

2024 届延安市重点中学高考第二次模拟考试数学试题

注意事项

1. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。
4. 作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。作答非选择题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 则 $\sin(\pi + \alpha) =$ ()

- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. $\pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

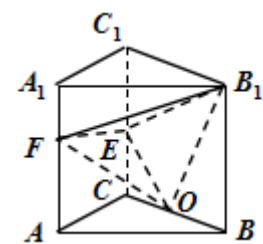
2. 若函数 $y = 2\sin\left(2x + \varphi\right)$ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象经过点 $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$, 则函数 $f(x) = \sin(2x - \varphi) + \cos(2x - \varphi)$ 图象的一条

对称轴的方程可以为()

- A. $x = -\frac{\pi}{24}$ B. $x = \frac{37\pi}{24}$ C. $x = \frac{17\pi}{24}$ D. $x = -\frac{13\pi}{24}$

3. 如图，在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AB = AC = 1$, $BC = AA_1 = \sqrt{2}$, 点 E, O 分别是线段 C_1C, BC 的中点，

$\frac{1}{3}A_1F = \frac{1}{3}A_1A$, 分别记二面角 $F - OB_1 - E$, $F - OE - B_1$, $F - EB_1 - O$ 的平面角为 α, β, γ , 则下列结论正确的是 ()



- A. $\gamma > \beta > \alpha$ B. $\alpha > \beta > \gamma$ C. $\alpha > \gamma > \beta$ D. $\gamma > \alpha > \beta$

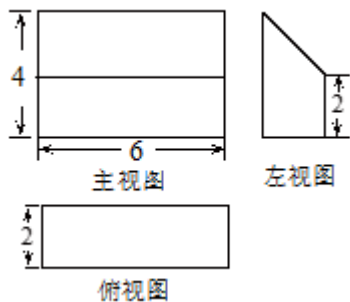
4. 若复数 $z = \frac{5}{2-i}$ (i 为虚数单位), 则 $\bar{z} =$ ()

- A. $2+i$ B. $2-i$ C. $1+2i$ D. $1-2i$

5. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的顶点都在球 O 的球面上, $PA = \sqrt{2}$, $PB = \sqrt{14}$, $AB = 4$, $CA = CB = \sqrt{10}$, 面 $PAB \perp$ 面 ABC , 则球 O 的表面积为 ()

- A. $\frac{10\pi}{3}$ B. $\frac{25\pi}{6}$ C. $\frac{40\pi}{9}$ D. $\frac{50\pi}{3}$

6. 一个几何体的三视图如图所示, 则该几何体的表面积为 ()



- A. $48+12\sqrt{2}$ B. $60+12\sqrt{2}$ C. $72+12\sqrt{2}$ D. 84

7. 已知函数 $f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{e^x}$ ($x \in \mathbb{R}$), 若关于 x 的方程 $f(x) - m + 1 = 0$ 恰好有 3 个不相等的实数根, 则实数 m 的取值范围为 ()

- A. $(\frac{\sqrt{2e}}{2e}, 1)$ B. $(0, \frac{\sqrt{2e}}{2e})$ C. $(1, \frac{1}{e} + 1)$ D. $(1, \frac{\sqrt{2e}}{2e} + 1)$

8. 设 $\vec{a}, \vec{b}$ 为非零向量, 则“ $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ ”是“ $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线”的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

9. 设 $a = 0.82^{0.5}$, $b = \sin 1$, $c = \lg 3$, 则 a, b, c 三数的大小关系是

- A. $a < c < b$ B. $a < b < c$
C. $c < b < a$ D. $b < c < a$

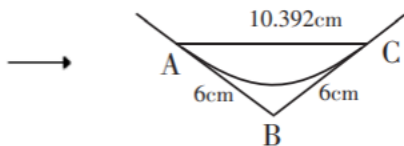
10. 向量 $\vec{a} = (\frac{1}{3}, \tan \alpha)$, $\vec{b} = (\cos \alpha, 1)$, 且 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) =$ ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

11. 达芬奇的经典之作《蒙娜丽莎》举世闻名. 如图, 画中女子神秘的微笑,, 数百年来让无数观赏者人迷. 某业余爱好者对《蒙娜丽莎》的缩小影像作品进行了粗略测绘, 将画中女子的嘴唇近似看作一个圆弧, 在嘴角 A, C 处作圆弧的切线, 两条切线交于 B 点, 测得如下数据: $AB = 6\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$, $AC = 10.392\text{cm}$ (其中 $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$). 根据测量得到的结果推算: 将《蒙娜丽莎》中女子的嘴唇视作的圆弧对应的圆心角大约等于 ()

线, 两条切线交于 B 点, 测得如下数据: $AB = 6\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$, $AC = 10.392\text{cm}$ (其中 $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$). 根据测量得到

的结果推算: 将《蒙娜丽莎》中女子的嘴唇视作的圆弧对应的圆心角大约等于 ()



- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

12. 设 $a \in R$, $b > 0$, 则“ $3^a > 2b$ ”是“ $a > \log_3 b$ ”的

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x + y \geq 2 \\ y - 2 \leq 0 \\ 2x - y \leq 2 \end{cases}$, 则 $z = x + y$ 的最大值为_____.

14. 已知向量 $\vec{a} = (1, 1)$, $|\vec{b}| = 2$, 且向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{3\pi}{4}$, $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) =$ _____.

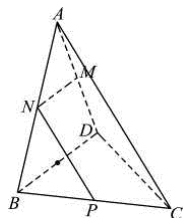
15. 已知 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角为 30° , $(\vec{a} + 2\vec{b}) \perp (2\vec{a} + \lambda\vec{b})$, 则 $(\vec{a} + \lambda\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) =$ _____.

16. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AB = 2$, $AD = 1$, 则 $\vec{AC} \cdot \vec{BD}$ 的值为_____.



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知三棱锥 $A-BCD$ 中侧面 ABD 与底面 BCD 都是边长为 2 的等边三角形，且面 $ABD \perp$ 面 BCD , M 、 N 分别为线段 AD 、 AB 的中点. P 为线段 BC 上的点，且 $MN \perp NP$.



- (1) 证明: P 为线段 BC 的中点;
(2) 求二面角 $A-NP-M$ 的余弦值.

18. (12 分)

某调查机构对某校学生做了一个是否同意生“二孩”抽样调查，该调查机构从该校随机抽查了 100 名不同性别的学生，调查统计他们是同意父母生“二孩”还是反对父母生“二孩”，现已得知 100 人中同意父母生“二孩”占 60%，统计情况如下表：

	同意	不同意	合计
男生	<i>a</i>	5	
女生	40	<i>d</i>	
合计			100

- (1) 求 *a*, *d* 的值，根据以上数据，能否有 97.5%的把握认为是否同意父母生“二孩”与性别有关?请说明理由；
- (2) 将上述调查所得的频率视为概率，现在从所有学生中，采用随机抽样的方法抽取 4 位学生进行长期跟踪调查，记被抽取的 4 位学生中持“同意”态度的人数为 *X*，求 *X* 的分布列及数学期望.

附： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(k^2 \geq k_0)$	0.15	0.100	0.050	0.025	0.010
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

19.（12 分）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2}{a_n}$ 且 $a_1 = \frac{1}{2}$

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；
- (2) 求数列 $\left\{\frac{1}{a_n} + 2n\right\}$ 的前 *n* 项和 *S_n*.

20.（12 分）在平面直角坐标系 *xoy* 中，以坐标原点 *O* 为极点，*x* 轴正半轴为极轴建立极坐标系。已知曲线 *C* 的极坐标方程为 $\rho \sin^2 \theta = 2a \cos \theta (a > 0)$ ，过点 *P*(−2, −4) 的直线 *l* 的参数方程为

$$\begin{cases} x = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = -4 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (\text{为参数}), \text{ 直线 } l \text{ 与曲线 } C \text{ 交于 } M、N \text{ 两点}.$$

- (1) 写出直线 *l* 的普通方程和曲线 *C* 的直角坐标方程；
- (2) 若 $|PM|, |MN|, |PN|$ 成等比数列，求 *a* 的值。

21. (12 分) 已知 q, n 均为给定的大于 1 的自然数, 设集合 $M = \{1, 2, 3, \dots, q\}$, $T = \{x \mid x = x_1 + x_2 q + \dots + x_n q^{n-1}, x_i \in M, i = 1, 2, \dots, n\}$.

(I) 当 $q = 2$, $n = 2$ 时, 用列举法表示集合 T ;

(II) 当 $q = 200$ 时, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{100}\} \cup M$, 且集合 A 满足下列条件:

① 对任意 $1 \leq i < j \leq 100$, $a_i + a_j \neq 201$;

② $\sum_{i=1}^{100} a_i = 12020$.

证明: (i) 若 $\forall a_i \in A$, 则 $201 - a_i \in \bar{A}$ (集合 $\bar{A}$ 为集合 A 在集合 M 中的补集);

(ii) $\sum_{i=1}^{100} a_i^2$ 为一个定值 (不必求出此定值);

(III) 设 $s, t \in T$, $s = b_1 + b_2q + b_3q^2 + \dots + b_nq^{n-1}$, $t = c_1 + c_2q + \dots + c_nq^{n-1}$, 其中 $b_i, c_i \in M$, $i = 1, 2, \dots, n$, 若 $b_n < c_n$, 则 $s < t$.

22. (10 分) 已知 $f(x) = 2\ln(x+2) - (x+1)^2$, $g(x) = k(x+1)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $k = 2$ 时, 求证: 对于 $\forall x > -1$, $f(x) < g(x)$ 恒成立;

(3) 若存在 $x_0 > -1$, 使得当 $x \in (-1, x_0)$ 时, 恒有 $f(x) > g(x)$ 成立, 试求 k 的取值范围.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

利用诱导公式以及同角三角函数基本关系式化简求解即可。

【详解】

$$\because \cos \alpha = -\frac{1}{3}, \quad \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

$$\therefore \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

本题正确选项：B

【点睛】

本题考查诱导公式的应用，同角三角函数基本关系式的应用，考查计算能力.

2、B

【解析】

由点 $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$ 求得 φ 的值，化简 $f(x)$ 解析式，根据三角函数对称轴的求法，求得 $f(x)$ 的对称轴，由此确定正确选项.

【详解】

$$\text{由题可知 } 2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{12} + \varphi\right) = 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2} \cdot \varphi = -\frac{\pi}{6}$$

$$\text{所以 } f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{5\pi}{12}\right)$$

$$\text{令 } 2x + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z,$$

$$\text{得 } x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z$$

$$\text{令 } k = 3, \text{ 得 } x = \frac{37\pi}{24}$$

故选：B

【点睛】

本小题主要考查根据三角函数图象上点的坐标求参数，考查三角恒等变换，考查三角函数对称轴的求法，属于中档题.

3、D

【解析】

过点C作 $Cy \parallel AB$ ，以C为原点，CA为x轴，Cy为y轴， CC_1 为z轴，建立空间直角坐标系，利用向量法求解二面角的余弦值得答案.

【详解】

解：因为 $AB = AC = 1$ ， $BC = AA_1 = \sqrt{2}$ ，所以 $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ，即 $AB \perp AC$

过点C作 $Cy \parallel AB$ ，以C为原点，CA为x轴，Cy为y轴， CC_1 为z轴，建立空间直角坐标系，

$$\text{则 } F(1, 0, \frac{2\sqrt{2}}{3}), O(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), E(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}), B_1(1, 1, \sqrt{2}),$$

$$\vec{OB_1} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{2}\right), \quad \vec{OE} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\vec{OF} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right), \quad \vec{EB_1} = \left(1, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \vec{EF} = \left(1, 0, \frac{\sqrt{2}}{6}\right),$$

设平面 OB_1E 的法向量 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{OB_1} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \sqrt{2}z = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{OE} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0 \end{cases}, \text{取 } x=1, \text{得 } \vec{m} = (1, -1, 0),$$

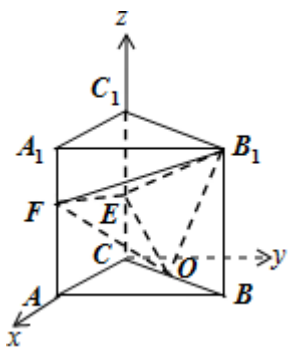
同理可求平面 OB_1F 的法向量 $\vec{n} = (-5\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 3)$,

平面 OEF 的法向量 $\vec{p} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7\sqrt{2}}{2}, 3\right)$, 平面 EFB_1 的法向量 $\vec{q} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}, 3\right)$.

$$\therefore \cos \alpha = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{4\sqrt{61}}{61}, \quad \cos \beta = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{p}|}{|\vec{m}| |\vec{p}|} = \frac{4\sqrt{34}}{34}, \quad \cos \gamma = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{q}|}{|\vec{m}| |\vec{q}|} = \frac{\sqrt{46}}{46}.$$

$$\therefore \gamma > \alpha > \beta.$$

故选: D.



【点睛】

本题考查二面角的大小的判断, 考查空间中中线、线面、面面间的位置关系等基础知识, 考查运算求解能力, 属于中档题.

4、B

【解析】

根据复数的除法法则计算 z , 由共轭复数的概念写出 $\bar{z}$.

【详解】

$$Qz = \frac{5}{2-i} = \frac{5(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{10+5i}{5} = 2+i,$$

$$\therefore \bar{z} = 2-i,$$

故选: B

【点睛】

本题主要考查了复数的除法计算，共轭复数的概念，属于容易题.

5、D

【解析】

由题意画出图形，找出 $\triangle PAB$ 外接圆的圆心及三棱锥 $P-BCD$ 的外接球心 O ，通过求解三角形求出三棱锥 $P-BCD$ 的外接球的半径，则答案可求.

【详解】

如图；设 AB 的中点为 D ；

$$\because PA = \sqrt{2}, PB = \sqrt{14}, AB = 4,$$

$$\therefore \triangle PAB \text{ 为直角三角形，且斜边为 } AB, \text{ 故其外接圆半径为： } r = \frac{1}{2} AB = AD = 2;$$

设外接球球心为 O ；

$$\because CA = CB = \sqrt{10}, \text{ 面 } PAB \perp \text{面 } ABC,$$

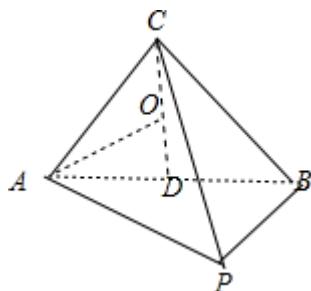
$$\therefore CD \perp AB \text{ 可得 } CD \perp \text{面 } PAB; \text{ 且 } DC = \sqrt{CA^2 - AD^2} = \sqrt{6}.$$

$\therefore O$ 在 CD 上；

$$\text{故有： } AO^2 = OD^2 + AD^2 \Rightarrow R^2 = (\sqrt{6} - R)^2 + r^2 \Rightarrow R = \frac{5}{\sqrt{6}};$$

$$\therefore \text{球 } O \text{ 的表面积为： } 4\pi R^2 = 4\pi \times \left(\frac{5}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{50\pi}{3}.$$

故选：D.



【点睛】

本题考查多面体外接球表面积的法，考查数形结合的解题思想方法，考查思维能力与计算能力，属于中档题.

6、B

【解析】

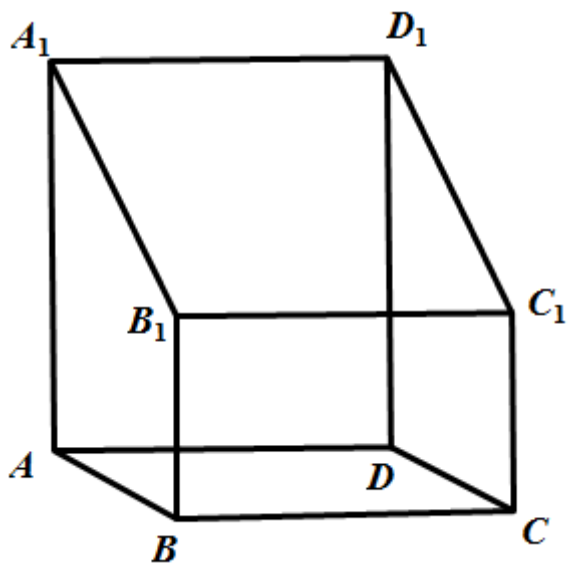
画出几何体的直观图，计算表面积得到答案.

【详解】

该几何体的直观图如图所示：

$$\text{故 } S = 2 \times 6 + 2 \times 6 + \frac{(2+4) \times 2}{2} \times 2 + 4 \times 6 + 6 \times 2\sqrt{2} = 64 + 12\sqrt{2}.$$

故选：B.



【点睛】

本题考查了根据三视图求表面积，意在考查学生的计算能力和空间想象能力.

7、D

【解析】

讨论 $x > 0$ ， $x = 0$ ， $x < 0$ 三种情况，求导得到单调区间，画出函数图像，根据图像得到答案.

【详解】

当 $x > 0$ 时， $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^x}$ ，故 $f'(x) = \frac{1-2x}{2\sqrt{x}e^x}$ ，函数在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递减，且

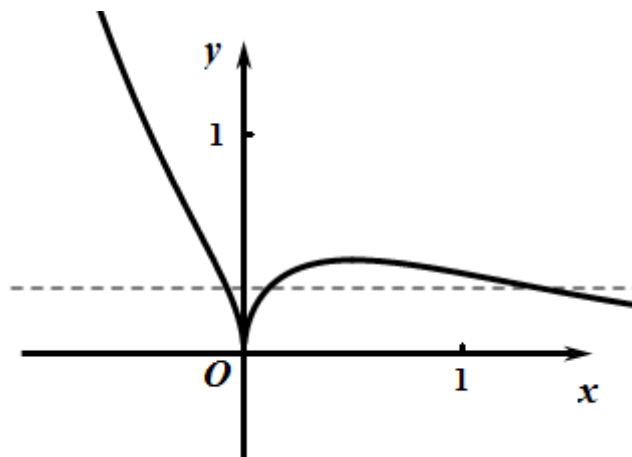
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2e}}{2e};$$

当 $x = 0$ 时， $f(0) = 0$ ；

当 $x < 0$ 时， $f(x) = \frac{\sqrt{-x}}{e^x}$ ， $f'(x) = -\frac{1-2x}{2\sqrt{-x}e^x} < 0$ ，函数单调递减；

如图所示画出函数图像，则 $0 < m - 1 < f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2e}}{2e}$ ，故 $m \in \left(1, \frac{\sqrt{2e}}{2e} + 1\right)$.

故选：D.



【点睛】

本题考查了利用导数求函数的零点问题，意在考查学生的计算能力和应用能力.

8、A

【解析】

根据向量共线的性质依次判断充分性和必要性得到答案.

【详解】

若 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ ，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线，且方向相同，充分性；

当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线，方向相反时， $|\vec{a} + \vec{b}| \neq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ ，故不必要.

故选：A.

【点睛】

本题考查了向量共线，充分不必要条件，意在考查学生的推断能力.

9、C

【解析】

利用对数函数，指数函数以及正弦函数的性质和计算公式，将 a, b, c 与 $\sqrt{\frac{4}{5}}$ ， $\frac{1}{2}$ 比较即可.

【详解】

$$\text{由 } a = 0.82^{0.5} > 0.8^{0.5} = \sqrt{\frac{4}{5}},$$

$$\frac{1}{2} < b = \sin 1 < \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{4}} < \sqrt{\frac{4}{5}},$$

$$c = \lg 3 < \lg \sqrt{10} = \frac{1}{2} \lg 10 = \frac{1}{2},$$

所以有 $c < b < a$. 选 C.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/928022134040006117>