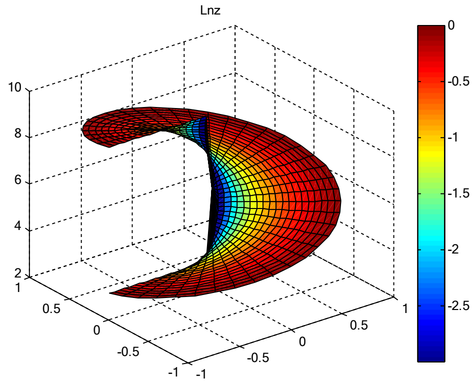


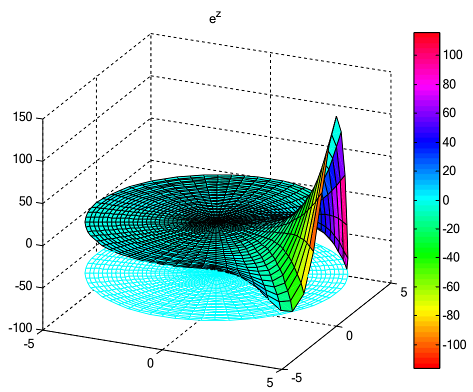
图 3-8

从图 3-7 中可以看出，$f(z)=\ln z$ 这个函数在部分自变量取值时具有多个对应的结果，对这些结果向量进行拆解，可以分别得到不同的计算结果如下图所示，我们给出了其中一个运算结果的数值，并且与其他结果可以进行比较。

例 15 作出指数函数 $f(z)=e^{z}$ 的图像.

解：MATLAB 程序为：

```
>> z=5*cplxgrid(30);

>> cplxmap(z,exp(z));

>> colorbar('vert');

>> title('e^z')
```



仿真结果如下：

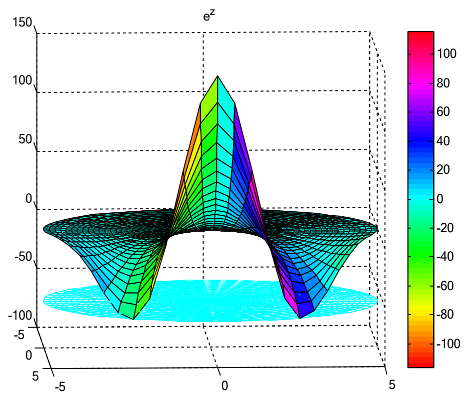


图 3-9　　　　　　　　　　　　　　　　　　　图 3-10

从图 3-9 可以看出 $f(z)=e^{z}$ 是单值函数.我们知道实变函数 $f(x)=e^{x}>0(x\in R)$,

但是在复数域中，$f(z)=e^{z}>0$ 这个结果就是错误的，另外，我们可以从下图中看到，该