计算方法习题库 1

1．求下三角阵的逆矩阵的详细算法。

［解］设下三角矩阵 L 的逆矩阵为 T

$$L=\begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix},\quad T=\begin{bmatrix} t_{11} & & & \\ t_{21} & t_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}.$$

我们可以使用待定法，求出矩阵 T 的各列向量。为此我们将 T 按列分块如下：

$$T=\left[T_1,T_2,\cdots,T_n\right]$$

注意到

$$LT=\left[LT_1,LT_2,\cdots,LT_n\right]=\left[e_1,e_2,\cdots,e_n\right]=I$$

我们只需运用算法 1·1·1，逐一求解方程

$$LT_i=e_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

便可求得$T=L^{-1}.$

［注意］考虑到内存空间的节省，我们可以置结果矩阵 T 的初始状态为单位矩阵。这样，我们便得到如下具体的算法：

算法（求解下三角矩阵 L 的逆矩阵 T，前代法）

预置步　置$T=I$

$for\quad j=1:n$

$\quad for\quad k=1:n-1$

$\qquad T(k,j)=T(k,j)/L(k,k)$

$\qquad T(k+1:n,j)=T(k+1:n,j)-T(k,j)L(j+1:n,k)$

$\quad end$

$\quad T(n,j)=T(n,j)/L(n,n)$

end

2．设$S,T\in R^{n\times n}$为两个上三角矩阵，而且线性方程组$(ST-\lambda I)x=b$是非奇异的，试给出一种运算量为$O(n^2)$的算法，求解该方程组。

［解］ 因$(ST-\lambda I)=(S-\lambda T^{-1})T$，故为求解线性方程组$(ST-\lambda I)x=b$，可先求得上三角矩阵 T 的逆矩阵$T^{-1}$，依照上题的思想我们很容易得到计算$T^{-1}$的算法。于是对该问题我们有如下解题的步骤：

（1）计算上三角矩阵 T 的逆矩阵T^{-1}，算法如下：

算法 1（求解上三角矩阵的逆矩阵，回代法。该算法的的运算量为n^3）

预置步　置$\widetilde{T}=I$

$for\quad j=1:n$

$\quad for\quad k=n:-1:2$

$\quad\quad \widetilde{T}(k,j)=\widetilde{T}(k,j)/T(k,k)$

$\quad\quad \widetilde{T}(1:k-1,j)=\widetilde{T}(1:k-1,j)-\widetilde{T}(k,j)T(1:k-1,k)$

$\quad end$

$\quad \widetilde{T}(1,j)=\widetilde{T}(1,j)/T(1,1)$

end

（2）计算上三角矩阵$\widetilde{S}=S-\lambda T^{-1}$。运算量大约为$n^2/2$.

（3）用回代法求解方程组：$\widetilde{S}y=b$. 运算量为n^2；

（4）用回代法求解方程组：$Tx=y$. 运算量为n^2。

算法总运算量大约为：$n^3+O(n^2)$.

3．证明：如果$L_k=I-l_ke_k^T$是一个 Gauss 变换，则$L_k^{-1}=I+l_ke_k^T$也是一个 Gauss 变换。

［解］按 Gauss 变换矩阵的定义，易知矩阵$I+l_k e_k^T$是 Gauss 变换。下面我们只需证明它是 Gauss 变换$L_k = I - l_k e_k^T$的逆矩阵。事实上

$$(I-l_k e_k^T)(I+l_k e_k^T) = I + l_k e_k^T - l_k e_k^T - l_k e_k^T l_k e_k^T = I - l_k e_k^T l_k e_k^T$$

注意到$l_k = (0,\cdots,0,l_{k+1,k},\cdots,l_{n,k})^T$，则显然有$e_k^T l_k = 0.$从而有

$$L_k^{-1} = I + l_k e_k^T$$

4．确定一个 Gauss 变换 L，使

$$L\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\7\\8\end{bmatrix}$$

［解］比较比较向量$(2,3,4)^T$和$(2,7,8)^T$可以发现 Gauss 变换 L 应具有功能：使向量$(2,3,4)^T$的第二行加上第一行的 2 倍；使向量$(2,3,4)^T$的第三行加上第一行的 2 倍。于是 Gauss 变换如下

$$L=\begin{bmatrix}1 & & \\ 2 & 1 & \\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

5．证明：如果$A\in R^{n\times n}$有三角分解，并且是非奇异的，那么定理 1·1·2 中的 L 和 U都是唯一的。

［证明］设 $A=L_1U_1=L_2U_2$，其中L_1,L_2都是单位下三角阵，U_1,U_2都是上三角阵。因为 A非奇异的，于是

$$L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$$

注意到，单位下三角阵的逆仍是单位下三角阵，两个单位下三角阵的乘积仍是单位下三角阵；上三角阵的逆仍是上三角阵，两个上三角阵的乘积仍是上三角阵。

因此，上述等将是一个单位下三角阵与一个上三角阵相等，故此，它们都必是单位矩阵。即$L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1} = I$，

从而

$$L_1 = L_2, U_1 = U_2.$$

即A的LU分解是唯一的。

6．设$A = [a_{ij}] \in R^{n\times n}$的定义如下

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果} i = j \text{或} j = n, \\ -1, & \text{如果} i > j, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

证明A有满足$|l_{ij}| \le 1$和$u_{nn} = 2^{n-1}$的三角分解。

［证明］令 $L = [l_{ij}] \in R^{n\times n}$是单位下三角阵，$U = [u_{ij}] \in R^{n\times n}$是上三角阵。定义如下

$$l_{ij} = \begin{cases} 0, & i < j \\ 1, & i = j \\ -1, & i > j \end{cases}$$

$$u_{i,j} = \begin{cases} 2^{i-1} & i = 1,2,\cdots,n;\ j = n. \\ 1 & i = j \\ 0 & \text{其余} \end{cases}$$

容易验证：$A = LU.$

7．设A对称且$a_{11} \ne 0$，并假定经过一步Gauss消去之后，A具有如下形式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

证明A_2仍是对称阵。

［证明］根据 Gauss 变换的属性，显然做矩阵 A的 LU分解的第一步中的 Gauss 变换为

$$L_1=\begin{bmatrix}1 & & & \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 \\ -\frac{a_1}{a_{11}} & I\end{bmatrix}$$

其中$a_1^T=(a_{21},\cdots,a_{n1})$，将 A分块为

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_1^T \\ a_1 & A_{22}^{(0)}\end{bmatrix}$$

那么

$$L_1A=\begin{bmatrix}1 & 0 \\ -\frac{a_1}{a_{11}} & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_1^T \\ a_1 & A_{22}^{(0)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_{22}^{(0)}-a_1a_1^T/a_{11}\end{bmatrix}$$

即

$$A_2=A_{22}^{(0)}-a_1a_1^T/a_{11}$$

由 A的对称性，A_2对称性则是显而易见的。

8．设$A=[a_{ij}]\in R^{n\times n}$是严格对角占优阵，即 A满足

$$|a_{kk}|>\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}|a_{kj}|,\qquad k=1,2,\cdots,n.$$

又设经过一步 Gauss 消去后，A具有如下形式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

试证：矩阵A_2仍是严格对角占优阵。由此推断：对于对称的严格对角占优矩阵来说，用 Gauss 消去法和列主元 Gauss 消去法可得得同样的结果。

[证明] 依上题的分析过程易知，题中的

$$A_2 = [\tilde{a}_{ij}], 其中: \tilde{a}_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1i}}{a_{11}}, i, j = 2, \cdots, n.$$

于是A_2主对角线上的元素满足

$$|\tilde{a}_{ii}| = \left|a_{ii} - \frac{a_{i1}a_{1i}}{a_{11}}\right| > |a_{ii}| - \frac{|a_{i1}||a_{1i}|}{|a_{11}|}, \qquad i = 2, \cdots, n. \tag{1}$$

A_2非主对角线上的元素满足

$$\sum_{\substack{k=2 \\ k\neq i}}^{n} |\tilde{a}_{ik}| = \sum_{\substack{k=2 \\ k\neq i}}^{n} \left|a_{ik} - \frac{a_{i1}a_{1k}}{a_{11}}\right| \le \sum_{\substack{k=2 \\ k\neq i}}^{n} |a_{ik}| + \frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|} \sum_{\substack{k=2 \\ k\neq i}}^{n} |a_{1k}|,$$

由于 A是严格对角占优的，即 $|a_{kk}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|, k = 1, 2, \cdots, n.$ 故

$$\sum_{\substack{k=2 \\ k\neq i}}^{n} |a_{ik}| < |a_{ii}| - |a_{i1}|,$$

$$\sum_{\substack{k=2 \\ k\neq i}}^{n} |a_{1k}| < |a_{11}| - |a_{1i}|.$$

从而

$$\sum_{\substack{k=2 \\ k\neq i}}^{n} |\tilde{a}_{ik}| < |a_{ii}| - \frac{|a_{i1}||a_{1i}|}{|a_{11}|}, \qquad i = 2, \cdots, n. \tag{2}$$

综合（1）和（2）得

$$|\tilde{a}_{ii}| > \sum_{\substack{k=2 \\ k\neq i}}^{n} |\tilde{a}_{ik}|, \qquad i = 2,\cdots,n.$$

即，矩阵A_2仍是严格对角占优阵。

9．设$A \in R^{n\times n}$有三角分解。指出当把 Gauss 消去法应用于$n\times(n+1)$矩阵$[A,b]$时，怎样才能不必存储 L 而解出 Ax=b？需要多少次乘法运算？

［解］用 Gauss 消去法作 A 的 LU 分解，实际上就是对系数矩阵 A 作了一组初等行变换，将其化为上三角矩阵 U。而这一组的初等行变换对应的变换矩阵就是L^{-1}，即

$$L^{-1}A = U$$

如果把这一组初等行变换施加于方程右端向量 b 上，即有

$$L^{-1}[A,b] = [U, L^{-1}b]$$

这就是说，方程组$Ax=b$和$Ux=L^{-1}b$是同解方程。而后者是上三角形方程组，可运用本章算法 1•1•2 求解。这样我们就不必存储 L，通求解方程组$Ux=L^{-1}b$，来求解原方程组$Ax=b$。算法如下：

（1）用初等变换化$[A,b]$为$[U, L^{-1}b]$；

$$\begin{aligned}
&for\quad k = 1:n-1\\
&\quad A(k+1:n,k) = A(k+1:n,k)/A(k,k)\\
&\quad A(k+1:n,k+1:n) = A(k+1:n,k+1:n) - A(k+1:n,k)A(k,k+1:n)\\
&\quad b(k+1:n) = b(k+1:n) - A(k+1:n,k)b(k)\\
&end
\end{aligned}$$

（2）利用回代法求解方程组$Ux=L^{-1}b$。

该算法所需要的加、减、乘、除运算次数为

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(3k+2K^2\right)+n^2=\frac{5}{3}n^3+2n^2-\frac{8}{3}n$$

10．A是正定阵，如果对A执行Gauss消去一步产生一个形式为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

的矩阵，证明A_2仍是正定阵。

［证明］不妨设

$$L_1A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},\quad 则有\qquad L_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{a_1}{a_{11}} & I \end{bmatrix}$$

从而有

$$L_1AL_1^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{a_1}{a_{11}} & I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

由于L_1非奇异，故对$\forall x\in R^{n-1}$且$x\neq 0$，构造$\tilde{x}=(0,x^T)^T$，及$y=L_1^T\tilde{x}$，则由A的正定性有

$$0<y^TAy=\tilde{x}^TL_1AL_1^T\tilde{x}=(0,x^T)\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}=(0,x^T)\begin{bmatrix} 0 \\ A_2x \end{bmatrix}=x^TA_2x$$

由x的任意性知，A_2正定。

11．设

$$A=\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} k \\ n-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} & \end{array}$$

并且A_{11}是非奇异的。矩阵

$$S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$

称为是A_{11}在A中的Schur 余阵。证明：如果A_{11}有三角分解，那么经过k步Gauss消去以后，S正好等于（1・1・4）的矩阵$A_{22}^{(k)}$.

［证明］因为A_{11}有三角分解，所以矩阵A可保证前k步Gauss消去法可以顺利完成。即有如下单位下三角矩阵

$$L = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} k \\ n-k \end{array}$$

使

$$LA = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\ 0 & A_{22}^{(k)} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} k \\ n-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} & \end{array}$$

注意到

$$LA = \begin{bmatrix} L_{11}A_{11} & L_{11}A_{12} \\ L_{21}A_{11} + A_{21} & L_{21}A_{12} + A_{22} \end{bmatrix}$$

比较两式便知，$L_{21} = -A_{21}A_{11}^{-1}$，故有

$$A_{22}^{(k)} = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}$$

12．证明：如果用全主元Gauss 消去法得到 PAQ=LU则对任意i有

$|u_{ii}| \geq |u_{ij}|, j = i+1, \cdots, n.$

［证明］略。

13．利用列主元Gauss 消去法给出一种求逆矩阵的实用算法。

］设 A是非奇异的，则应用列主元 Gauss 消去法可得到

$$PA = LU$$

这里：P 是置换阵，L 是单位下三角阵，U是上三角阵。于是，通过求解下列 n 个方程组

$$LUx_j = e_j\,,\quad j = 1,2,\cdots,n.$$

便可求得

$$(PA)^{-1} = A^{-1}P = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$$

于是

$$A^{-1} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]P$$

也就是说，求 A的逆矩阵，可按下列方案进行：

（1）用列主元 Gauss 消去法得到：$PA = LU$；

（2）经求解：$LUx_j = e_j\,,\quad j = 1,2,\cdots,n.$ 得 $(PA)^{-1} = X, \quad X \in R^{n\times n}$；

（3）对 X进行列置换得：$A^{-1} = XP$。

14．假定已知 $A \in R^{n\times n}$ 的三角分解：A=LU 试设计一个算法来计算 A^{-1} 的（i，j）元素。

［解］求解方程组

$$LUx = e_j$$

则 x 的第 i 个分量 x_i 就是 A^{-1} 的（i,j ）元素。