

# 2024年上海市高考数学试卷（网络回忆版）

2024.06

一、填空题（本大题共有 12 题，满分 54 分.其中第 1-6 题每题 4 分，第 7-12 题每题满分 5 分）  
考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果.

1. 设全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，集合  $A = \{2, 4\}$ ，则  $\bar{A} =$  \_\_\_\_\_.

【答案】  $\{1, 3, 5\}$

【解析】

【分析】根据补集的定义可求  $\bar{A}$ .

【详解】由题设有  $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$ ,

故答案为:  $\{1, 3, 5\}$

2. 已知  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0 \\ 1, & x \leq 0 \end{cases}$ ，则  $f(3) =$  \_\_\_\_\_.

【答案】  $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】利用分段函数的形式可求  $f(3)$ .

【详解】因为  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0 \\ 1, & x \leq 0 \end{cases}$ ，故  $f(3) = \sqrt{3}$ ,

故答案为:  $\sqrt{3}$ .

3. 已知  $x \in \mathbf{R}$ ，则不等式  $x^2 - 2x - 3 < 0$  的解集为\_\_\_\_\_.

【答案】  $\{x \mid -1 < x < 3\}$

【解析】

【分析】求出方程  $x^2 - 2x - 3 = 0$  的解后可求不等式的解集.

【详解】方程  $x^2 - 2x - 3 = 0$  的解为  $x = -1$  或  $x = 3$ ,

故不等式  $x^2 - 2x - 3 < 0$  的解集为  $\{x \mid -1 < x < 3\}$ ,

故答案为:  $\{x \mid -1 < x < 3\}$ .



4. 已知 $f(x) = x^3 + a$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , 且 $f(x)$ 是奇函数, 则 $a =$ \_\_\_\_\_.

【答案】 0

【解析】

【分析】根据奇函数的性质可求参数 $a$ .

【详解】因为 $f(x)$ 是奇函数, 故 $f(-x) + f(x) = 0$  即 $x^3 + a + (-x)^3 + a = 0$ ,

故 $a = 0$ ,

故答案为: 0.

5. 已知 $k \in \mathbf{R}, \vec{a} = (2, 5), \vec{b} = (6, k)$ , 且 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , 则 $k$ 的值为\_\_\_\_\_.

【答案】 15

【解析】

【分析】根据向量平行的坐标表示得到方程, 解出即可.

【详解】 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ,  $\therefore 2k = 5 \times 6$ , 解得 $k = 15$ .

故答案为: 15.

6. 在 $(x+1)^n$ 的二项展开式中, 若各项系数和为32, 则 $x^2$ 项的系数为\_\_\_\_\_.

【答案】 10

【解析】

【分析】令 $x = 1$ , 解出 $n = 5$ , 再利用二项式的展开式的通项合理赋值即可.

【详解】令 $x = 1$ ,  $\therefore (1+1)^n = 32$ , 即 $2^n = 32$ , 解得 $n = 5$ ,

所以 $(x+1)^5$ 的展开式通项公式为 $T_{r+1} = C_5^r \cdot x^{5-r}$ , 令 $5-r=2$ , 则 $r=3$ ,

$\therefore T_4 = C_5^3 x^2 = 10x^2$ .

故答案为: 10.

7. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 上有一点 $P$ 到准线的距离为9, 那么点 $P$ 到 $x$ 轴的距离为\_\_\_\_\_.

【答案】  $4\sqrt{2}$

【解析】

【分析】根据抛物线的定义知 $x_P = 8$ , 将其再代入抛物线方程即可.

【详解】由 $y^2 = 4x$ 知抛物线的准线方程为 $x = -1$ , 设点 $P(x_0, y_0)$ , 由题意得 $x_0 + 1 = 9$ , 解得 $x_0 = 8$ ,

代入抛物线方程 $y^2 = 4x$ ，得 $y_0^2 = 32$ ，解得 $y_0 = \pm 4\sqrt{2}$ ，

则点 $P$ 到 $x$ 轴的距离为 $4\sqrt{2}$ 。

故答案为： $4\sqrt{2}$ 。

8. 某校举办科学竞技比赛，有 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 3种题库， $A$ 题库有5000道题， $B$ 题库有4000道题， $C$ 题库有3000道题。小申已完成所有题，他 $A$ 题库的正确率是0.92， $B$ 题库的正确率是0.86， $C$ 题库的正确率是0.72。现他从所有的题中随机选一题，正确率是\_\_\_\_\_。

【答案】0.85

【解析】

【分析】求出各题库所占比，根据全概率公式即可得到答案。

【详解】由题意知， $A, B, C$ 题库的比例为：5 : 4 : 3，

各占比分别为 $\frac{5}{12}, \frac{4}{12}, \frac{3}{12}$ ，

则根据全概率公式知所求正确率 $p = \frac{5}{12} \times 0.92 + \frac{4}{12} \times 0.86 + \frac{3}{12} \times 0.72 = 0.85$ 。

故答案为：0.85。

9. 已知虚数 $z$ ，其实部为1，且 $z + \frac{2}{z} = m (m \in \mathbf{R})$ ，则实数 $m$ 为\_\_\_\_\_。

【答案】2

【解析】

【分析】设 $z = 1 + bi$ ，直接根据复数的除法运算，再根据复数分类即可得到答案。

【详解】设 $z = 1 + bi$ ， $b \in \mathbf{R}$ 且 $b \neq 0$ 。

则 $z + \frac{2}{z} = 1 + bi + \frac{2}{1 + bi} = \left( \frac{b^2 + 3}{1 + b^2} \right) + \left( \frac{b^3 - b}{1 + b^2} \right) i = m$ ，

$$\because m \in \mathbf{R}, \therefore \begin{cases} \frac{b^2+3}{1+b^2} = m \\ \frac{b^3-b}{1+b^2} = 0 \end{cases}, \text{解得 } m = 2,$$

故答案为：2.

10. 设集合A 中的元素皆为无重复数字的三位正整数，且元素中任意两者之积皆为偶数，求集合中元素个数的最大值\_\_\_\_\_.

【答案】 329

【解析】

【分析】 三位数中的偶数分个位是 0 和个位不是 0 讨论即可.

【详解】 由题意知集合中且至多只有一个奇数, 其余均是偶数.

首先讨论三位数中的偶数,

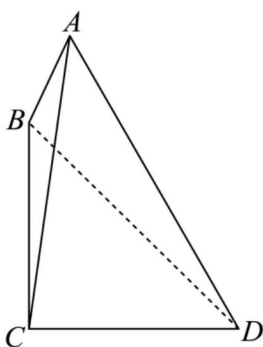
① 当个位为 0 时, 则百位和十位在剩余的 9 个数字中选择两个进行排列, 则这样的偶数有  $P_9^2 = 72$  个;

② 当个位不为 0 时, 则个位有  $C_4^1$  个数字可选, 百位有  $C_8^1 = 256$  个数字可选, 十位有  $C_8^1$  个数字可选, 根据分步乘法这样的偶数共有  $C_4^1 C_8^1 C_8^1 = 256$ ,

最后再加上单独的奇数, 所以集合中元素个数的最大值为  $72 + 256 + 1 = 329$  个.

故答案为: 329.

11. 已知点  $B$  在点  $C$  正北方向, 点  $D$  在点  $C$  的正东方向,  $BC = CD$ , 存在点  $A$  满足  $\angle BAC = 16.5^\circ$ ,  $\angle DAC = 37^\circ$ , 则  $\angle BCA =$  \_\_\_\_\_ (精确到 0.1 度)



【答案】  $7.8^\circ$

【解析】

【分析】 设  $\angle BCA = \theta$ , 在  $\triangle DCA$  和  $\triangle BCA$  中分别利用正弦定理得到  $\frac{CA}{\sin D} = \frac{CD}{\sin \angle CAD}$ ,

$\frac{CA}{\sin(\theta + 16.5^\circ)} = \frac{CB}{\sin 16.5^\circ}$ , 两式相除即可得到答案.

【详解】 设  $\angle BCA = \theta$ ,  $\angle ACD = 90^\circ - \theta$ ,

在  $\triangle DCA$  中, 由正弦定理得  $\frac{CA}{\sin D} = \frac{CD}{\sin \angle CAD}$ ,

即  $\frac{CA}{\sin[180^\circ - (90^\circ - \theta + 37.0^\circ)]} = \frac{CD}{\sin 37.0^\circ}$ ,

$$\text{即 } \frac{CA}{\sin(90^\circ - \theta + 37.0^\circ)} = \frac{CD}{\sin 37.0^\circ} \quad \textcircled{1}$$

在  $\triangle VBCA$  中, 由正弦定理得  $\frac{CA}{\sin B} = \frac{CB}{\sin \angle CAB}$ ,

$$\text{即 } \frac{CA}{\sin[180^\circ - (\theta + 16.5^\circ)]} = \frac{CB}{\sin 16.5^\circ}, \text{ 即 } \frac{CA}{\sin(\theta + 16.5^\circ)} = \frac{CB}{\sin 16.5^\circ}, \quad \textcircled{2}$$

因为  $CD = CB$ ,  $\frac{\textcircled{2}}{\textcircled{1}}$  得  $\frac{\sin(90^\circ - \theta + 37.0^\circ)}{\sin(\theta + 16.5^\circ)} = \frac{\sin 37.0^\circ}{\sin 16.5^\circ}$ ,

利用计算器即可得  $\theta \approx 7.8^\circ$ ,

故答案为:  $7.8^\circ$ .

12. 无穷等比数列  $\{a_n\}$  满足首项  $a_1 > 0, q > 1$ , 记  $I_n = \{x - y \mid x, y \in [a_1, a_2] \dot{\cup} [a_n, a_{n+1}]\}$ , 若对任意正整数  $n$  集合  $I_n$  是闭区间, 则  $q$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $q \geq 2$

**【解析】**

**【分析】** 当  $n \geq 2$  时, 不妨设  $x \geq y$ , 则  $x - y \in [0, a_2 - a_1] \cup [a_n - a_2, a_{n+1} - a_1] \cup [0, a_{n+1} - a_n]$ , 结合  $I_n$  为

闭区间可得  $q - 2 \geq -\frac{1}{q^{n-2}}$  对任意的  $n \geq 2$  恒成立, 故可求  $q$  的取值范围.

**【详解】** 由题设有  $a_n = a_1 q^{n-1}$ , 因为  $a_1 > 0, q > 1$ , 故  $a_{n+1} > a_n$ , 故  $[a_n, a_{n+1}] = [a_1 q^{n-1}, a_1 q^n]$ ,

当  $n = 1$  时,  $x, y \in [a_1, a_2]$ , 故  $x - y \in [a_1 - a_2, a_2 - a_1]$ , 此时  $I_1$  为闭区间,

当  $n \geq 2$  时, 不妨设  $x \geq y$ , 若  $x, y \in [a_1, a_2]$ , 则  $x - y \in [0, a_2 - a_1]$ ,

若  $y \in [a_1, a_2], x \in [a_n, a_{n+1}]$ , 则  $x - y \in [a_n - a_2, a_{n+1} - a_1]$ ,

若  $x, y \in [a_n, a_{n+1}]$ , 则  $x - y \in [0, a_{n+1} - a_n]$ ,

综上,  $x - y \in [0, a_2 - a_1] \cup [a_n - a_2, a_{n+1} - a_1] \cup [0, a_{n+1} - a_n]$ ,

又  $I_n$  为闭区间等价于  $[0, a_2 - a_1] \dot{\cup} [a_n - a_2, a_{n+1} - a_1] \dot{\cup} [0, a_{n+1} - a_n]$  为闭区间,

而  $a_{n+1} - a_1 > a_{n+1} - a_n > a_2 - a_1$ , 故  $a_{n+1} - a_n \geq a_n - a_2$  对任意  $n \geq 2$  恒成立,

故  $a_{n+1} - 2a_n + a_2 \geq 0$  即  $a_1 q^{n-1} (q - 2) + a_2 \geq 0$ , 故  $q^{n-2} (q - 2) + 1 \geq 0$ ,

故  $q-2 \geq -\frac{1}{q^{n-2}}$  对任意的  $n \geq 2$  恒成立, 因  $q > 1$ ,

故当  $n \rightarrow +\infty$  时,  $-\frac{1}{q^{n-2}} \rightarrow 0$ , 故  $q-2 \geq 0$  即  $q \geq 2$ .

故答案为:  $q \geq 2$ .

【点睛】思路点睛: 与等比数列性质有关的不等式恒成立, 可利用基本量法把恒成立为转为关于与公比有关的不等式恒成立, 必要时可利用参变分离来处理.

二、选择题 (本大题共有 4 题, 满分 18 分, 其中第 13-14 题每题满分 4 分, 第 15-16 题每题满分 5 分) 每题有且只有一个正确答案, 考生应在答题纸的相应编号上, 将代表答案的小方格涂黑, 选对得满分, 否则一律得零分.

13. 已知气候温度和海水表层温度相关, 且相关系数为正数, 对此描述正确的是 ( )

- A. 气候温度高, 海水表层温度就高
- B. 气候温度高, 海水表层温度就低
- C. 随着气候温度由低到高, 海水表层温度呈上升趋势
- D. 随着气候温度由低到高, 海水表层温度呈下降趋势

【答案】C

【解析】

【分析】根据相关系数的性质可得正确的选项.

【详解】对于 AB, 当气候温度高, 海水表层温度变高变低不确定, 故 AB 错误.

对于 CD, 因为相关系数为正, 故随着气候温度由低到高时, 海水表层温度呈上升趋势, 故 C 正确, D 错误.

故选: C.

14. 下列函数  $f(x)$  的最小正周期是  $2\pi$  的是 ( )

- A.  $\sin x + \cos x$
- B.  $\sin x \cos x$
- C.  $\sin^2 x + \cos^2 x$
- D.  $\sin^2 x - \cos^2 x$

【答案】A

【解析】

【分析】根据辅助角公式、二倍角公式以及同角三角函数关系并结合三角函数的性质一一判断即可.

【详解】对 A,  $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ , 周期  $T = 2\pi$ , 故 A 正确;

对 B,  $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ , 周期  $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ , 故 B 错误;

对于选项 C,  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , 是常值函数, 不存在最小正周期, 故 C 错误;

对于选项 D,  $\sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$ , 周期  $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ , 故 D 错误,

故选: A.

15. 定义一个集合  $\Omega$ , 集合中的元素是空间内的点集, 任取  $P_1, P_2, P_3 \in \Omega$ , 存在不全为 0 的实数  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , 使得  $\lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OP_2} + \lambda_3 \overrightarrow{OP_3} = \vec{0}$ . 已知  $(1, 0, 0) \in \Omega$ , 则  $(0, 0, 1) \notin \Omega$  的充分条件是 ( )

A.  $(0, 0, 0) \in \Omega$

B.  $(-1, 0, 0) \in \Omega$

C.  $(0, 1, 0) \in \Omega$

D.  $(0, 0, -1) \in \Omega$

【答案】C

【解析】

【分析】首先分析出三个向量共面, 显然当  $(1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0) \in \Omega$  时, 三个向量构成空间的一个基底, 则即可分析出正确答案.

→ → →

【详解】由题意知这三个向量  $OP_1, OP_2, OP_3$  共面, 即这三个向量不能构成空间的一个基底,

对 A, 由空间直角坐标系易知  $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)$  三个向量共面, 则当  $(-1, 0, 0), (1, 0, 0) \in \Omega$  无法推出  $(0, 0, 1) \notin \Omega$ , 故 A 错误;

对 B, 由空间直角坐标系易知  $(-1, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)$  三个向量共面, 则当  $(0, 0, 0), (1, 0, 0) \in \Omega$  无法推出  $(0, 0, 1) \notin \Omega$ , 故 A 错误;

对 C, 由空间直角坐标系易知  $(1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0)$  三个向量不共面, 可构成空间的一个基底, 则由  $(1, 0, 0), (0, 1, 0) \in \Omega$  能推出  $(0, 0, 1) \notin \Omega$ ,

对 D, 由空间直角坐标系易知  $(1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 0, -1)$  三个向量共面,

则当  $(0, 0, -1)(1, 0, 0) \in \Omega$  无法推出  $(0, 0, 1) \notin \Omega$ , 故 D 错误.

故选: C.

16. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ，定义集合  $M = \{x_0 \mid x_0 \in \mathbf{R}, x \in (-\infty, x_0), f(x) < f(x_0)\}$ ，在使得  $M = [-1, 1]$  的所有  $f(x)$  中，下列成立的是( )

- A. 存在  $f(x)$  是偶函数  
 B. 存在  $f(x)$  在  $x = 2$  处取最大值  
 C. 存在  $f(x)$  是严格增函数  
 D. 存在  $f(x)$  在  $x = -1$  处取到极小值

【答案】B

【解析】

【分析】对于 ACD 利用反证法并结合函数奇偶性、单调性以及极小值的概念即可判断，对于 B，构造函数

$$f(x) = \begin{cases} -2, & x < -1 \\ x, & -1 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases} \text{即可判断.}$$

【详解】对于 A，若存在  $y = f(x)$  是偶函数，取  $x_0 = 1 \in [-1, 1]$ ，

则对于任意  $x \in (-\infty, 1), f(x) < f(1)$ ，而  $f(-1) = f(1)$ ，矛盾，故 A 错误；

对于 B，可构造函数  $f(x) = \begin{cases} -2, & x < -1, \\ x, & -1 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1, \end{cases}$  满足集合  $M = [-1, 1]$ ，

当  $x < -1$  时，则  $f(x) = -2$ ，当  $-1 \leq x \leq 1$  时， $f(x) \in [-1, 1]$ ，当  $x > 1$  时， $f(x) = 1$ ，

则该函数  $f(x)$  的最大值是  $f(2)$ ，则 B 正确；

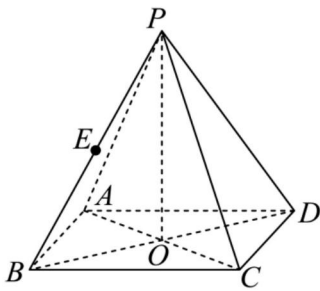
对 C，假设存在  $f(x)$ ，使得  $f(x)$  严格递增，则  $M = \mathbf{R}$ ，与已知  $M = [-1, 1]$  矛盾，则 C 错误；

对 D，假设存在  $f(x)$ ，使得  $f(x)$  在  $x = -1$  处取极小值，则在  $-1$  的左侧附近存在  $n$ ，使得  $f(n) > f(-1)$ ，这与已知集合  $M$  的定义矛盾，故 D 错误；

故选：B.

三、解答题（本大题共有 5 题，满分 78 分）解下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤

17. 如图为正四棱锥  $P - ABCD$ ， $O$  为底面  $ABCD$  的中心.



(1) 若  $AP = 5, AD = 3\sqrt{2}$ , 求  $\triangle POA$  绕  $PO$  旋转一周形成的几何体的体积;

(2) 若  $AP = AD, E$  为  $PB$  的中点, 求直线  $BD$  与平面  $AEC$  所成角的大小.

**【答案】** (1)  $12\pi$

(2)  $\frac{\pi}{4}$

**【解析】**

**【分析】** (1) 根据正四棱锥的数据, 先算出直角三角形  $\triangle POA$  的边长, 然后求圆锥的体积;

(2) 连接  $EA, EO, EC$ , 可先证  $BE \perp$  平面  $ACE$ , 根据线面角的定义得出所求角为  $\angle BOE$ , 然后结合题目数量关系求解.

**【小问 1 详解】**

正四棱锥满足且  $PO \perp$  平面  $ABCD$ , 由  $AO \perp$  平面  $ABCD$ , 则  $PO \perp AO$ ,

又正四棱锥底面  $ABCD$  是正方形, 由  $AD = 3\sqrt{2}$  可得,  $AO = 3$ ,

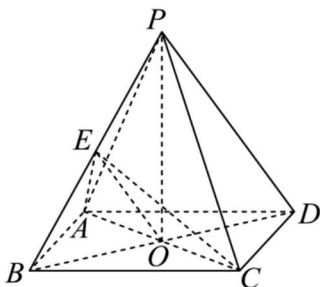
故  $PO = \sqrt{PA^2 - AO^2} = 4$ ,

根据圆锥的定义,  $\triangle POA$  绕  $PO$  旋转一周形成的几何体是以  $PO$  为轴,  $AO$  为底面半径的圆锥, 即圆锥的高为  $PO = 4$ , 底面半径为  $AO = 3$ ,

根据圆锥的体积公式, 所得圆锥的体积是  $\frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 4 = 12\pi$

**【小问 2 详解】**

连接  $EA, EO, EC$ , 由题意结合正四棱锥的性质可知, 每个侧面都是等边三角形,



由 $E$ 是 $PB$ 中点, 则 $AE \perp PB, CE \perp PB$ , 又 $AE \cap CE = E, AE, CE \subset$ 平面 $ACE$ ,

故 $PB \perp$ 平面 $ACE$ , 即 $BE \perp$ 平面 $ACE$ , 又 $BD \cap$ 平面 $ACE = O$ ,

以上内容仅为本文档的试下载部分, 为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文, 请访问: <https://d.book118.com/936154044001011101>