

四川省成都七中实验学校 2023 年高三教学质量统一检测试题（一）数学试题

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂；非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 的渐近线方程为（ ）

- A. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$ B. $y = \pm x$ C. $y = \pm \sqrt{2}x$ D. $y = \pm \sqrt{3}x$

2. 已知实数 x, y 满足线性约束条件 $\begin{cases} x \geq 1 \\ x + y \geq 0 \\ x - y + 2 \geq 0 \end{cases}$ ，则 $\frac{y+1}{x}$ 的取值范围为（ ）

- A. $(-2, -1]$ B. $(-1, 4]$ C. $[-2, 4)$ D. $[0, 4]$

3. 已知命题 $P: \forall x \in R, \sin x \leq 1$ ，则 $\neg P$ 为（ ）

- A. $\exists x_0 \in R, \sin x_0 \geq 1$ B. $\forall x \in R, \sin x \geq 1$
C. $\exists x_0 \in R, \sin x_0 > 1$ D. $\forall x \in R, \sin x > 1$

4. 已知 l 为抛物线 $x^2 = 4y$ 的准线，抛物线上的点 M 到 l 的距离为 d ，点 P 的坐标为 $(4, 1)$ ，则 $|MP| + d$ 的最小值是（ ）

- A. $\sqrt{17}$ B. 4 C. 2 D. $1 + \sqrt{17}$

5. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 13 项和为 52，则 $(-2)^{a_6 + a_8} =$ （ ）

- A. 256 B. -256 C. 32 D. -32

6. 大衍数列，米源于我国古代文献《乾坤谱》中对易传“大衍之数五十”的推论，主要用于解释我国传统文化中的太极衍生原理，数列中的每一项，都代表太极衍生过程中，曾经经历过的两仪数量总和. 已知该数列前 10 项是 0, 2, 4, 8, 12, 18, 24, 32, 40, 50, ...，则大衍数列中奇数项的通项公式为（ ）

- A. $\frac{n^2 - n}{2}$ B. $\frac{n^2 - 1}{2}$ C. $\frac{(n-1)^2}{2}$ D. $\frac{n^2}{2}$

7. 已知定义在 $[1, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(3x) = 3f(x)$ ，且当 $1 \leq x \leq 3$ 时， $f(x) = 1 - |x - 2|$ ，则方程

$f(x) = f(2019)$ 的最小实根的值（ ）

- A. 168 B. 249 C. 411 D. 561

8. 定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数 $f(x)$ 满足任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f(x+2) = f(x) - f(1)$, 且当 $x \in [2, 3]$ 时,

$f(x) = -2x^2 + 12x - 18$. 若函数 $y = f(x) - \log_a(x+1)$ 至少有三个零点, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ B. $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ C. $\left(0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ D. $\left(0, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

9. 已知向量 $\vec{a} = (1, 0)$, $\vec{b} = (1, \sqrt{3})$, 则与 $2\vec{a} - \vec{b}$ 共线的单位向量为 ()

- A. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ B. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
C. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 或 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 或 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

10. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$, 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $m(m > 0)$ 个单位长度后, 所得到的图象关于 y 轴对称, 则 m 的最小值是 ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

11. 若直线 α 不平行于平面 β , 且 $\alpha \not\subset \beta$, 则 ()

- A. β 内所有直线与 α 异面
B. β 内只存在有限条直线与 α 共面
C. β 内存在唯一的直线与 α 平行
D. β 内存在无数条直线与 α 相交

12. 已知函数 $f(x) = \log_a(|x-2| - a)$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$), 则“ $f(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 上是单调函数”是“ $0 < a < 1$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 正四面体 $ABCD$ 的一个顶点 A 是圆柱 OA 上底面的圆心, 另外三个顶点 BCD 圆柱下底面的圆周上, 记正四面体

$ABCD$ 的体积为 V_1 , 圆柱 OA 的体积为 V_2 , 则 $\frac{V_1}{V_2}$ 的值是_____.

14. 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 $C: xy = \sqrt{3}$ 上任意一点 P 到直线 $l: x + \sqrt{3}y = 0$ 的距离的最小值为_____.

15. 设 $f(x) = e^{tx}$ ($t > 0$), 过点 $P(t, 0)$ 且平行于 y 轴的直线与曲线 $C: y = f(x)$ 的交点为 Q , 曲线 C 过点 Q

的切线交 x 轴于点 R , 若 $S(1, f(1))$, 则 $\triangle PRS$ 的面积的最小值是_____.

16. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_n + S_n = 32 (n \in N^*)$, 则 $S_5 =$ _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 已知直线 $l_1: y = x + b$ 与抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 切于点 P , 直线 $l_2: 2x - 2my - m + 1 = 0$ 过定点 Q ,

且抛物线 C 上的点到点 Q 的距离与其到准线距离之和的最小值为 $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

(1) 求抛物线 C 的方程及点 P 的坐标;

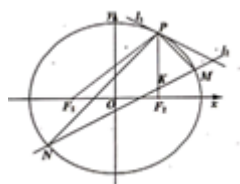
(2) 设直线 l_2 与抛物线 C 交于(异于点 P)两个不同的点 A, B , 直线 PA, PB 的斜率分别为 k_1, k_2 , 那么是否存在实数 λ , 使得 $k_1 + k_2 = \lambda$? 若存在, 求出 λ 的值; 若不存在, 请说明理由.

18. (12 分) 已知点 P 在抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 上, 且点 P 的横坐标为 2, 以 P 为圆心, $|PO|$ 为半径的圆 (O 为原点), 与抛物线 C 的准线交于 M, N 两点, 且 $|MN| = 2$.

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) 若抛物线的准线与 y 轴的交点为 H . 过抛物线焦点 F 的直线 l 与抛物线 C 交于 A, B , 且 $AB \perp HB$, 求 $|AF| - |BF|$ 的值.

19. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别是 F_1, F_2 , 点 $P(1, \frac{3}{2})$ 在椭圆 C 上, 满足 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = \frac{9}{4}$



(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 直线 l_1 过点 P , 且与椭圆只有一个公共点, 直线 l_1 与 l_2 的倾斜角互补, 且与椭圆交于异于点 P 的两点 M, N , 与直线 $x=1$ 交于点 K (K 介于 M, N 两点之间), 是否存在直线 l_2 , 使得直线 l_1, l_2, PM, PN 的斜率按某种排序能构成等比数列? 若能, 求出 l_2 的方程, 若不能, 请说明理由.

20. (12 分) 如图, 设 A 是由 $n \times n$ 个实数组成的 n 行 n 列的数表, 其中 $a_{ij} (i, j=1, 2, 3, \dots, n)$ 表示位于第 i 行第 j 列的实数, 且 $a_{ij} \in \{1, -1\}$. 记 $S(n, n)$ 为所有这样的数表构成的集合. 对于 $A \in (n, n)$, 记 $r_i(A)$ 为 A 的第 i 行各数之积,

$c_j(A)$ 为 A 的第 j 列各数之积. 令 $l(A) = \sum_{i=1}^n r_i(A) + \sum_{j=1}^n c_j(A)$

a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
a_{21}	a_{22}		a_{2n}
...	...	...	...
a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nn}

(I) 请写出一个 $A \in S(4, 4)$, 使得 $I(A)=0$;

(II) 是否存在 $A \in S(9, 9)$, 使得 $I(A)=0$? 说明理由;

(III) 给定正整数 n , 对于所有的 $A \in S(n, n)$, 求 $I(A)$ 的取值集合.

21. (12 分) 已知椭圆: $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的四个顶点围成的四边形的面积为 $2\sqrt{15}$, 原点到直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 的距离为 $\frac{\sqrt{30}}{4}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 已知定点 $P(0, 2)$, 是否存在过 P 的直线 l , 使 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 且以 $|AB|$ 为直径的圆过椭圆 C 的左顶点? 若存在, 求出 l 的方程; 若不存在, 请说明理由.

22. (10 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $b(a^2 + c^2 - b^2) = a^2 c \cos C + a c^2 \cos A$.

(1) 求角 B 的大小;

(2) 若 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、C

【解析】

根据双曲线的标准方程，即可写出渐近线方程.

【详解】

Q 双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$,

$\therefore$ 双曲线的渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{2}x$,

故选: C

【点睛】

本题主要考查了双曲线的简单几何性质，属于容易题.

2、 B

【解析】

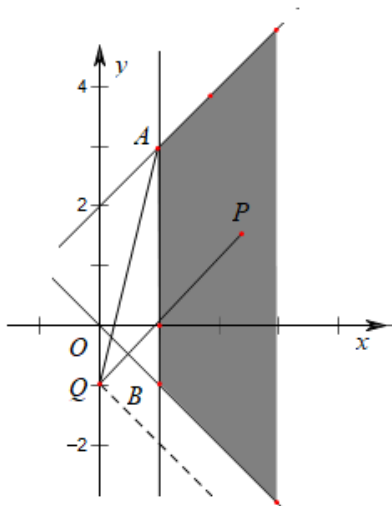
作出可行域, $\frac{y+1}{x}$ 表示可行域内点 $P(x, y)$ 与定点 $Q(0, -1)$ 连线斜率, 观察可行域可得最小值.

【详解】

作出可行域, 如图阴影部分 (含边界), $\frac{y+1}{x}$ 表示可行域内点 $P(x, y)$ 与定点 $Q(0, -1)$ 连线斜率, $A(1, 3)$,

$k_{QA} = \frac{3 - (-1)}{1 - 0} = 4$, 过 Q 与直线 $x + y = 0$ 平行的直线斜率为 -1 , $\therefore -1 < k_{PQ} \leq 4$.

故选: B.



【点睛】

本题考查简单的非线性规划. 解题关键是理解非线性目标函数的几何意义, 本题 $\frac{y+1}{x}$ 表示动点 $P(x, y)$ 与定点

$Q(0, -1)$ 连线斜率, 由直线与可行域的关系可得结论.

3、 C

【解析】

根据全称量词命题的否定是存在量词命题，即得答案.

【详解】

Q 全称量词命题的否定是存在量词命题，且命题 $P: \forall x \in R, \sin x \leq 1$,

$$\therefore \neg p: \exists x_0 \in R, \sin x_0 > 1.$$

故选：C.

【点睛】

本题考查含有一个量词的命题的否定，属于基础题.

4、B

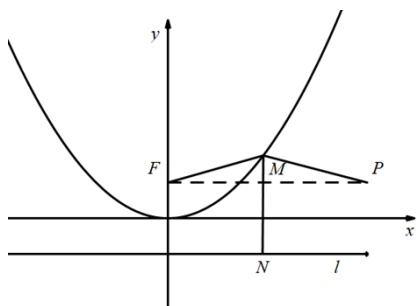
【解析】

设抛物线焦点为 F ，由题意利用抛物线的定义可得，当 P, M, F 共线时， $|MP| + d$ 取得最小值，由此求得答案.

【详解】

解：抛物线焦点 $F(0,1)$ ，准线 $y = -1$ ，

过 M 作 $MN \perp l$ 交 l 于点 N ，连接 FM



由抛物线定义 $|MN| = |MF| = d$ ，

$$\therefore |MP| + d = |MP| + |MF| \geq |PF| = \sqrt{4^2} = 4,$$

当且仅当 P, M, F 三点共线时，取“=”号，

$\therefore |MP| + d$ 的最小值为 4.

故选：B.

【点睛】

本题主要考查抛物线的定义、标准方程，以及简单性质的应用，体现了数形结合的数学思想，属于中档题.

5、A

【解析】

利用等差数列的求和公式及等差数列的性质可以求得结果.

【详解】

由 $S_{13} = 13a_7 = 52$, $a_7 = 4$, 得 $(-2)^{a_6+a_8} = (-2)^8 = 256$. 选 A.

【点睛】

本题主要考查等差数列的求和公式及等差数列的性质，等差数列的等和性应用能快速求得结果.

6、B

【解析】

直接代入检验，排除其中三个即可.

【详解】

由题意 $a_1 = 0$ ，排除 D， $a_3 = 4$ ，排除 A，C. 同时 B 也满足 $a_5 = 12$ ， $a_7 = 24$ ， $a_9 = 40$ ，

故选：B.

【点睛】

本题考查由数列的项选择通项公式，解题时可代入检验，利用排除法求解.

7、C

【解析】

先确定解析式求出 $f(2019)$ 的函数值，然后判断出方程 $f(x) = f(2019)$ 的最小实根的范围结合此时的 $f(x) = x - 3^5$ ，通过计算即可得到答案.

【详解】

当 $x \geq 1$ 时， $f(3x) = 3f(x)$ ，所以 $f(x) = 3f(\frac{x}{3}) = 3^2 f(\frac{x}{3^2}) = \dots = 3^n f(\frac{x}{3^n})$ ，故当

$3^n \leq x \leq 3^{n+1}$ 时， $\frac{x}{3^n} \in [1, 3]$ ，所以 $f(x) = 3^n (1 - \left| \frac{x}{3^n} - 2 \right|) = \begin{cases} 3^{n+1} - x, & x \geq 2 \cdot 3^n \\ x - 3^n, & x < 2 \cdot 3^n \end{cases}$ ，而

$2019 \in [3^6, 3^7]$ ，所以 $f(2019) = 3^6 (1 - \left| \frac{2019}{3^6} - 2 \right|) = 3^7 - 2109 = 168$ ，又当 $1 \leq x \leq 3$ 时，

$f(x)$ 的极大值为 1，所以当 $3^n \leq x \leq 3^{n+1}$ 时， $f(x)$ 的极大值为 3^n ，设方程 $f(x) = 168$

的最小实根为 t ， $168 \in [3^4, 3^5]$ ，则 $t \in (3^5, \frac{3^5 + 3^6}{2})$ ，即 $t \in (243, 468)$ ，此时 $f(x) = x - 3^5$

令 $f(x) = x - 3^5 = 168$ ，得 $t = 243 + 168 = 411$ ，所以最小实根为 411.

故选：C.

【点睛】

本题考查函数与方程的根的最小值问题，涉及函数极大值、函数解析式的求法等知识，本题有一定的难度及高度，是一道有较好区分度的压轴选这题.

8、B

【解析】

由题意可得 $f(x)$ 的周期为 2，当 $x \in [2, 3]$ 时， $f(x) = -2x^2 + 12x - 18$ ，令 $g(x) = \log_a(x+1)$ ，则 $f(x)$ 的图像和 $g(x)$ 的图像至少有 3 个交点，画出图像，数形结合，根据 $g(2) > f(2)$ ，求得 a 的取值范围.

【详解】

$f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数，满足任意 $x \in \mathbf{R}$ ，

$$f(x+2) = f(x) - f(1), \text{ 令 } x = -1, f(1) = f(-1) - f(1),$$

$$\text{又 } f(-1) = f(1), \therefore f(1) = 0, f(x+2) = f(x),$$

$\therefore f(x)$ 为周期为 2 的偶函数，

$$\text{当 } x \in [2, 3] \text{ 时, } f(x) = -2x^2 + 12x - 18 = -2(x-3)^2,$$

$$\text{当 } x \in [0, 1], x+2 \in [2, 3], f(x) = f(x+2) = -2(x-1)^2,$$

$$\text{当 } x \in [-1, 0], -x \in [0, 1], f(x) = f(-x) = -2(x+1)^2,$$

作出 $f(x), g(x)$ 图像，如下图所示：

函数 $y = f(x) - \log_a(x+1)$ 至少有三个零点，

则 $f(x)$ 的图像和 $g(x)$ 的图像至少有 3 个交点，

Q $f(x) \leq 0$ ，若 $a > 1$ ，

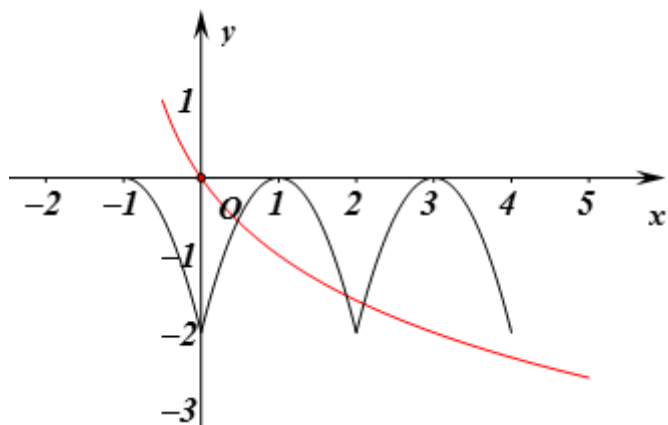
$f(x)$ 的图像和 $g(x)$ 的图像只有 1 个交点，不合题意，

所以 $0 < a < 1$ ， $f(x)$ 的图像和 $g(x)$ 的图像至少有 3 个交点，

则有 $g(2) > f(2)$ ，即 $\log_a(2+1) > f(2) = -2, \therefore \log_a 3 > -2$ ，

$$\therefore \frac{1}{a^2} > 3, a^2 < \frac{1}{3}, \text{Q } 0 < a < 1, \therefore 0 < a < \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故选:B.



【点睛】

本题考查函数周期性及其应用，解题过程中用到了数形结合方法，这也是高考常考的热点问题，属于中档题.

9、D

【解析】

根据题意得， $2\vec{a} - \vec{b} = (1, -\sqrt{3})$ 设与 $2\vec{a} - \vec{b}$ 共线的单位向量为 (x, y) ，利用向量共线和单位向量模为 1，列式求出 x, y 即可得出答案.

【详解】

因为 $\vec{a} = (1, 0)$ ， $\vec{b} = (1, \sqrt{3})$ ，则 $2\vec{a} = (2, 0)$ ，

所以 $2\vec{a} - \vec{b} = (1, -\sqrt{3})$ ，

设与 $2\vec{a} - \vec{b}$ 共线的单位向量为 (x, y) ，

$$\text{则} \begin{cases} -\sqrt{3}x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

所以与 $2\vec{a} - \vec{b}$ 共线的单位向量为 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 或 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

故选：D.

【点睛】

本题考查向量的坐标运算以及共线定理和单位向量的定义.

10、A

【解析】

化简 $f(x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$ 为 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，求出它的图象向左平移 $m(m > 0)$ 个单位长度后的图象的函数表

达式 $y = \sin\left(x + m + \frac{\pi}{3}\right)$ ，利用所得到的图象关于 y 轴对称列方程即可求得 $m = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，问题得解。

【详解】

函数 $f(x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$ 可化为： $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，

将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $m(m > 0)$ 个单位长度后，

得到函数 $y = \sin\left(x + m + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，又所得到的图象关于 y 轴对称，

所以 $\sin\left(0 + m + \frac{\pi}{3}\right) = \pm 1$ ，解得： $m + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，即： $m = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，

又 $m > 0$ ，所以 $m_{\min} = \frac{\pi}{6}$ 。

故选：A.

【点睛】

本题主要考查了两角和的正弦公式及三角函数图象的平移、性质等知识，考查转化能力，属于中档题。

11、D

【解析】

通过条件判断直线 α 与平面 β 相交，于是可以判断 ABCD 的正误。

【详解】

根据直线 α 不平行于平面 β ，且 $\alpha \not\subset \beta$ 可知直线 α 与平面 β 相交，于是 ABC 错误，故选 D.

【点睛】

本题主要考查直线与平面的位置关系，直线与直线的位置关系，难度不大。

12、C

【解析】

先求出复合函数 $f(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 上是单调函数的充要条件，再看其和 $0 < a < 1$ 的包含关系，利用集合间包含关系与充要条件之间的关系，判断正确答案。

【详解】

$$f(x) = \log_a(|x-2|-a) (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1),$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/928012022065006051>