压轴题 01　正方形选、填压轴题

高分必抢

题型01　正方形与“赵爽弦图”的综合

高分秘籍

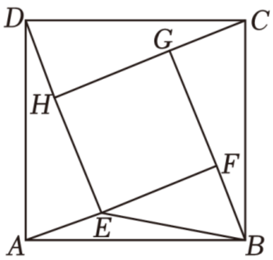
正方形与“赵爽弦图”综合题思考要点：

1、此时的正方形有 2 个，做题中，常用等量关系为——①正方形边长相等；②正方形的面积=边长²

2、有“赵爽弦图”就有直角三角形全等，对应边相等要多注意；

3、“赵爽弦图”就是勾股定理，所以此类问题，最终都要找到一个适合的直角三角形，用勾股定理列方程求长度。

1．（2023•杭州）第二十四届国际数学家大会会徽的设计基础是 1700 多年前中国古代数学家赵爽的“弦图”．如图，在由四个全等的直角三角形（$\triangle DAE$，$\triangle ABF$，$\triangle BCG$，$\triangle CDH$）和中间一个小正方形 $EFGH$ 拼成的大正方形 $ABCD$ 中，$\angle ABF>\angle BAF$，连接 BE．设 $\angle BAF=\alpha$，$\angle BEF=\beta$，若正方形 $EFGH$ 与正方形 $ABCD$ 的面积之比为 1：n，$\tan\alpha=\tan^2\beta$，则 $n=$（　　）



A．5　　B．4　　C．3　　D．2

【分析】设 $AE=a$，$DE=b$，则 $BF=a$，$AF=b$，解直角三角形可得$\frac{a}{b}=\left(\frac{a}{b-a}\right)^2$，化简可得 $(b-a)^2=ab$，$a^2+b^2=3ab$，结合勾股定理及正方形的面积公式可求得 $S_{正方形EFGH}$；$S_{正方形ABCD}=1:3$，进而可求解 n 的值．

【解答】解：设 $AE=a$，$DE=b$，则 $BF=a$，$AF=b$，

$\because \tan\alpha=\frac{a}{b}$，$\tan\beta=\frac{a}{b-a}$，$\tan\alpha=\tan^2\beta$，

$\therefore \frac{a}{b}=\left(\frac{a}{b-a}\right)^2$，

$\therefore (b-a)^2=ab$，

$\therefore a^2+b^2=3ab$，

$\because a^2+b^2=AD^2=S_{正方形ABCD}$，$(b-a)^2=S_{正方形EFGH}$，

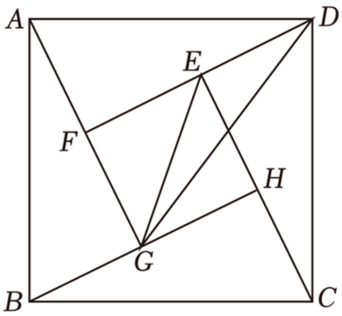
$\therefore S_{正方形EFGH}$：$S_{正方形ABCD}=ab$：$3ab=1$：3，

$\because S_{正方形EFGH}$：$S_{正方形ABCD}=1$：n，

$\therefore n=3$．

故选：C．

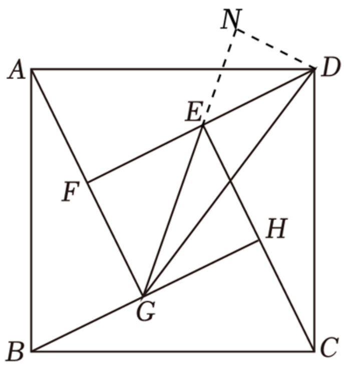
2．（2023•淄博）勾股定理的证明方法丰富多样，其中我国古代数学家赵爽利用“弦图”的证明简明、直观，是世界公认最巧妙的方法．“赵爽弦图”已成为我国古代数学成就的一个重要标志，千百年来倍受人们的喜爱．小亮在如图所示的“赵爽弦图”中，连接 EG，DG．若正方形 $ABCD$ 与 $EFGH$ 的边长之比为$\sqrt{5}$：1，则 $\sin\angle DGE$ 等于（　　）



A．$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　B．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　C．$\dfrac{3}{10}\sqrt{10}$　　D．$\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$

【分析】由题意得：$\begin{cases}a^2+b^2=(\sqrt{5}x)^2\\a-b=x\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=2x\\b=x\end{cases}$，进而求解．

【解答】解：过点 D 作 $ND\perp GE$ 交 GE 的延长线于点 N，



由题意知，两个正方形之间是 4 个相等的三角形，

设$\triangle ABG$ 的长直角边为 a，短直角边为 b，大正方形的边长为$\sqrt{5}x$，小正方形的边长为 x，

即 $ED=BG=HC=AF=b$，$AG=BH=CE=DF=a$，$EG=\sqrt{2}b$，

由题意得：$\begin{cases}a^2+b^2=(\sqrt{5}x)^2\\a-b=x\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=2x\\b=x\end{cases}$，

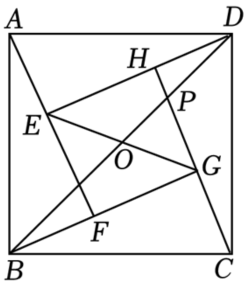
在△*GDE* 中，$EG=\sqrt{2}GH=\sqrt{2}b$，则 $NE=ND=\frac{\sqrt{2}}{2}ED=\frac{\sqrt{2}}{2}b=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，$EG=\sqrt{2}GH=\sqrt{2}(a-b)=\sqrt{2}x$，

则 $\tan\angle DGE=\frac{ND}{GN}=\frac{1}{3}$，

则 $\sin\angle DGE=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

故选：*A*．

3．（2023 春•武汉期末）大约公元 222 年我国汉代数学家赵爽为《周髀算经》一书作序时介绍了“勾股圆方图”，亦称“赵爽弦图”，如图，四个全等的直角三角形拼成大正方形 *ABCD*，中空的部分是小正方形 *EFGH*，连接 *EG*，*BD* 相交于点 *O*，*BD* 与 *HC* 相交于点 *P*，若 *GO*＝*GP*，则直角三角形的边 *CG* 与 *BG* 之比是（　　）



A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{2}{5}$　　C．$\sqrt{2}-1$　　D．$\sqrt{3}-\sqrt{2}$

【分析】先证明△*BPG*≌△*BCG*（*ASA*），得出 *PG*＝*CG*．设 *OG*＝*PG*＝*CG*＝*x*，则 *EG*＝2*x*，$FG=\sqrt{2}x$，即可得出答案．

【解答】解：∵四边形 *EFGH* 为正方形，

∴∠*EGH*＝45°，∠*FGH*＝90°，

∵*OG*＝*GP*，

∴∠*GOP*＝∠*OPG*＝67.5°，

∴∠*PBG*＝22.5°，

又∵∠*DBC*＝45°，

∴∠*GBC*＝22.5°，

∴∠*PBG*＝∠*GBC*，

∵∠*BGP*＝∠*BGC*＝90°，*BG*＝*BG*，

∴△*BPG*≌△*BCG*（*ASA*），

∴$PG=CG$.

设 $OG=PG=CG=x$，

∵O 为 EG，BD 的交点，

∴$EG=2x$，$FG=\sqrt{2}x$，

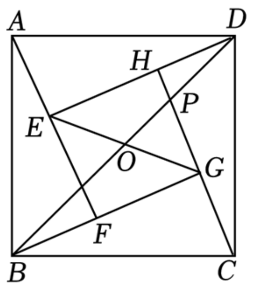
∵四个全等的直角三角形拼成“赵爽弦图”，

∴$BF=CG=x$，

∴$BG=x+\sqrt{2}x$，

∴$\frac{CG}{BG}=\frac{x}{x+\sqrt{2}x}=\sqrt{2}-1$，

故选：C.



题型02　正方形与“面积”的综合

高分秘籍

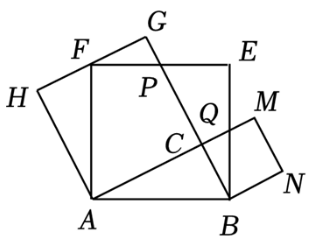
求面积就是求长度，此类综合题在正方形的基础上，还有重点考虑以下几点规律：

①有正方形就有边相等，角=90°，当正方形很多时，注意能否证三角形全等来转化等量线段；

②所求图形面积规则，则直接求面积（或面积的表达式），图形面积不规则，则间接求其面积（割补法）；

③求面积就是求长度，等量关系很多时，求长度勿忘勾股定理；

1．（2023•金华）如图，在 Rt△ABC 中，∠$ACB=90°$，以其三边为边在 AB 的同侧作三个正方形，点 F 在 GH 上，CG 与 EF 交于点 P，CM 与 BE 交于点 Q，若 $HF=FG$，则 $\frac{S_{四边形PCQE}}{S_{正方形ABEF}}$ 的值是（　　）



A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{5}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{12}$　　D．$\frac{6}{25}$

【分析】由正方形的性质得 $AB=AF$，$AC=AH$，∠$BAF=∠CAH=90°$，则∠$BAC=∠FAH=90°-∠$

CAF，可证明△ABC≌△AFH，得 $BC=HF$，而 $HF=FG$，所以 $BC=FG$，再证明△BCQ≌△FGP，得 $CQ=GP$，设 $AC=AH=GH=2m$，则 $HF=FG=BC=m$，可求得 $BE=AF=\sqrt{5}m$，由$\frac{CQ}{BC}=\frac{GP}{FG}=\tan\angle GFP=\tan\angle HAF=\frac{HF}{AH}=\frac{1}{2}$，得 $CQ=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}m$，由$\frac{PE}{BE}=\frac{CP}{BC}=\frac{1}{2}=\tan\angle PBE$，得 $PE=\frac{1}{2}BE=\frac{\sqrt{5}}{2}m$，即可求得 $S_{四边形PCQE}=m^2$，$S_{正方形ABEF}=5m^2$，则$\frac{S_{四边形PCQE}}{S_{正方形ABEF}}=\frac{m^2}{5m^2}=\frac{1}{5}$，于是得到问题的答案.

【解答】解：∵四边形 $ABEF$、四边形 $ACGH$、四边形 $BCMN$ 都是正方形，

∴$AB=AF$，$AC=AH$，$\angle BAF=\angle CAH=90°$，

∴$\angle BAC=\angle FAH=90°-\angle CAF$，

∴△ABC≌△AFH（SAS），

∴$BC=HF$，

∵$HF=FG$，

∴$BC=FG$，

∵$\angle ACG=\angle ACB=\angle BCM=90°$，

∴$\angle ACG+\angle ACB=180°$，$\angle ACB+\angle BCM=180°$，

∴B、C、G 三点在同一条直线上，A、C、M 三点在同一条直线上，

∵$\angle BCQ=\angle G=\angle E=90°$，$\angle BPE=\angle FPG$，

∴$\angle CBQ=90°-\angle BPE=90°-\angle FPG=\angle GFP$，

∴△BCQ≌△FGP（ASA），

∴$CQ=GP$，

设 $AC=AH=GH=2m$，则 $HF=FG=BC=m$，

∴$BE=AF=\sqrt{(2m)^2+m^2}=\sqrt{5}m$，

∵$\angle G=\angle H=\angle AFE=90°$，

∴$\angle GFP=\angle HAF=90°-\angle AFH$，

∴$\frac{CQ}{BC}=\frac{GP}{FG}=\tan\angle GFP=\tan\angle HAF=\frac{HF}{AH}=\frac{1}{2}$，

∴$CQ=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}m$，

∵$\angle E=\angle BCQ=90°$，

∴$\frac{PE}{BE}=\frac{CP}{BC}=\frac{1}{2}=\tan\angle PBE$，

$\therefore PE=\frac{1}{2}BE=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}m=\frac{\sqrt{5}}{2}m$，

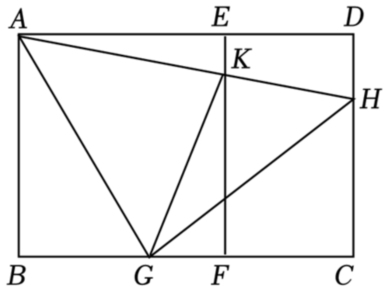
$\therefore S_{\text{四边形}PCQE}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}m\times\frac{\sqrt{5}}{2}m-\frac{1}{2}m\times\frac{1}{2}m=m^2$，

$\because S_{\text{正方形}ABEF}=(\sqrt{5}m)^2=5m^2$，

$\therefore \frac{S_{\text{四边形PCQE}}}{S_{\text{正方形ABEF}}}=\frac{m^2}{5m^2}=\frac{1}{5}$，

故选：B．

2．（2023春•镇海区校级期末）如图，在长方形 $ABCD$ 中，点 E、F 分别落在 AD、BC 上，连接 EF 得到正方形 $ABFE$．在 BF 上取一点 G，DC 上取一点 H，使得 $GF=DH$，连接 GK．若 $AG\perp GH$，知道下列哪个条件，则可求正方形 $ABFE$ 的面积（　　）



A．△KGF 的周长　　B．△KGF 的面积

C．梯形 $AGFE$ 的周长　　D．梯形 $AGFE$ 的面积

【分析】先由长方形和正方形的性质得到 $AB=EF=CD=AE=BF$，$\angle ABC=\angle C=\angle AEK=\angle BAE=90^\circ$，证明△$ABG$≌△$GCH$ 得到 $AG=GH$，则 $\angle GAH=\angle GHA=45^\circ$；如图所示将△$EAK$ 绕点旋转得到△BAM，证明△AMG≌△AKG，得到 $MG=KG$，进而推出 $EF=\frac{KF+KG+GF}{2}$，则当知道△KGF 的周长时，则可知道 EF 的长，即可求出正方形 $ABFE$ 的面积．

【解答】解：由题意得 $AB=EF=CD=AE=BF$，$\angle ABC=\angle C=\angle AEK=\angle BAE=90^\circ$，

$\because GF=DH$，

$\therefore BF-GF=CD-DH$，即 $BG-CH$，

$\because AG\perp GH$，

$\therefore \angle BGA+\angle BAG=90^\circ=\angle BGA+\angle CGH$，

$\therefore \angle BAG=\angle CGH$，

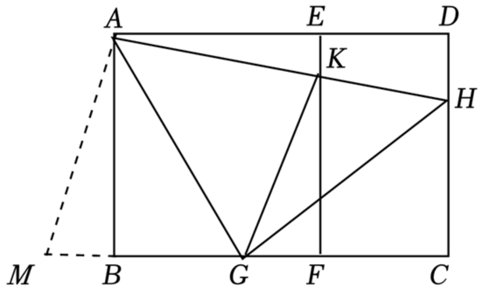
$\therefore$ △BGA≌△GCH（AAS），

$\therefore AG=GH$，

$\therefore \angle GAH=\angle GHA=45^\circ$，

∴$\angle EAK+\angle BAG=45°$，

如图所示，



将△EAK绕点旋转得到△BAM，

∴$AM=AK$，$BM=EK$，$\angle ABM=\angle AEK-90°$，$\angle BAM=\angle EAK$，

∴$\angle ABM+\angle ABG=180$，$\angle MAG=\angle BAM+\angle BAG=\angle EAK+\angle BAG=45°$，

∴$\angle MAG=\angle KAG=45°$，$M$、$B$、$G$三点共线，

又∵$AG=AG$，

∴△AMG≌△AKG（SAS），

∴$MG=KG$，

∴$BM+BG=MG=KG$，

∴$EK+BG=KG$，

∴$EF-KF+BF-GF=KG$，

∴$EF+BF=KF+KG+GF$，

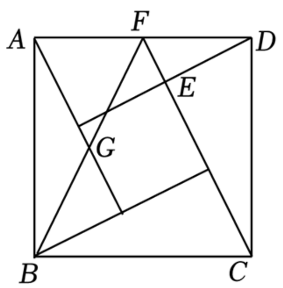
∴$EF=\frac{KF+KG+GF}{2}$，

当知道△KGF的周长时，则可知道EF的长，

即可求出正方形$ABFE$的面积，

故选A．

3．（2022秋•温州期末）如图，大正方形$ABCD$由四个全等的直角三角形和一个小正方形拼接而成．点E为小正方形的顶点，延长CE交AD于点F，连结BF交小正方形的一边于点G，若△BCF为等腰三角形，$AG=5$，则小正方形的面积为（　　）



A．15　　　　B．16　　　　C．20　　　　D．25

【分析】由等腰三角形性质可得出 $BF=CF$，利用 HL 可证得 Rt△ABF≌Rt△DCF（HL），得出 $AB=AD=2AF$，根据余角的性质得出∠BAG=∠ABF，进而推出 $CF=BF=2AG=10$，利用面积法求得 $BN=8$，再运用勾股定理求得 $CN=4$，即可求得答案．

【解答】解：设小正方形为 $EHMN$，如图，

∵四边形 $ABCD$ 和四边形 $EHMN$ 是正方形，

∴$AB=AD=CD$，∠$BAD=90°$，$CF∥AG$，

∵△BCF 为等腰三角形，且 $BF>AB=BC$，$CF>CD=BC$，

∴$BF=CF$，

在 Rt△ABF 和 Rt△DCF 中，

$$\begin{cases}AB=CD\\BF=CF\end{cases},$$

∴Rt△ABF≌Rt△DCF（HL），

∴∠AFB=∠CFD，$AF=DF$，

∴$AB=AD=2AF$，

∵$CF∥AG$，

∴∠CFD=∠DAG，

∴∠AFB=∠DAG，

∴$AG=FG$，

∵∠AFB+∠$ABF=90°$，∠DAG+∠$BAG=90°$，

∴∠BAG=∠ABF，

∴$AG=BG$，

∴$CF=BF=2AG=10$，

在 Rt△ABF 中，$AB^2+AF^2=BF^2$，

∴$(2AF)^2+AF^2=10^2$，

∴$AF=2\sqrt{5}$，

∴$AB=BC=4\sqrt{5}$，

∵$S_{\triangle BCF}=\frac{1}{2}BC\cdot AB=\frac{1}{2}CF\cdot BN$，

∴$BN=\frac{BC\cdot AB}{CF}=\frac{4\sqrt{5}\times4\sqrt{5}}{10}=8$，

$\therefore CN=\sqrt{BC^2-BN^2}=\sqrt{(4\sqrt{5})^2-8^2}=4$，

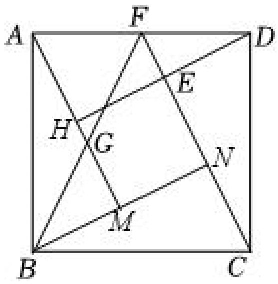
$\because \triangle ABM\cong\triangle BCN$，

$\therefore BM=CN=4$，

$\therefore MN=BN-BM=8-4=4$，

$\therefore S_{\text{正方形}EHMN}=(MN)^2=4^2=16$，

故选：B.



题型03　正方形与"三角函数"的综合

高分秘籍

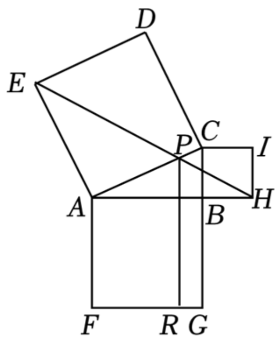
正方形与"三角函数"类综合问题做题方法：

①已知某角的三角函数，但该角不在直角三角形中，则常作垂线构造，或找到该角的等价角，再利用比值设未知数；

②此时的三角函数常用其正切值

③求某个角的三角函数值，可以直接求，也可以转化成其等价角的正切值来求，常见转化等价角的方法有——全等/相似三角形的对应角相等，平行线内错角/同位角相等，等腰三角形等边对等角等；

1．（2023•瑞安市模拟）如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90°$，以其三边为边向外作正方形，连结 EH，交 AC 于点 P，过点 P 作 $PR\perp FG$ 于点 R．若 $\tan\angle AHE=\frac{1}{2}$，$EH=8\sqrt{5}$，则 PR 的值为（　　）



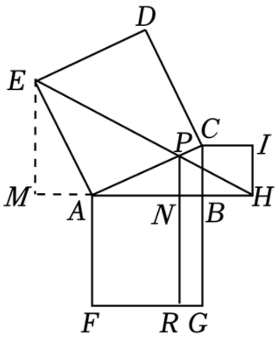
A．10　　B．11　　C．$4\sqrt{5}$　　D．$5\sqrt{5}$

【分析】设 PR 与 AB 交于点 N，如图，过点 E 作 $EM\perp AB$ 交 BA 的延长线于点 M

，利用正方形性质可证得$\triangle ACB\cong\triangle EAM$（AAS），得出$EM=AB$，$AM=BC$，设$AB=x$，$BC=y$，根据$\tan\angle AHE=\frac{1}{2}$，可得$EM=2y$，$MH=4y$，利用勾股定理建立方程求解可得$x=8$，再由$\tan\angle CAB=\frac{BC}{AB}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$，可得$PA=PH$，利用等腰三角形性质和解直角三角形可求得$PH=3$，再证明四边形$BGRN$是矩形，得出$NR=BG=8$，利用$PR=PN+NR$即可求得答案.

【解答】解：设PR与AB交于点N，如图，过点E作$EM\perp AB$交BA的延长线于点M，

则$\angle M=90°$，



∵四边形$ACDE$、$BCIH$、$ABGF$均为正方形，

∴$AE=AC$，$BC=BH$，$AB=BG$，$\angle CAE=\angle CBH=\angle ABG=\angle G=90°$，$AB\parallel FG$，

∵$\angle ABC=90°$，

∴$\angle ABC=\angle M=90°$，

∴$\angle ACB+\angle CAB=90°$，

∵$\angle EAM+\angle CAB=90°$，

∴$\angle ACB=\angle EAM$，

∴$\triangle ACB\cong\triangle EAM$（AAS），

∴$EM=AB$，$AM=BC$，

∴$AM=BH=BC$，

设$AB=x$，$BC=y$，

则$EM=x$，$AM=BH=y$，

$MH=x+2y$，

∵$\tan\angle AHE=\frac{1}{2}$，

∴$\frac{EM}{MH}=\frac{1}{2}$，即$MH=2EM$，

∴$x+2y=2x$，

∴$x=2y$，

∴$EM=2y$，$MH=4y$，

∵$EM^2+MH^2=EH^2$，

∴$(2y)^2+(4y)^2=(8\sqrt{5})^2$，

解得：$y=4$ 或 $y=-4$（舍去），

∴$x=8$，

∴$AM=BC=BH=4$，$AB=BG=8$，

∵$\angle ABC+\angle CBH=180°$，

∴A、B、H 三点共线，

∴$AH=AB+BH=8+4=12$，

∵$\tan\angle CAB=\frac{BC}{AB}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$，

∴$\tan\angle CAB=\tan\angle AHE$，

∴$\angle CAB=\angle AHE$，

∴$PA=PH$，

∵$AB\parallel FG$，

∴$\angle PNB=\angle PRG=90°$，

∴$AN=\frac{1}{2}AH=\frac{1}{2}\times 12=6$，

∴$\frac{PN}{AN}=\tan\angle CAB=\frac{1}{2}$，

∴$PN=\frac{1}{2}AN=\frac{1}{2}\times 6=3$，

∵$PR\perp FG$，

∴$\angle PRG=90°$，

∴$\angle ABC=\angle G=\angle PRG=90°$，

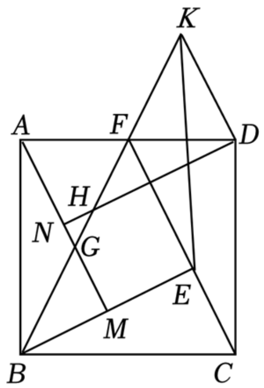
∴四边形 $BGRN$ 是矩形，

∴$NR=BG=8$，

∴$PR=PN+NR=3+8=11$．

故选：B．

2．（2023•温州模拟）由四个全等的直角三角形和一个小正方形组成的大正方形 $ABCD$ 如图所示，点 E 为小正方形的顶点，延长 CE 交 AD 于点 F，BF 分别交 AM，DN 于点 G，H，过点 D 作 DN 的垂线交 BF 延长线于点 K，连结 EK，若△BCF 为等腰三角形，$AG=\frac{5}{2}$，则$\frac{EK}{DH}$的值为（　　）



A. $\dfrac{3}{2}$　　B. $\dfrac{6}{5}$　　C. $\dfrac{\sqrt{97}}{8}$　　D. $\dfrac{3\sqrt{97}}{20}$

【分析】设 CF 交 DN 于点 Q，作 $KL\perp CF$ 交 CF 的延长线于点 L，由△BCF 为等腰三角形，得 $BF=CF$，再证明 Rt△ABF≌Rt△DCF，而 Rt△ADN≌Rt△BAM≌Rt△CBE≌Rt△DCQ，则∠ABF=∠CDF=∠BAM=∠CBE=∠ADN，可推导出∠GFA=∠GAF，则 $BG=AG=FG=\frac{5}{2}$，所以 $BF=CF=5$，即可证明 AF：AB：$BF=1$：2：$\sqrt{5}$，进而求得 $BC=AD=2\sqrt{5}$，则 $CE=\frac{1}{\sqrt{5}}BC=2$，$BE=2CE=4$，所以 $DQ=BM=CE=2$，$EF=3$，再证明四边形 $DQLK$ 是矩形，则 $KL=DQ=2$，由 $\frac{KL}{FL}=\tan\angle KFL=\tan\angle BFE=\frac{BE}{EF}=\frac{4}{3}$，得 $FL=\frac{3}{4}KL=\frac{3}{2}$，则 $EL=EF+FL=\frac{9}{2}$，由勾股定理得 $EK=\sqrt{KL^2+EL^2}=\frac{\sqrt{97}}{2}$，再求得 $DK=QL=QF+FL=\frac{5}{2}$，由 $\frac{DK}{DH}=\tan\angle DHK=\tan\angle EBF=\frac{EF}{BE}=\frac{3}{4}$，得 $DH=\frac{4}{3}DK=\frac{10}{3}$，即可求得 $\frac{EK}{DH}=\frac{3\sqrt{97}}{20}$，于是得到问题的答案.

【解答】解：设 CF 交 DN 于点 Q，作 $KL\perp CF$ 交 CF 的延长线于点 L，则∠$L=90°$，

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$AB=DC=AD=BC$，∠BAF=∠$CDF=90°$，

∴$BF>AB$，$CF>CD$，

∴$BF\neq BC$，$CF\neq BC$，

∵△BCF 为等腰三角形，

∴$BF=CF$，

∴Rt△ABF≌Rt△DCF（HL），

∵Rt△ADN≌Rt△BAM≌Rt△CBE≌Rt△DCQ，

∴∠ABF=∠CDF=∠BAM=∠CBE=∠ADN，

∵∠GFA+∠$ABF=90°$，∠GAF+∠$BAM=90°$，

∴∠GFA=∠GAF，

$\therefore BG=AG=FG=\dfrac{5}{2}$,

$\therefore BF=CF=2\times\dfrac{5}{2}=5$,

设 $AB=DC=AD=BC=2m$,

$\therefore AF=DF=\dfrac{1}{2}AD=m$,

$\therefore BF=\sqrt{AB^2+AF^2}=\sqrt{(2m)^2+m^2}=\sqrt{5}m$,

$\therefore AF:AB:BF=1:2:\sqrt{5}$,

$\because \sqrt{5}m=5$,

$\therefore AF=DF=m=\sqrt{5}$,

$\therefore BC=AD=2\sqrt{5}$,

$\because \angle BEC=90^\circ$,

$\therefore \dfrac{CE}{BC}=\sin\angle CBE=\sin\angle ABF=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$,$\dfrac{CE}{BE}=\tan\angle CBE=\tan\angle ABF=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore CE=\dfrac{1}{\sqrt{5}}BC=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\times2\sqrt{5}=2$,$BE=2CE=4$,

$\therefore DQ=BM=CE=2$,$EF=CF-CE=5-2=3$,

$\because$四边形 $MNQE$ 是正方形,$DK\perp DN$,

$\therefore \angle L=\angle DQL=\angle KDQ=90^\circ$,

$\therefore$四边形 $DQLK$ 是矩形,

$\therefore KL=DQ=2$,

$\because \angle KFL=\angle BFE$,

$\therefore \dfrac{KL}{FL}=\tan\angle KFL=\tan\angle BFE=\dfrac{BE}{EF}=\dfrac{4}{3}$,

$\therefore FL=\dfrac{3}{4}KL=\dfrac{3}{4}\times2=\dfrac{3}{2}$,

$\therefore EL=EF+FL=3+\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{2}$,

$\therefore EK=\sqrt{KL^2+EL^2}=\sqrt{2^2+(\dfrac{9}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{97}}{2}$,

$\because CQ=BE=4$,

$\therefore QF=CF-CQ=5-4=1$,

$\therefore DK=QL=QF+FL=1+\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{2}$,

$\because QN\parallel EM$,