《压轴题难点突破 3——隐圆问题》教学设计

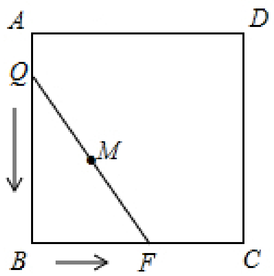
深圳市桂园中学　刘清丽

一、知识技能梳理

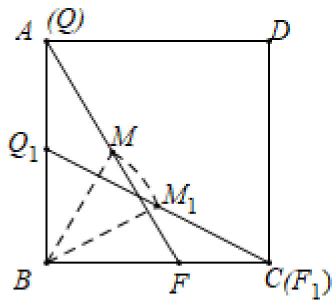
1. 圆是初中数学中一种简单但又非常重要的几何图形，中考题和中考模拟题中，经常会出现一类有关圆的题目，难度为中、高档题。这类题目在条件中没有直接给出有关圆方面的信息，而是隐含在题目中，要通过分析、转化，发现圆，从而最终利用圆的知识来求解，我们称这类问题为"隐圆问题"。隐形圆常见的有以下几种形式，一是定点定长，轨迹是圆；二是定弦定角，点在圆上；三是四点共圆判定隐形圆。
2. 题目具体表现为折叠问题、旋转问题、角度不变问题等。隐圆题目的关键突破口就在于能否看出这个"隐藏的圆"。只要能看出圆，答案立马呈现。

二、学习过程

模块一：定点定长模型（利用圆的定义，<u>找定点、寻定长</u>，得到圆）



例 1. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 3，将长为 $2\sqrt{3}$ 的线段 QF 的两端放在正方形相邻的两边上同时滑动．如果点 Q 从点 A 出发，在 AB 上滑动，同时点 F 在 BC 上滑动，当点 F 到达点 C 时，运动停止，那么在这个过程中，线段 QF 的中点 M 所经过的路线长为_________．



【解答】解：如图，连接 BM．

当点 Q 与 A 重合时，在 Rt△ABF 中，

∵$\cos\angle BAF=\frac{AB}{AF}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴$\angle BAF=30°$，

∵$AM=MF$，

∴$BM=AM=MF=\sqrt{3}$，

∴$\angle ABM=\angle BAM=30°$，

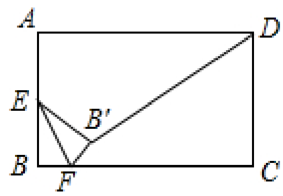
当 F_1 与 C 重合时，同法可得$\angle M_1BC=\angle M_1CB=30°$，

∵$\angle ABC=90°$，

∴$\angle MBM_1=90°-30°-30°=30°$，

∵$BM=BM_1=\sqrt{3}$，

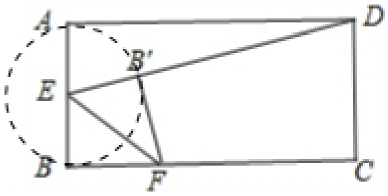
∴线段 QF 的中点 M 所经过的路线长$=\frac{30\cdot\pi\cdot\sqrt{3}}{180}=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$，



例 2. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$AD=6$，E 是 AB 边的中点，F 是线段 BC 边上的动点，将△EBF 沿 EF 所在直线折叠得到△$EB'F$，连接 $B'D$，则 $B'D$ 的最小值是__________.

【解答】解：如图所示点 B' 在以 E 为圆心 EA 为半径的圆上运动，当 D、B'、E 共线时，此时 $B'D$ 的值最小，

根据折叠的性质，△EBF≌△$EB'F$，



∴$EB'\perp B'F$，

∴$EB'=EB$，

∵E 是 AB 边的中点，$AB=4$，

∴$AE=EB'=2$，

∵$AD=6$，

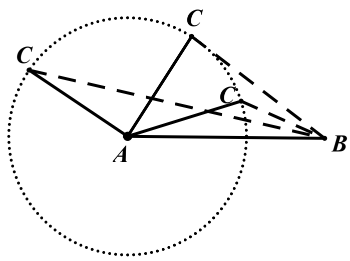
∴$DE=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$，

∴$B'D=2\sqrt{10}-2$.

练习一：

1．在△ABC 中，$AB=3$，$AC=\sqrt{3}$，当∠B 最大时，BC 的长是__________________.

【解答】解：根据题意得点 C 的运动轨迹可以看成是以点 A 为圆心，以 AC=$\sqrt{3}$长度为半径的圆，由图可知，当 $AC\perp BC$ 时（即 BC 与⊙A 相切时，∠B 最大）

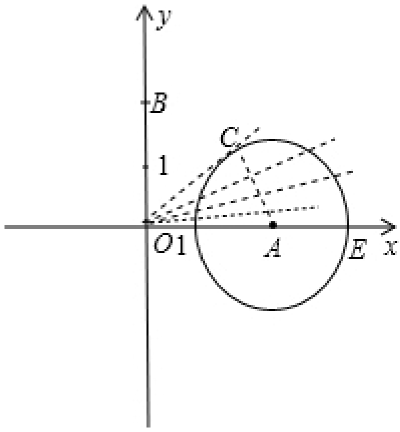


此时 $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{3^2-3}=\sqrt{6}$.

故答案是：$\sqrt{6}$.

2．在平面直角坐标系中，点 A 的坐标为（3，0），点 B 为 y 轴正半轴上的一点，点 C 是第一象限内一点，且 $AC=2$．设 $\tan\angle BOC=m$，则 m 的取值范围是____________.

【解答】解：C 在以 A 为圆心，以 2 为半径作圆周上，只有当 OC 与圆 A 相切（即到 C 点）时，$\angle BOC$ 最小，



$AC=2$，$OA=3$，由勾股定理得：$OC=\sqrt{5}$，

$\because \angle BOA=\angle ACO=90°$，

$\therefore \angle BOC+\angle AOC=90°$，$\angle CAO+\angle AOC=90°$，

$\therefore \angle BOC=\angle OAC$，

$\tan\angle BOC=\tan\angle OAC=\frac{OC}{AC}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

随着 C 的移动，$\angle BOC$ 越来越大，

$\because C$ 在第一象限，

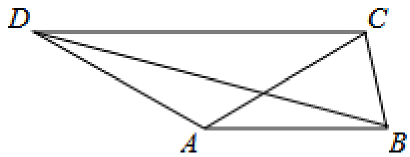
$\therefore C$ 不到 x 轴点，

即 $\angle BOC<90°$，

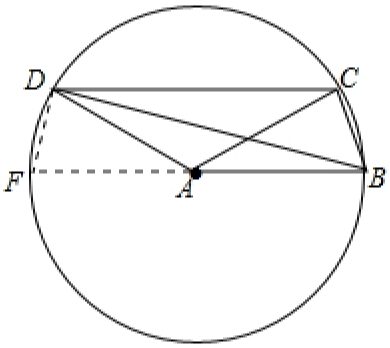
$\therefore \tan\angle BOC\geqslant\frac{\sqrt{5}}{2}$，

故答案为：$m\geqslant\frac{\sqrt{5}}{2}$.

3．在四边形 $ABCD$ 中，$DC\parallel AB$，$BC=1$，$AB=AC=AD=2$，则 BD 长为多少________.



【解答】解：以 A 为圆心，AB 长为半径作圆，延长 BA 交 $\odot A$ 于 F，连接 DF.



$\because AB=AC=AD=2$，

$\therefore D$，C 在圆 A 上，

$\because DC\parallel AB$，

$\therefore$ 弧 $DF=$ 弧 BC，

$\therefore DF=CB=1$，$BF=AB+AF=2AB=4$，

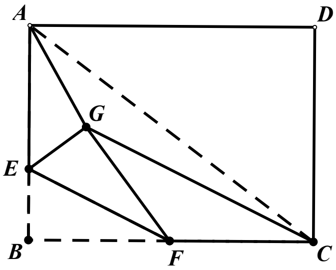
$\because FB$ 是 $\odot A$ 的直径，

$\therefore \angle FDB=90°$，

$\therefore BD=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$

故答案为：$\sqrt{15}$.

4．如图，在矩形 $ABCD$ 中，$BC=8$，$CD=6$，点 E 在边 AB 上，且 $BE=2$，点 F 为边 BC 上的动点，将△BEF 沿直线 EF 翻折，点 B 落在点 G 处，连接 GA，GC，则四边形 $GADC$ 面积的最小值是_________.



【解答】解：当点 F 与点 C 重合时，点 G 的临界点落在G_1处，如图①所示，点 G 在以 E 为圆心 EG 为半径的圆弧$\overset{\frown}{BG_1}$上运动．

连接 AC，当 $EG\perp AC$ 时，△AGC 面积最小，则四边形 $GADC$ 面积最小．

如图②，过点 E 作 $EH\perp AC$ 于点 H，

∵$\angle BAC=\angle BAC$，$\angle B=\angle AHE$，

∴△AEH∽△ACB，

则$\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{EH}{BC}$，

$\dfrac{4}{10}=\dfrac{EH}{8}$

∴$EH=3.2$

∴$G_2H=3.2-EG=1.2$

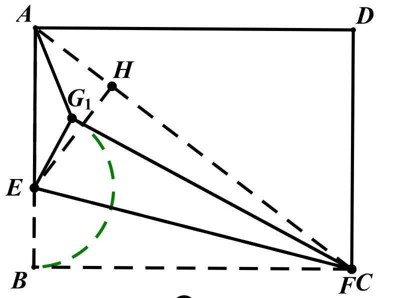
∴ $S_{GADC}=S_{\Delta GAC}+S_{\Delta ADC}$

$=\dfrac{1}{2}\times\ 1.2\times 10+\dfrac{1}{2}\times\ 6\times 8$

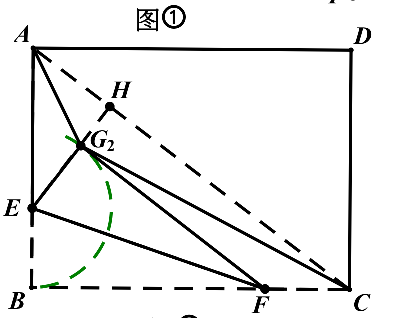
$=6+24$

$=30$

因此，四边形 $GADC$ 面积的最小值是 30．



图①



图②

5．在等边△ABC 的外侧作直线 AM，若点 B 关于直线 AM 的对称点为 D，连接 BD、CD，直线 AM 与线段 CD 所在直线交于点 E

（1）依题意，在图 1 中完成作图，并求出$\angle BDC$ 的度数；

（2）如果直线 AM 的位置如图 2 所示，求$\angle BEC$ 的度数；

（3）当直线 AM 与线段 AB 的夹角发生改变时，若 $DE=\dfrac{1}{2}EC$，请直接写出线段 DC 与线段 BC 之间的数量关系．

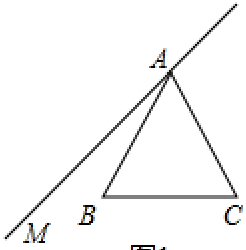


图1

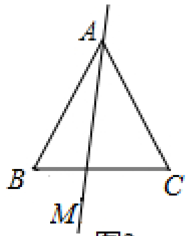
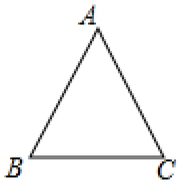
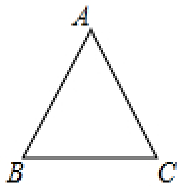


图2



备用图



备用图

【解答】解：（1）如图 1 中，连接 AD.

∵B，D 关于直线 AM 对称，

∴$AD=AB$，

∵△ABC 是等边三角形，

∴$AB=AC$，$\angle BAC=60^\circ$，

以 A 为圆心 AB 为半径画圆，

∵$\angle BDC=\frac{1}{2}\angle BAC$，

∴$\angle BDC=30^\circ$．

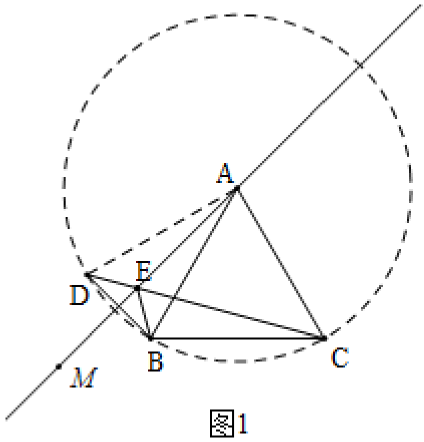


图1

（2）如图 2 中，连接 AD，以 A 为圆心，AB 为半径作圆，

在优弧 BC 上取一点 N，连接 BN，CN.

∵$\angle N=\frac{1}{2}\angle BAC=30^\circ$，

∴$\angle BDC=180^\circ-30^\circ=150^\circ$，

∴$\angle BDE=180^\circ-150^\circ=30^\circ$，

∵$BE=DE$，

∴$\angle EBD=\angle EDB=30^\circ$，

∴$\angle BEC=180^\circ-30^\circ-30^\circ=120^\circ$．

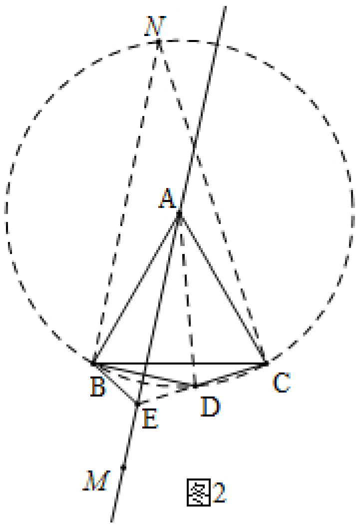


图2

（3）①当直线 AM 在△ABC 的外侧时，$CD=\sqrt{3}BC$.

理由：如图 3－1 中，在 EC 上取一点 K，使得 $EK=EB$，连接 BK.

∵$DE=EB=\frac{1}{2}EC$，$BE=EK$，

∴$EK=KC$，

∵$\angle BEC=\angle D+\angle EBD=60°$，

∴$\triangle EBK$ 是等边三角形，

∴$\angle EKB=60°$，

∵$KB=KC$，

∴$\angle KBC=\angle KCB$，

∵$\angle EKB=\angle KBC+\angle KCB=60°$，

∴$\angle KBC=\angle KCB=30°$，∵$\angle D=30°$，

∴$\angle D=\angle KCB$，

∴$BD=BC$，

作 $BH\perp CD$ 于 H，则 $DH=CH=BC\bullet\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}BC$，

∴$DC=2DH=\sqrt{3}BC$.

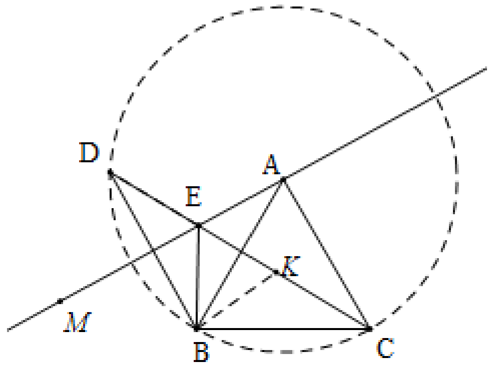


图3-1

②如图 3－2 中，当直线 AM 与线段 BC 相交时，$BC=\sqrt{7}CD$.

理由：作 $BK\perp CE$ 交 CE 的延长线于 K.

设 $CD=DE=BE=m$，

∵$\angle BEC=120°$，

∴$\angle BEK=60°$，

∴$EK=\frac{1}{2}BE=\frac{1}{2}m$，$BK=\frac{\sqrt{3}}{2}m$，

∴$BC=\sqrt{BK^2+CK^2}=\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2}m)^2+(\frac{5}{2}m)^2}=\sqrt{7}m$.

∴$BC=\sqrt{7}CD$.

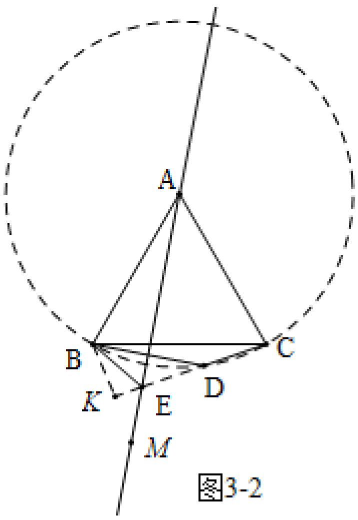


图3-2

6．问题背景：如图 1，在$\triangle ABC$ 中，$BC=4$，$AB=2AC$.

[问题初探]请写出任意一对满足条件的 AB 与 AC 的值：$AB=$_______，$AC=$_______.

[问题再探]如图 2，在 AC 右侧作$\angle CAD=\angle B$，交 BC 的延长线于点 D，求 CD 的长.

[问题解决]求$\triangle ABC$ 的面积的最大值.

【解答】解：[问题初探]设 $AC=x$，则 $AB=2x$，

∵$BC=4$，

∴$2x-x<4$ 且 $2x+x>4$，

解得：$\frac{4}{3}<x<4$，

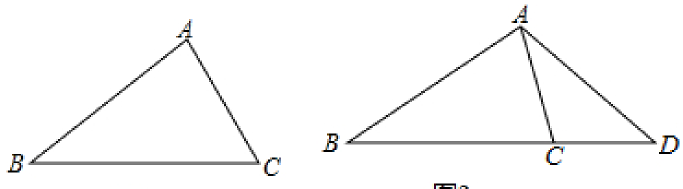


图1　图2

取 $x=3$，则 $AC=3$，$AB=6$，

取 $x=2$，则 $AC=2$，$AB=4$，

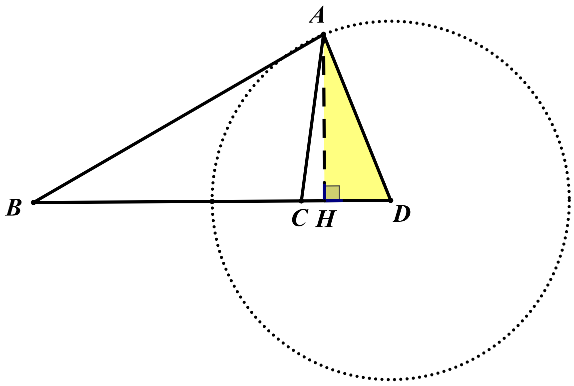
故答案为：6，3（或 4，2）

[问题再探]∵$\angle CAD=\angle B$，$\angle D=\angle D$，

∴$\triangle DAC\backsim\triangle DBA$，

则$\frac{CD}{AD}=\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{AB}$，

设 $CD=a$，$AD=b$，



∴$\begin{cases}\frac{a}{b}=\frac{1}{2}\\ \frac{b}{4+a}=\frac{1}{2}\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}a=\frac{4}{3}\\ b=\frac{8}{3}\end{cases}$，

即 $CD=\frac{4}{3}$；

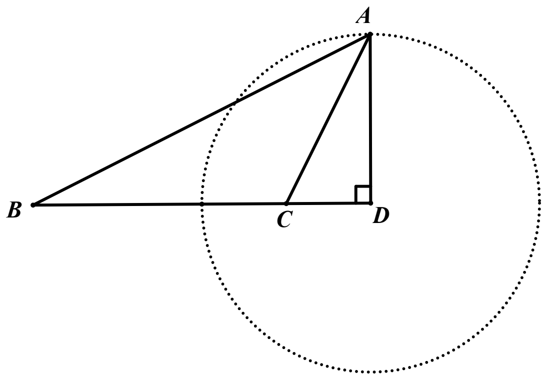
[问题解决]由（2）可知，$CD=\frac{4}{3}$,$AD=\frac{8}{3}$，则点 A 在以点为圆心，以 AD 的长度为半径的圆弧上运动.

过 A 作 $AH\perp BD$ 于 H，在 Rt$\triangle ADH$ 中，$AH\leqslant AD=DH=\frac{8}{3}$

当 AH 与 AD 重合时，AH 取最大值为$\frac{8}{3}$，

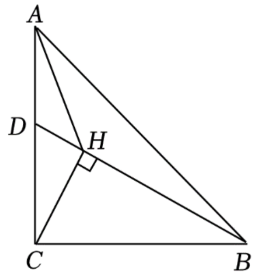
此时$\triangle ABC$ 的面积取最大值，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AH\cdot BC=\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}\times 4=\frac{16}{3}$



所以当 $AH\perp BD$ 时，$S_{\triangle ABC}$ 取得最大值$\frac{16}{3}$.

模块二：定边对定角模型（若弦的长度固定，它所对的圆周角都相等，则圆周角顶点的轨迹为圆）

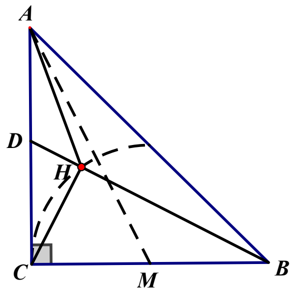


例 3. 如图，在等腰 Rt△*ABC* 中，∠*ACB*＝90°，*AC*＝*BC*＝8，点 *D* 为线段 *AC* 上一动点，连接 *BD*，过点 *C* 作 *CH*⊥*BD* 于点 *H*，连接 *AH*，则 *AH* 的最小值为 __________.

【解答】解：由题意得，∠*CHB*＝90°,BC=8

∴点 *H* 在如图的圆弧上运动，圆心为线段 *BC* 的中点 *M*,

连接 *AM*，交圆弧于点 *H*，此时 *AH* 的长度最小



∵点 *M* 是 *BC* 中点

∴$CM=\frac{1}{2}BC=4$,

在 Rt△*ACG* 中，$AM=\sqrt{AC^2+CM^2}=4\sqrt{5}$

此时，*AH* 最小值为 $4\sqrt{5}-4$,

故答案为：$4\sqrt{5}-4$.

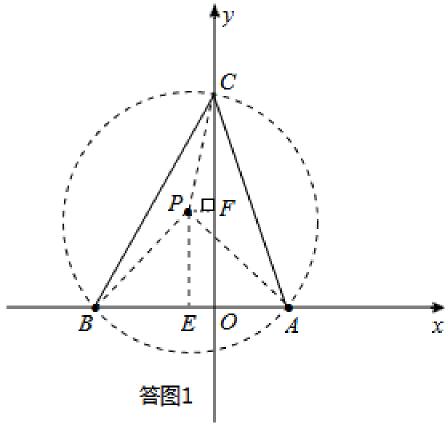
例 4：在平面直角坐标系中，已知点 *A*（4，0）、*B*（－6，0），点 *C* 是 *y* 轴上的一个动点，当∠*BCA*＝45°时，点 *C* 的坐标为__________.

【解答】解：设线段 *BA* 的中点为 *E*,

∵点 *A*（4，0）、*B*（－6，0），∴*AB*＝10，*E*（－1，0）.

①如图 1 所示，过点 *E* 在第二象限作 *EP*⊥*BA*，且 $EP=\frac{1}{2}AB=5$，则易知△*PBA* 为等腰直角三角形，∠*BPA*＝90°，$PA=PB=5\sqrt{2}$；

以点 *P* 为圆心，*PA*（或 *PB*）长为半径作⊙*P*，与 *y* 轴的正半轴交于点 *C*,



答图1

∵$\angle BCA$ 为⊙P 的圆周角，

∴$\angle BCA=\frac{1}{2}\angle BPA=45°$，即则点 C 即为所求．

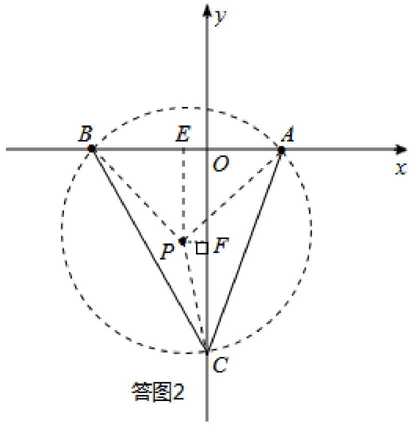
过点 P 作 $PF\perp y$ 轴于点 F，则 $OF=PE=5$，$PF=1$，

在 Rt△PFC 中，$PF=1$，$PC=5\sqrt{2}$，由勾股定理得：

$CF=\sqrt{PC^2-PF^2}=7$，

∴$OC=OF+CF=5+7=12$，

∴点 C 坐标为（0，12）；



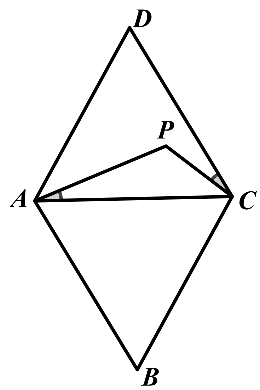
答图2

②如答图 2 所示，在第 3 象限可以参照（1）作同样操作，同理求得 y 轴负半轴上的点 C 坐标为（0，﹣12）．

综上所述，点 C 坐标为（0，12）或（0，﹣12）．

练习二：

7．如图，在边长为 2 的菱形 $ABCD$ 中，$\angle D=60°$ 点 P 是正方形 $ABCD$ 内一点，连接 AC，AP，PC，若$\angle PAC=\angle PCD$，则ΔACP面积的大值为 ____________．



【解答】解：在菱形 $ABCD$ 中，$AD=DC=2$，$\angle D=60°$

∴三角形 ADC 为等边三角形

∴$\angle DCA=60°$

∵$\angle PAC=\angle PCD$

∴$\angle PCD+\angle PCA=\angle PAC+\angle PCA=60°$

∴$\angle P=120°$

又∵$AC=2$