

教材习题答案

第六章 计数原理

6.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理

教材第 5 页(练习)

1.答案 (1)9 (2)6

解析 (1)完成这项工作使用 2 种方法都可以,从只会用第一种方法的 5 人或者从只会用第二种方法的 4 人中选出 1 人即可完成这项工作,根据分类加法计数原理,共有 $5+4=9$ 种选法.

(2)从 A 村经 B 村到 C 村,需要分 2 步完成:第一步,从 A 村到 B 村,有 3 条道路;第二步,从 B 村到 C 村,有 2 条道路,根据分步乘法计数原理,共有 $3 \times 2=6$ 条不同路线.

2.解析 因为要确定的是这名同学的专业选择,不需要考虑学校的差异,所以

这名同学可能的专业选择种数为 $6+4=$

$1=9$.

3.解析 (1)从书架上任取 1 本书,可以从上层书架上取书,也可以从下层书架上取书,根据分类加法计数原理,不同的取法种数为 $N=6+5=11$.

(2)完成这件事,需分两步:第一步,从上层书架上任取 1 本数学书;第二步,从下层书架上任取一本语文书,根据分步乘法计数原理,不同的取法种数为 $N=6 \times 5=30$.

4.解析 (1)根据分类加法计数原理,不同的选法种数为 $N=3+5+4=12$.

(2)根据分步乘法计数原理,不同的选法种数为 $N=3 \times 5 \times 4=60$.

教材第 7 页(练习)

1.解析 电话号码的后四位的每一位数字均可以从 0~9 之间的 10 个数字中任取一个,根据分步乘法计数原理,该电话局不同的电话号码的个数最多为 $N=10 \times 10 \times 10 \times 10=10\,000$.

2.解析 要完成选正、副组长各 1 名这件事,需分 2 步:第 1 步,选正组长,有 5

种选法;第 2 步,选副组长,有 4 种选法.根据分步乘法计数原理,不同的选法数为 $N=5 \times 4=20$.

3.解析 要完成一个减法算式,需分 2 步:第 1 步,确定被减数,可从 1,2,...,19,20 这 20 个数中任取 1 个;第 2 步,确定减数,可从 1,2,...,10 中任取 1 个.根据分步乘法计数原理,共得到不同的算式个数为 $N=20 \times 10=200$.

4.解析 被 5 除余 2 的数有两类:一类是

个位数为 2 的数;另一类是个位数为 7 的数.

第一类:个位数为 2 的数,有 50 个.第二类:个位数为 7 的数,有 50 个.

根据分类加法计数原理,共有满足条件的个数为 $N=50+50=100$.

5.解析 要完成的事是确定一个三位数,分 3 步:第 1 步,确定百位数,可从 1,2,3,4,5 中任选 1 个,有 5 种方法;第 2 步,确定十位数,同样也有 5 种方法;第 3 步,确定个位数,同样也有 5 种方法.所以根据分步乘法计数原理,这样的三位数的个数为 $5 \times 5 \times 5=125$.

教材第 11 页(练习)

1.解析 根据多项式乘法法则,要得到展开式的项数,可以分 3 步完成:第 1 步,从第一个因式中任取一项,有 3 种方法;第 2 步,从第 2 个因式中任取一项,有 3 种方法;第 3 步,从第 3 个因式中任取一项,有 5 种方法.根据分步乘法计数原理,展开后共有的项数为 $N=3 \times 3 \times 5=45$.

2.解析 要确定所有的两位数中,个位数字小于十位数字的个数,可以分类完成:第 1 类,十位数字为 1,有 1 个;第 2 类,十位数字为 2,有 2 个;第 3 类,十位数字为 3,有 3 个;第 4 类,十位数字为 4,有 4 个;第 5 类,十位数字为 5,有 5 个;第 6 类,十位数字为 6,有 6 个;第 7 类,十位数字为 7,有 7 个;第 8 类,十位数字为 8,有 8 个;第 9 类,十位数字为

9,有 9 个.根据分类加法计数原理,这样的两位数的个数为 $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$.

3.解析 要完成这件事,可以分 2 步完成:先从 6 个门中选一个进入,再从其余 5 个门中选一个出去,故共有 $6 \times 5=30$ 种不同的进出商场的方式.

4.解析 记这条直线上的 n 个分点分别

为 $A_1, A_2, \dots, A_n$.

(1)从这 n 个分点中任取 2 个点形成一条线段,可以分类完成:第 1 类,选择 A_1 及另一点,即 $A_1A_2, A_1A_3, \dots, A_1A_n$, 共有

$n-1$ 条线段;第 2 类,选择 A_2 及另一点

(不含 A_1),即 $A_2A_3, A_2A_4, \dots, A_2A_n$, 共

有 $n-2$ 条线段;第 3 类,选择 A_3 及另一

点(不含 A_1, A_2),即 $A_3A_4, A_3A_5, \dots$,

A_3A_n 共有 $n-3$ 条线段;; 第 $n-1$ 类, 只有 $A_{n-1}A_n$ 一条线段.

根据分类加法计数原理, 共可得线段的

条数为 $(n-1)+(n-2)+\dots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$.

(2) 从这 n 个分点中任取 2 个点形成一个向量, 可以分类完成: 第 1 类, 选择 A_1

$\longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow$

及另一点, 即 $A_1A_2, A_2A_1, A_1A_3, A_3A_1, \dots,$

$\longrightarrow \longrightarrow$

A_1A_n, A_nA_1 , 共有 $2(n-1)$ 个向量; 第 2

类, 选择 A_2 及另一点 (不含 A_1), 即

$\longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow$

$A_2A_3, A_3A_2, A_2A_4, A_4A_2, \dots, A_2A_n, A_nA_2$,

共有 $2(n-2)$ 个向量;; 第 $n-1$ 类,

$\longrightarrow \longrightarrow$

有 $A_{n-1}A_n, A_nA_{n-1}$ 两个向量.

根据分类加法计数原理, 共可得向量的

个数为 $2(n-1)+2(n-2)+\dots+2\times 2+2\times 1=n(n-1)$.

习题

6

1

复习巩固

1. 解析 要完成买一台电视机这件事, 无论是买本地的还是外地的都可以, 所以不同的选法共有 $4+7=11$ 种.

2. 解析 从甲地到乙地的不同路线共有 $2\times 3+4\times 2=14$ (条).

3. 解析 不同的路径有 $3+1+2\times 2=8$ (条).

4. 解析 由于 1, 5, 9, 13 是奇数, 4, 8, 12, 16 是偶数, 所以 1, 5, 9, 13 中的任意一个数作分子, 4, 8, 12, 16 中的任意一个数作分母构成的分数两两不相同, 因此可以分两步来完成: 第 1 步, 选分子, 有 4 种选法; 第 2 步, 选分母, 也有 4 种选法. 故可构成不同的分数 $4\times 4=16$ (个). 对于第二问, 分四类: 分子为 1 时, 分母可以从 4, 8, 12, 16 中任选一个, 有 4 种选法; 分子为 5 时, 分母从 8, 12, 16 中 任选

一个, 有 3 种选法; 分子为 9 时, 分母从 12, 16 中任选一个, 有 2 种选法;

分子为 13 时, 分母只能选 16, 有 1 种选法. 所以共有真分数 $4+3+2+1=10$ (个).

5. 解析 完成这件事可以分 2 步: 第 1 步, 从装有 5 个小球的口袋中任取 1 个; 第 2 步, 从装有 6 个小球的口袋中任取 1 个, 根据分步乘法计数原理, 不同的取法数为 $5\times 6=30$.

6. 解析 (1) 分两步完成: 第 1 步, 从 A 中选横坐标, 有 6 种选择; 第 2 步, 从 A 中选纵坐标, 也有 6 种选择. 所以共有 $6\times 6=36$ 个不同的点.

(2) 分两步完成: 第 1 步, 取斜率, 有 4 种取法; 第 2 步, 取截距, 有 4 种取法, 所以共有直线 $4\times 4=16$ (条).

综合运用

7. 解析 由于数字可以重复, 最后一个只能在 0~5 这 6 个数字中选, 所以可以组成号码 $10\times 10\times 10\times 6=6\,000$ (个).

8.解析 (1) 3^4 .

(2) 5^3 .

9.解析 (1)分步完成:第1步,从5件不同的礼物中任选1件送给第1位同学,有5种方法;第2步,从剩下的4件礼物中任选1件送给第2位同学,有4种方法;第3步,从剩下的3件礼物中任选1件送给第3位同学,有3种方法;第4步,从剩下的2件礼物中任选1件送给第4位同学,有2种方法.根据分步乘法计数原理,不同的送法有 $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ (种).

(2) $5^3 = 125$ (种).

10.解析 (1)要取到一个白球一个红球,分步完成:第一步,从8个白球中任取一个,有8种取法;第二步,从10个黑球中任取一个,有10种取法,所以不同的取法数为 $8 \times 10 = 80$.

(2)把这8个白球编号为1~8,要从8个白球中任取2个,可以分类完成:第1类,先取1号,再从2~8号中任选1个,有7种取法;第2类,先取2号,再从3~8号中任取1个,有6种取法;.....;第7类,先取7号,再取8号,只有1种取法.根据分类加法计数原理,不同的取法数为 $7+6+5+4+3+2+1 = 28$.

(3)分两类:一个白球一个红球;两个白球.由(1)可知一个白球一个红球的取法数为80,由(2)知两个白球的取法数为28,所以至少有一个白球的取法数为 $80+28=108$.

(4)分2类:两个球都是白球;两个球都是红球.两个球都是白球的取法数是28,两个球都是红球的取法数是 $9+8+\dots+2+1=45$,所以不同的取法数是 $28+45=73$.

拓展探索

11.解析 分7步安排7天值班情况:第1天可从7人中任选1人值班,有7种选法;由于不能连续值班,所以第2天只能从剩下的6人中任选1人值班,有6种选法;第3天可以从除第2天值班的人之外的6人中任选1人值班,有6种选法;同样,第4天,第5天,第6天,第7天均有6种选法.根据分步乘法计数原理,共有不同的安排方法数为 $7 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 326\,592$.

12.解析 首先将2160分解因数得 $2160 = 2^4 \times 3^3 \times 5^1$,要确定2160的正因数个数可以分3步完成:第1步,确定因数2的个数,可以选0个,1个,2个,3个,4个,有5种情况;第2步,确定因数3的个数,可以选0个,1个,2个,3

个,有4种情况;第3步,确定因数5的个数,可以选0个,1个,有2种情况.所以2160因数的个数为 $5 \times 4 \times 2 = 40$.

6.2 排列与组合

6.2.1 排列

教材第16页(练习)

1.解析 (1)10,12,13,14,20,21,23,24,30,31,32,34,40,41,42,43.

(2)ab,ac,ad,ba,bc,bd,ca,cb,cd,da,db,dc.

2.解析 第一场讲座可以从4个班中任选1个,有4种选法;第二场讲座从剩下的3个班中任选1个,有3种选法;第3场讲座可从剩下的2个班中任选1个,有2种选法;最后一场再给最后1个班进行讲座,所以共有 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 种轮流次序.

3.解析 (1)从5名运动员中先选1人参加第一场比赛,再从剩下的4名运动员中选1人参加第二场比赛,最后从剩下的3名运动员中选1人参加第三场比赛,所以前三场单打比赛的顺序有 $5 \times 4 \times 3 = 60$ (种).

(2)甲乙丙甲乙,甲丙乙甲丙,乙甲丙乙甲,乙丙甲乙丙,丙甲乙丙甲,丙乙甲丙乙.

6.2.2 排列数

教材第20页(练习)

1.解析 (1) $A_{12}^1 = 12 \times 11 \times 10 \times 9 = 11\,880$.

(2) $A_8^8 = 8! = 40\,320$.

(3) $A_{15}^5 - 15A_{14}^4 = A_{15}^5 - A_{15}^5 = 0$.

(4) $\frac{A_{12}^7}{A_{12}^6} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7} = 6$.

2.证明 (1) $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$, $nA_{n-1}^{m-1} = n$.

$\frac{(n-1)!}{(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!}$, 所以 $A_n^m = nA_{n-1}^{m-1}$.

(2) $A_8^8 - 8A_7^7 + 7A_6^6 = 8A_7^7 - 8A_7^7 + A_7^7 = A_7^7$.

3.解析 要停放 4 列不同的火车, 需要从 8 股岔道上任选 4 股岔道, 所以不同的停放方法数为 $A_8^4 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$.

6.2.3 组合

教材第 22 页 (练习)

1.解析 (1)甲乙, 甲丙, 甲丁, 乙丙, 乙丁, 丙丁.
(2)

冠军	甲	乙	甲	丙	甲	丁	乙	丙	乙	丁	丙	丁
亚军	乙	甲	丙	甲	丁	甲	丙	乙	丁	乙	丁	丙

2.解析 $\triangle ABC, \triangle ABD, \triangle ACD, \triangle BCD$.

3.解析 (1) $1+3=4, 1+7=8, 1+13=14, 3$

3.解析 由于 4 张人民币的币值都不相同, 组成的币值与顺序无关, 所以可以分为分别由 1 张、2 张、3 张、4 张人民币组成的币值, 共有不同的币值 $C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 15$ (种).

4.答案 (1)10 (2)60
(3)243 (4)mn

解析 (1)由于选出的人没有地位差异, 所以是组合问题, 不同方法的种数是 $C_5^3 = 10$.

(2)由于礼物互不相同, 与分送的顺序有关系, 所以是排列问题, 不同方法的种数是 $A_5^3 = 60$.

(3)由于 5 人中每个人都有 3 种选择,

$+7=10, 3+13=16, 7+13=20$, 共 6 个不相等的和.
(2) $1-3=-2, 1-7=-6, 1-13=-12, 3-7=-4, 3-13=-10, 3-1=2, 7-1=6, 13-1=12, 7-3=4, 13-3=10$, 共 10 个不相等的差.

6.2.4 组合数

教材第 25 页 (练习)

1.解析 (1) $C_6^2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$.
 $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$
(2) $C_7^3 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 36$.
(3) $C_7^3 - C_6^3 = 35 - 15 = 20$.
(4) $3C_8^3 - 2C_5^3 = 3 \times 56 - 2 \times 10 = 148$

2.证明 $\frac{m+1}{n+1} C_{n+1}^{m+1}$
 $\frac{n+1}{m+1} C_{n+1}^{m+1}$
 $\frac{(n+1)!}{(m+1)! [(n+1) - (m+1)]!}$
 $\frac{n!}{m! (n-m)!} = C_n^m$.

3.解析 (1)所有不同的选法数就是从 6 门考试成绩中任选 3 门的组合数, 所有选法种数为 $C_6^3 = 20$.

(2)先从物理、化学中选一门, 再从剩下的 4 门中选 2 门, 所有选法种数为 $C_2^1 C_4^2 = 12$.

(3)分两种情况: 物理、化学中只选一门和物理、化学两门都选, 所有选法种数为 $C_2^1 C_4^2 + C_2^2 C_4^1 = 16$.

习题 6.2

复习巩固

1.解析 (1) $5A_5^3 + 4A_4^2 = 5 \times 60 + 4 \times 12 = 348$.
(2) $A_4^1 + A_4^2 + A_4^3 + A_4^4 = 4 + 12 + 24 + 24 = 64$.
2.解析 (1) $C_{15}^3 = 455$.
(2) $C_{200}^{197} = C_{200}^3 = 1\,313\,400$.
(3) $C_6^3 \div C_8^4 = \frac{2}{7}$.
(4) $C_{n+1}^n \cdot C_n^{-2} = C_{n+1}^1 \cdot C_n^2 = (n+1)n(n-1) = n(n^2-1)$.

而且选择的时间对别人没有影响,所以是一个“可重复排列”问题,不同方法的种数是 $3^5 = 243$.

(4) 由于只需取出元素,而不用考虑顺序,所以可以分2步:第1步,从集合A中取出1个元素,有m种取法;第2步,从集合B中取出1个元素,有n种取法.所以共有取法mn种.

5. 解析 (1) 没有规定选什么样的书,所以只需从12本书中任选6本即可,其选法数为 $C_{12}^6 = 924$.

(2) 数学、物理、化学这三类书摆放在书架上有 A_3^3 种放法;而同类的4本不同的数学书之间可以有不同的顺序,有 A_4^4 种放法,同理,同类的物理、化学书之间也分别有 A_5^5, A_3^3 种放法,所以不同的放法有 $A_3^3 A_4^4 A_5^5 A_3^3 = 103680$ (种).

6. 解析 (1) 由“三个不共线的点确定一个平面”,得所确定的平面与点的顺序无关,所以可确定的平面数是 $C_8^3 = 56$.

(2) 由于四面体由四个顶点唯一确定,且与四个点的顺序无关,所以可确定的四面体个数是 $C_{10}^4 = 210$.

7. 解析 由于只需选出要做的题目即可,所以是组合问题,不同的选法种数是 $C_4^3 C_3^2 C_2^1 = 24$.

综合运用

8. 证明 (1) $A_{n+1}^{n+1} - A_n^n = (n+1) A_n^n - A_n^n = n A_n^n = n^2 A_{n-1}^{n-1}$.

$$\begin{aligned} (2) & \frac{(n+1)!}{k!} - \frac{n!}{(k-1)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!} - \frac{n!}{k!} \cdot k \\ &= \frac{(n-k+1)n!}{k!} \end{aligned}$$

9. 解析 可以分3步完成:第1步,安排4个音乐节目,共有 A_4^4 种排法;第2步,安排3个舞蹈节目,共有 A_3^3 种排法;第3步,安排2个曲艺节目,共有 A_2^2 种排法.所以不同的排法有 $A_4^4 A_3^3 A_2^2 = 288$ (种).

10. 解析 (1) 从每个小组的12名同学中选4名同学,这是一个组合问题,不同的选法数为 $C_{12}^4 = 495$.

(2) 解法一:先从12名同学中任选4名,再从所选4名同学中选1名作替

补,所以不同的选法数为 $C_{12}^4 C_4^1 = 1980$.

解法二:先从12名同学中任选1名作替补,再从剩下的11名同学中选3

名,所以不同的选法数为 $C_{12}^1 C_{11}^3 = 1980$.

(3) 由于所选4名同学要指定第一、二、三、四辩手,所以是排列问题,不同的选法数为 $A_{12}^4 = 11880$.

11. 解析 由于n个不同元素的全排列共有n!个,而n! ≥ n,所以n个不同的数值可以以不同的顺序形成其余的每一行,并且任意两行的顺序都不同.为使每一行都不重复,m可以取的最大值是n!.

12. 解析 (1) 分两类:第一类,从0,2,4,6中取3个数(不取0),只有1种取法,从1,3,5中任取2个数,有 C_3^2 种取法,组成不同的五位数的个数为 $C_3^2 A_5^3 = 360$;

第二类,从0,2,4,6中取3个数(其中一个数是0),有 C_3^2 种取法,再从1,3,5中任取2个数,有 C_3^2 种取法,组成

不同的五位数的个数为 $C_3^2 C_3^2 (A_5^3 - A_4^3)$

$= 864$.

所以共有不同的五位数的个数为 $360 + 864 = 1224$.

(2) 可以分步完成:第一步,最高位选5或6,有2种选法;第二步,其他各位从剩下的6个数中进行全排列,所以可以得到比5000000大的正整数的

个数为 $C_2^1 A_6^6 = 1440$.

13. 解析 由于选出的人没有地位差异,所以是组合问题.

(1) $C_5^2 C_4^2 = 60$.

(2) 其余2人从剩下的7人中任意选择,所以共有 $C_7^2 = 21$ 种选法.

(3) 间接法,在9人选4人的选法中,把男生甲和女生乙都不在内的情况去

掉,就得到符合条件的选法数,为 $C_9^4 -$

$C_7^4 = 91$.

(4) 解法一(间接法):在9人选4人的选法中,把只有男生和只有女生的情况排除掉,就得到符合条件的选法

数为 $C_9^4 - C_5^4 - C_4^4 = 120$.

解法二(直接法):分别按照含男生1、

2、3人分类,得到符合条件的选法数

为 $C_5^1 C_4^3 + C_5^2 C_4^2 + C_5^3 C_4^1 = 120$.

14. 解析 按照去的人数分类,去的人数分别为1、2、3、4、5、6,而去的人没有地位差异,所以不同的去法有 $C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 63$ (种).

以上内容仅为本文档的试
下载部分，为可阅读页数
的一半内容。如要下载或
阅读全文，请访问：

[https://d.book118.com/
928100027054006121](https://d.book118.com/928100027054006121)