

泸州市高 2021 级第三次教学质量诊断性考试

数学（文科）

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分.第 I 卷 1 至 2 页，第 II 卷 3 至 4 页.共 150 分.考试时间 120 分钟.

注意事项：

- 1.答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
- 2.选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题的答案标号涂黑.
- 3.填空题和解答题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内，作图题可先用铅笔绘出，确认后再用 0.5 毫米黑色签字笔描清楚，写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.
- 4.考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交.

第 I 卷（选择题 共 60 分）

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数 z 满足 $(2-i) \cdot z = 5i$ ，则 $z \cdot \bar{z} =$ ()

- A. $\sqrt{3}$ B. 3 C. $\sqrt{5}$ D. 5

【答案】D

【解析】

【分析】先根据复数的除法求出复数 z ，再根据共轭复数的定义及复数的乘法运算即可得解.

【详解】由 $(2-i) \cdot z = 5i$ ，

$$\text{得 } z = \frac{5i}{2-i} = \frac{5i(2+i)}{(2-i)(2+i)} = -1+2i,$$

所以 $\bar{z} = -1-2i$ ，

所以 $z \cdot \bar{z} = (-1+2i)(-1-2i) = 5$.

故选：D.

2. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$ ， $B = \{0, a\}$ ，若 $A \cap B$ 中有且仅有一个元素，则实数 a

的取值范围为 ()

A. $(-1, 3)$

B. $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

C. $(-3, 1)$

D. $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$

【答案】B

【解析】

【分析】根据不等式的解法求得 $A = \{x | -1 < x < 3\}$ ，结合 $A \cap B$ 中有且仅有一个元素，即可求解.

【详解】由不等式 $x^2 - 2x - 3 < 0$ ，即 $(x-3)(x+1) < 0$ ，解得 $-1 < x < 3$ ，即 $A = \{x | -1 < x < 3\}$ ，

因为 $B = \{0, a\}$ ，要使得 $A \cap B$ 中有且仅有一个元素，则 $a \leq -1$ 或 $a \geq 3$ ，

即实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.

故选：B.

3. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线相互垂直，焦距为12，则该双曲线的虚轴长为

()

A. 6

B. $6\sqrt{2}$

C. $9\sqrt{2}$

D. $12\sqrt{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】分析可得 $b = a$ ，求出 b 的值，即可得出双曲线的虚轴长.

【详解】双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，

由题意可知 $-\frac{b}{a} \cdot \frac{b}{a} = -1$ ，可得 $b = a$ ，所以， $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}b = 6$ ，则 $b = 3\sqrt{2}$ ，

因此，该双曲线的虚轴长为 $2b = 6\sqrt{2}$.

故选：B.

4. 从 3, 4, 5, 6, 7 这 5 个数中任取两个数，则所取两个数之积能被 3 整除的概率是 ()

A. $\frac{3}{5}$

B. $\frac{4}{5}$

C. $\frac{7}{10}$

D. $\frac{3}{10}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用组合计数，求出总的不同结果和两数之积能被 3

整除的不同取法种数,利用古典概型知识求比值即得.

【详解】从 3, 4, 5, 6, 7 这 5 个数中一次性随机地取两个数, 共有 $C_5^2 = 10$ 种取法,

其中所取两个数之积能被 3 整除包含 (3,4), (3,5), (3,6), (3,7), (4,6), (5,6), (6,7)

共七种取法, 所以概率为 $\frac{7}{10}$,

故选: C.

5. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1 = -14$, $a_2 + a_4 = -20$, 则 S_n 取最小值时, n 的取值为()

A. 6

B. 7

C. 7 或 8

D. 8 或 9

【答案】C

【解析】

【分析】要求 S_n 取最小值时, 先求 a_n 的通项, 由 $2a_3 = a_2 + a_4 = -20$ 可得 $a_3 = -10$, 求得 $d = 2$, 进而求得 $a_n = 2n - 16$, 根据 a_n 的正负情况即可得解.

【详解】根据等差数列的性质可得 $2a_3 = a_2 + a_4 = -20$,

所以 $a_3 = -10$, 所以 $d = \frac{a_3 - a_1}{2} = 2$,

所以 $a_n = 2n - 16$, $a_8 = 0$,

当 $n \leq 8$ 时, $a_n \leq 0$,

当 $n > 9$ 时, $a_n > 0$,

所以当 n 的取值为 7 或 8 时, S_n 取最小值.

故选: C

6. 一组数据 $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ 满足 $x_i - x_{i-1} = 2$ ($2 \leq i \leq 10$), 若去掉 x_1, x_{10} 后组成一组新数据, 则新数据与原数据相比, 下列说法正确的是()

A. 方差变小

B. 平均数变大

C. 极差变大

D. 中位数变小

【答案】A

【解析】

【分析】根据极差, 平均数, 方差与中位数的定义计算出去掉 x_1, x_{10} 前后的相关数据, 比较后即可得解.

【详解】由于 $x_i - x_{i-1} = 2$ ($2 \leq i \leq 10$),

故 $x_2 = x_1 + 2$, $x_3 = x_1 + 4$, ..., $x_9 = x_1 + 16$, $x_{10} = x_1 + 18$,

对 B: 原来的平均数为 $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{10}}{10} = \frac{10x_1 + 90}{10} = x_1 + 9$,

去掉 x_1, x_{10} 后的平均数为 $\frac{x_2 + x_3 + \dots + x_9}{8} = \frac{8x_1 + 72}{8} = x_1 + 9$,

平均数不变, 故 B 错误;

对 A: 原来的方差为 $\frac{(x_1 - x_1 - 9)^2 + (x_2 - x_1 - 9)^2 + \dots + (x_{10} - x_1 - 9)^2}{10} = 33$,

去掉 x_1, x_{10} 后的方差为 $\frac{(x_2 - x_1 - 9)^2 + (x_3 - x_1 - 9)^2 + \dots + (x_9 - x_1 - 9)^2}{8} = 21$,

方差变小, 故 A 正确;

对 C: 原来的极差为 $x_{10} - x_1 = 18$, 去掉 x_1, x_{10} 后, 极差为 $x_9 - x_2 = 14$,

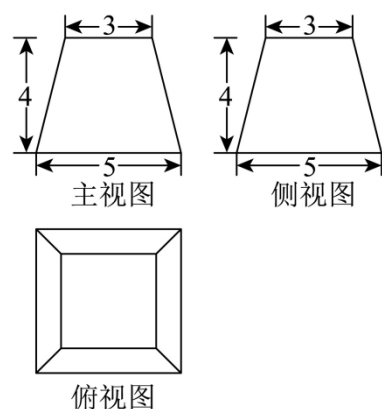
极差变小, 故 C 错误;

对 D: 原来的中位数与现在的中位数均为 $\frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{2x_1 + 18}{2} = x_1 + 9$,

故中位数不变, 故 D 错误.

故选: A.

7. 《九章算术》是一本综合性的历史著作, 全书总结了战国、秦、汉时期的数学成就, 标志着中国古代数学形成了完整的体系. 在书中的《商功》一章里记录了“方亭”的概念, 如图是一个“方亭”的三视图, 则它的侧面积为 ()



A. $16\sqrt{17}$

B. $16\sqrt{15}$

C. 64

D. $8\sqrt{17}$

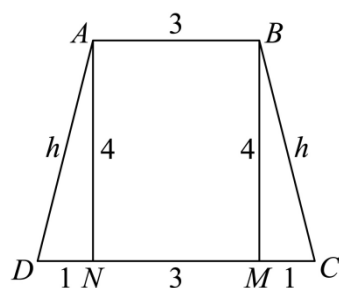
【答案】A

【解析】

【分析】由等腰梯形的性质先求出侧面的高, 可求得侧面的面积.

【详解】显然“方亭”就是正四棱台, 由四个相同的梯形侧面和两个正方形底面组成.

如图正视图中，



AD, BC 即为侧面的高，由勾股定理，可得侧高 $h = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$ ，

所以每个侧面的面积 $S = \frac{1}{2}h(3+5) = 4\sqrt{17}$ ，

所以侧面积为 $4S = 16\sqrt{17}$ 。

故选：A.

8. 已知点 $M(4,4)$ 在抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上， F 为 C 的焦点，直线 MF 与 C 的准线相交于点

N ，则 $|NF| =$ ()

- A. $\frac{20}{3}$ B. $\frac{10}{3}$ C. $\frac{15}{2}$ D. $\frac{15}{4}$

【答案】B

【解析】

【分析】代点计算可得抛物线方程，即可得焦点纵坐标与准线方程，即可得直线 MF 的方程，求出两直线交点，即可得 N 点坐标，结合两点距离公式即可得解.

【详解】由 $M(4,4)$ ，有 $16 = 2p \times 4$ ，即 $p = 2$ ，即抛物线 $C: y^2 = 4x$ ，

则 $F(1,0)$ ，准线方程为： $x = -1$ ，

故 $l_{MF}: y = \frac{4}{4-1}(x-1)$ ，整理得 $l_{MF}: y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$ ，

令 $x = -1$ ，则 $y = -\frac{4}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{8}{3}$ ，即 $N(-1, -\frac{8}{3})$ ，

则 $|NF| = \sqrt{(-1-1)^2 + \left(-\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{10}{3}$ 。

故选：B.

9. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x - \frac{2\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 在 $[0, \pi]$ 有且仅有三个零点，则 ω 的取值范围是 ()

A. $\left[\frac{8}{3}, \frac{11}{3}\right]$

B. $\left[\frac{8}{3}, \frac{11}{3}\right)$

C. $\left[\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right]$

D. $\left[\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right)$

【答案】B

【解析】

【分析】当 $0 \leq x \leq \pi$ 时, $-\frac{2\pi}{3} \leq \omega x - \frac{2\pi}{3} \leq \omega\pi - \frac{2\pi}{3}$, 依题意有 $2\pi \leq \omega\pi - \frac{2\pi}{3} < 3\pi$, 解出即可.

【详解】因为 $0 \leq x \leq \pi$, 所以 $-\frac{2\pi}{3} \leq \omega x - \frac{2\pi}{3} \leq \omega\pi - \frac{2\pi}{3}$,

因为函数 $f(x) = \sin\left(\omega x - \frac{2\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 在 $[0, \pi]$ 有且仅有三个零点,

结合正弦函数的图象可知 $2\pi \leq \omega\pi - \frac{2\pi}{3} < 3\pi$,

解得 $\frac{8}{3} \leq \omega < \frac{11}{3}$,

故选: B.

10. 已知函数 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 满足 $f(x) + f(4-x) = 0$, 若函数 $f(x)$ 与 $y = \frac{1}{x-2}$ 图象的交点横坐标分

别为 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 则 $\sum_{i=1}^n x_i = (\quad)$

A. $4n$

B. $2n$

C. n

D. 0

【答案】B

【解析】

【分析】依题意可得 $f(2+x) = -f(2-x)$, 即可得到函数的图象关于 $(2, 0)$ 对称, 再根据对称性计算可得结论.

【详解】因为 $f(x) + f(4-x) = 0$, 所以 $f(2+x) + f(2-x) = 0$,

所以函数的图象关于 $(2, 0)$ 对称, 又函数 $y = \frac{1}{x-2}$ 关于 $(2, 0)$ 对称,

则 $y = f(x)$ 与 $y = \frac{1}{x-2}$ 的交点应为偶数个, 且关于 $(2, 0)$ 对称,

所以 $\sum_{i=1}^n x_i = 4 \times \frac{n}{2} = 2n$.

故选: B.

11. 已知圆锥的体积为 24π , 其侧面展开图为一个半圆, 则该圆锥的内切球的表面积为 $(\quad)$

A. 4π

B. 8π

C. 12π

D. 16π

【答案】D

【解析】

【分析】设圆锥的底面半径为 r ，高为 h ，由题意可得
$$\begin{cases} \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = 24\pi \\ \frac{2\pi r}{\sqrt{r^2 + h^2}} = \pi \end{cases}$$
，可求得 r ， h ，进而可得轴截面是

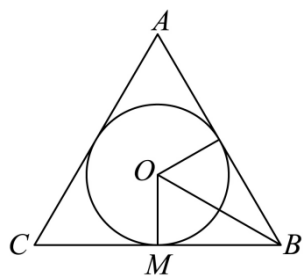
等边三角形，求得等边三角形的内切圆的半径即可求得圆锥的内切球的表面积。

【详解】设圆锥的底面半径为 r ，高为 h ，母线长为 $\sqrt{r^2 + h^2}$ ，

由题意可得
$$\begin{cases} \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = 24\pi \\ \frac{2\pi r}{\sqrt{r^2 + h^2}} = \pi \end{cases}$$
，解得
$$\begin{cases} r = 2\sqrt{3} \\ h = 6 \end{cases}$$
，

所以母线长为 $\sqrt{r^2 + h^2} = 4\sqrt{3}$ ，底面圆直径为 $4\sqrt{3}$ ，

可得圆锥的轴截面为等边三角形，该等边三角形内切圆的半径即为圆锥内切球的半径，



由等边三角形的性质可得内切球的半径 $R = OM = BM \times \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 2\sqrt{3} = 2$ ，

所以圆锥内切球的表面积为 $4\pi R^2 = 16\pi$ 。

故选：D。

12. 已知 $x > 0$ ， $e^x + \ln y = 1$ ，给出下列不等式

① $x + \ln y < 0$ ；② $e^x + y > 2$ ；③ $\ln x + e^y < 0$ ；④ $x + y > 1$

其中一定成立的个数为（ ）

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】由 $e^x + \ln y = 1$ 可得 $x = \ln(1 - \ln y)$ ，分别构造 $F(y) = \ln[y(1 - \ln y)]$ ， $g(y) = 1 - \ln y + y$ 和

$h(y) = \ln(1 - \ln y) + y$ ，通过求导，求出单调性和最值可判断①③④；取特值可判断②。

【详解】由 $x > 0$, $e^x + \ln y = 1$, 可得: $\ln y = 1 - e^x$,

因为 $x > 0$, 所以 $e^x > 1$, 所以 $1 - e^x < 0$, 所以 $\ln y < 0$, 解得: $0 < y < 1$,

由 $e^x + \ln y = 1$ 可得: $\ln e^x = \ln(1 - \ln y)$, 所以 $x = \ln(1 - \ln y)$,

对于命题①, $x + \ln y = \ln(1 - \ln y) + \ln y = \ln[y(1 - \ln y)]$,

$$\text{令 } F(y) = \ln[y(1 - \ln y)], F'(y) = \frac{(1 - \ln y) + y\left(-\frac{1}{y}\right)}{y(1 - \ln y)} = \frac{-\ln y}{y(1 - \ln y)} > 0,$$

所以 $F(y)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 因为 $F(y) < F(1) = 0$,

所以 $x + \ln y < 0$, 故命题①正确;

对于命题②, 由 $e^x + \ln y = 1$ 可得: $e^x = 1 - \ln y$,

$$\text{所以 } g(y) = 1 - \ln y + y, g'(y) = -\frac{1}{y} + 1 = \frac{-1 + y}{y} < 0,$$

所以 $g(y)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

所以 $g(y) > g(1) = 2$, 所以 $e^x + y > 2$, 故命题②正确;

对于命题③, 由 $e^x + \ln y = 1$, 取 $x = 1$, 所以 $y = e^{1-e} \in (0, 1)$,

所以 $\ln x + e^y = e^y > 0$, 所以③错误.

对于命题④, 因为 $x = \ln(1 - \ln y)$, 所以 $x + y = \ln(1 - \ln y) + y$, $0 < y < 1$.

$$\text{令 } h(y) = \ln(1 - \ln y) + y, h'(y) = \frac{-\frac{1}{y}}{1 - \ln y} + 1 = \frac{1}{y(\ln y - 1)} + 1 = \frac{1 + y \ln y - y}{y(\ln y - 1)},$$

$$\text{令 } f(y) = 1 + y \ln y - y, f'(y) = \ln y < 0,$$

所以 $f(y) = 1 + y \ln y - y$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

$f(y) > f(1) = 0$, 所以 $h'(y) < 0$, 所以 $h(y)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

所以 $h(y) > h(1) = 1$, 所以 $x + y > 1$, 故命题④正确.

故选: C.

【点睛】方法点睛: 利用导数证明不等式问题, 方法如下:

(1) 直接构造函数法：证明不等式 $f(x) > g(x)$ (或 $f(x) < g(x)$) 转化为证明 $f(x) - g(x) > 0$ (或 $f(x) - g(x) < 0$)，进而构造辅助函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ ；

(2) 适当放缩构造法：一是根据已知条件适当放缩；二是利用常见放缩结论；

(3) 构造“形似”函数，稍作变形再构造，对原不等式同解变形，根据相似结构构造辅助函数.

第Ⅱ卷（非选择题 共 90 分）

注意事项：

(1) 非选择题的答案必须用 0.5 毫米黑色签字笔直接答在答题卡上，作图题可先用铅笔绘出，确认后再用 0.5 毫米黑色签字笔描清楚，答在试题卷和草稿纸上无效.

(2) 本部分共 10 个小题，共 90 分.

13. 已知函数 $f(x) = \left(\frac{a}{2^x + 1} - 1 \right) \sin x$ 是偶函数，则实数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】2

【解析】

【分析】由偶函数的性质可得 $f(-1) = f(1)$ ，即可得出答案.

【详解】因为函数 $f(x) = \left(\frac{a}{2^x + 1} - 1 \right) \sin x$ 的定义域为 $\mathbb{R}$ ，

函数 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(-1) = f(1)$ ，

则 $f(-1) = \left(\frac{a}{2^{-1} + 1} - 1 \right) \sin(-1) = -\left(\frac{2a}{3} - 1 \right) \sin 1$ ，

$f(1) = \left(\frac{a}{3} - 1 \right) \sin 1$ ，所以 $-\left(\frac{2a}{3} - 1 \right) = \frac{a}{3} - 1$ ，

解得： $a = 2$ ，经检验满足题意.

故答案为：2.

14. 已知非零向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ ，且 $(\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{b}$ ，则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{\pi}{3}$ 或 60°

【解析】

【分析】由已知得 $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$ ，再利用数量积公式化简即得解.

【详解】因为 $(\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{b}$ ，所以 $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - |\vec{b}|^2 = 0$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/935300241042011201>