储油罐的变位识别与罐容表标定

通常每个加油站地下储油罐都有自己的罐容表。但是储油罐在使用一段时间后地基变形，罐体即会发生变位，因此需要对罐容表进行重新标定。本文主要研究解决储油罐的变位识别与罐容表的重新标定问题。

通过对问题的具体分析，我们发现储油罐具有高度的中心对称性，而且本题主要研究储油罐容积V与油位高度 h 的函数关系，因此我们独辟蹊径，建立了直观的微分方程模型，即 $\frac{dV}{dh}=r_0V(1-\frac{V}{V_m})$。

对第一个问题，我们通过几何关系引入参数变量变位角α和β，直接利用已知的变位角对函数进行拟合，得到了变位角α和β、油位高度 h 及储油罐容积V的具体函数关系式。我们根据实际情况对原模型进行了改进：考虑了储油罐内进出油管等设施对储油罐容积的影响，修正了比例系数r_0(将r_0视为是油位高度 h 的函数)。利用已知数据得出变位后罐容表的变化规律：一定范围内，随着α角的增大，相同高度的储油罐对应的罐容表值偏小。并且对罐体变位后的罐容表进行标定。

在第二个问题上，对应模型一的公式，确定它在另一形状的体系（模型二）中的参数值。然后，依据显示油高、显示储油量间存在的函数关系，对公式在新模型下的适用性进行初步检验，效果良好。接着，利用显示储油量随油高变化时差值的变化规律，巧妙地求出了倾斜时容积半满位置的真实储油值，进而求出各油位高度对应的真实储油量。将求得的数据代入公式进行拟合，通过先后分别控制α和β变量的方法，简化模型从而求出变位角α和β，得到$\alpha\approx 6.21^\circ$、$\beta\approx 9.71^\circ$。最后，利用拟合的函数对罐容表重新标定。

本模型建立在微分方程基础上，简单易懂，并且根据实际问题进行了模型修正和多次检验，符合实际且可操作性强，同时利用函数拟合思想，避免了题目中一部分过于复杂的积分。该模型可适用于大多数纵向和横向变位情况，而且本模型得到的结果比较精确，第一问的相对误差基本控制在 0~1.5%，而第二问的相对误差基本控制在 0~3%。

关键词：微分方程模型；罐容表；含参重积分；变位识别；函数拟合

问题重述

通常储存燃油的地下储油罐，一般都有与之配套的“油位计量管理系统”，采用流量计和油位计来测量进/出油量与罐内油位高度等数据，通过预先标定的罐容表（即罐内油位高度与储油量的对应关系）进行实时计算，以得到罐内油位高度和储油量的变化关系。

但储油罐在使用一段时间后，由于诸多等原因，使罐体的位置会发生纵向倾斜和横向偏转等变化，从而导致罐容表发生改变，需要对罐容表进行重新标定。

一、对于小椭圆型储油罐，现在分别对罐体无变位和倾斜角为α=4.1^{0}的纵向变位两种情况做了实验，通过实验数据来研究罐体变位后对罐容表的影响，并给出间隔为1cm时的罐容表标定值。

二、对于实际的储油罐，建立罐体变位后标定罐容表的数学模型，利用已给数据确定变位参量，并给出罐体变位后油位高度间隔为10cm的罐容表，进一步检验模型的合理性和方法的正确性。

模型假设

一、储油罐的容积对油面高度的变化率是油面高度的函数，且假设倾角变化不是很大时这种函数关系不变。

二、进出油管及油位探针等对油量的影响可以近似认为与油面高度呈线性关系。

三、对于实际储油罐（正截面为圆形），横向倾斜并未改变罐内油的分布，只是引起显示油面高度偏大。

四、不考虑倾斜后油量很少时无法显示油面高度的情况。

五、油罐出（进）油量的值是真实准确的，忽略油罐内的汽油挥发作用造成的油量损失。

六、忽略罐内气压变化对油位计量的影响。

七、油位探针始终与罐底垂直，油浮子沿探针可自由灵活移动。

八、测量时段内储油罐位置无变动。

文中的符号及说明

h	油位高度
h_0	储油量为一半时的油高
$V(h)$	油高为 h 时的储油量
$V_{\max}$，V_m	总储油量

r	V随 h 变化的比例系数
α	纵向倾斜角度
d	油位探针距中心的距离
R	中心距下底面的距离
β	横向偏转角度
$V^{'}$	实际储油罐两侧球冠的体积
a,b,c	函数拟合时的待定系数

模型的建立与求解

微分方程模型的建立与求解

为了找出油位高度与储油量的对应关系，在储油量增加的过程中，由于储油罐的横截面形状是上下窄中间宽的形状，单位高度内油量的增加值随储油量的增加而出现先增加而后减小的趋势。这样可以发现油位高度与储油量的对应关系图大致是一个S 型曲线，因而可以将此模型和 Logistic 人口模型进行对比和修正。 高度为h时储油量为$V(h)$，考虑h到$h+\Delta h$高度内油量的增长量，有

$$V(h+\Delta h)-V(h)=rV(h)\Delta h$$

其中 r 随着储油量的变化而变化，但它呈现出随高度增大而增大的趋势。在上式中当Δh趋向于 0 时，有

$$\frac{dV}{dh}=$$

由于要对 r 进行修正，在此引入常数$V_{\max}$（简记为V_m），进而本模型将 r 值修改为

$$r(1-\frac{V(h)}{V_m}),r>0$$

从而有以下模型

$$\begin{cases}\dfrac{dV}{Vdh}=r_0(1-\dfrac{V(h)}{V_m}) \\ V(h_0)=V\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{dV}{dh}=r_0(1-\dfrac{V}{V_m})V,r>0 \\ V(h_0)=V_0\end{cases}$$

这个模型的解为

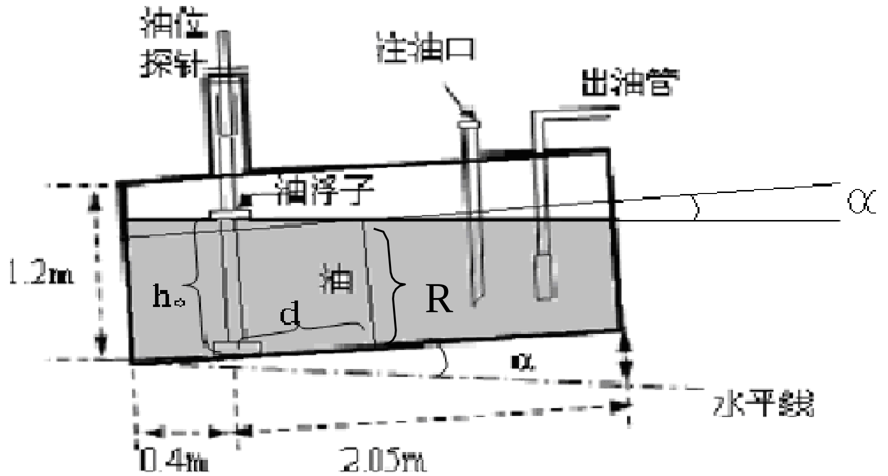
$$V(h)=\frac{V_m}{1+(\frac{V_m}{V_0}-1)e^{-r_0(h-h_0)}} \qquad ①$$

其中初始条件为

$$V(h_0)=V_0 \qquad ②$$

由于当储油量为一半时，单位高度内油量增长最快，即此时的 $\frac{dV}{dh}$ 最大。因此，当实际储油量一半 $\frac{V_m}{2}$ 时对应的油位计高度为 h_0。

下面就是计算 h_0 所用到的图形。



通过图形的几何关系计算得知

$$h_0=R+d\tan\alpha \qquad ③$$

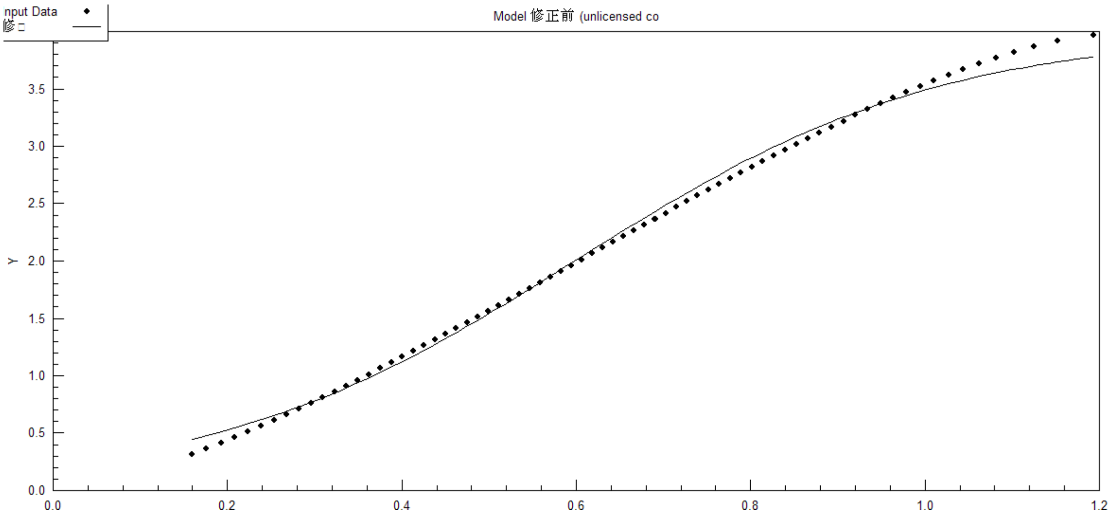
其中 h_0, R, d, α 分别如图标注。

把③式代入①式，又由于 $V_0=\frac{V_m}{2}$，①式可化简为如下形式

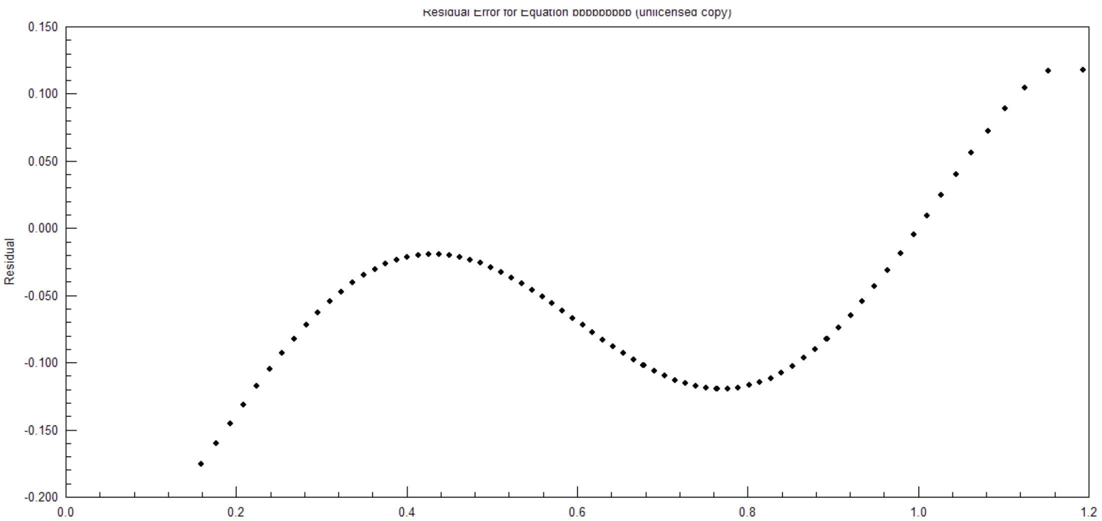
$$V(h)=\frac{V_m}{1+e^{-r_0(h-R-d\tan\alpha)}} \qquad ④$$

利用 Datafit 软件，对数据进行拟合，用此模型拟合出来的曲线做分析：发现中间数

据拟合较好，但是两侧数据绝对误差较大，具体情况见下图



用④式对无倾斜数据进行拟合的曲线与散点图的比较 图表 1



用④式对无倾斜数据进行拟合的曲线与散点图的绝对误差 图表 2

拟合后的模型的具体形式为

$$V(h)=\frac{4.11015}{1+e^{-4.6563(h-0.6)}}$$

模型的修正:

于是考虑对模型和模型参数参数进行必要的修改和订正。由于两侧数据误差较大，发现随着h高度的增加误差出现先变小后边大的趋势，这刚好符合二次抛物线的规律，于是想到了要对 r_0 进行修正，令 $r_0=ah^2-1.2ah+b$，同时考虑进出油管等对储油量