

第04讲 6.3.1 二项式定理+6.3.2 二项式系数的性质

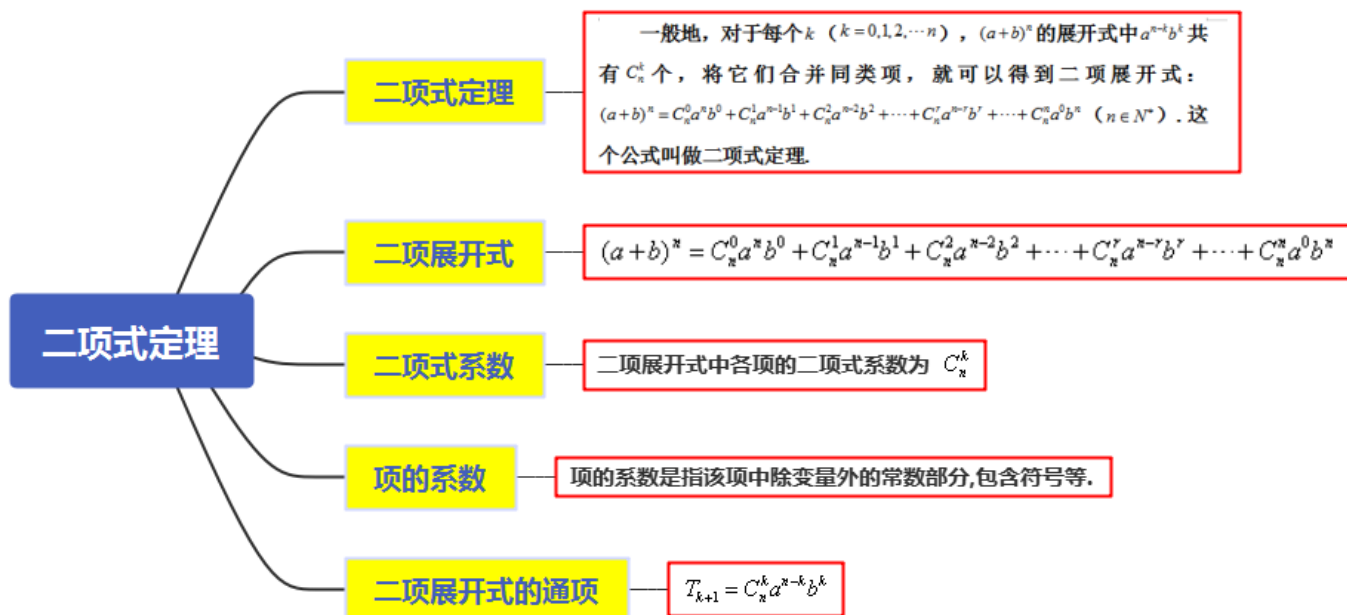
01

学习目标

课程标准	学习目标
①理解二项式定理的概念，会用二项式定理求解二项展开式。 ②掌握二项式系数的规律和指数的变化规律。 ③掌握多项式展开式的通项及特殊项或系数。 ④理解二项式系数的性质。 ⑤会用赋值法求展开式系数的和。	1.要求能运用二项式定理求解二项展开式； 2.会求展开式中的二项式系数，特殊项及特殊项系数； 3.能用待定法求展开式中的特定系数.能解决与二项式定理相关的综合问题； 4.能理解二项式系数的性质； 5.掌握二项式系数的增减性，灵活应用赋值法求二项展开式各项系数和.

02

思维导图



知识点 01: 知识链接

$$(1) (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2$$

$$(2) (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3$$

知识点 02: 二项式定理及相关概念

(1) 二项式定理

一般地, 对于每个 k ($k=0,1,2,\dots,n$), $(a+b)^n$ 的展开式中 $a^{n-k}b^k$ 共有 C_n^k 个, 将它们合并同类项, 就可以得到二项展开式: $(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^r a^{n-r} b^r + \dots + C_n^n a^0 b^n$ ($n \in N^*$). 这个公式叫做二项式定理.

(2) 二项展开式

公式中: $(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^r a^{n-r} b^r + \dots + C_n^n a^0 b^n$, $n \in N^*$ 等号右边的多项式叫做 $(a+b)^n$ 的二项展开式.

【即学即练 1】 (2023 上·高二课时练习) 用二项式定理展开下列各式:

$$(1) (\sqrt[3]{a}+b)^6; \quad (2) \left(2\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^7.$$

【答案】 (1) 答案见解析

(2) 答案见解析

【详解】 (1) $(\sqrt[3]{a}+b)^6 = \left(a^{\frac{1}{3}}+b\right)^6$

$$= C_6^0 \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^6 + C_6^1 \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^5 b + C_6^2 \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^4 b^2 + C_6^3 \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 b^3 + C_6^4 \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 b^4 + C_6^5 \left(a^{\frac{1}{3}}\right) b^5 + C_6^6 b^6$$

$$= a^2 + 6a^{\frac{5}{3}}b + 15a^{\frac{4}{3}}b^2 + 20ab^3 + 15a^{\frac{2}{3}}b^4 + 6a^{\frac{1}{3}}b^5 + b^6.$$

$$(2) \left(2\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^7 = C_7^0 (2\sqrt{x})^7 + C_7^1 (2\sqrt{x})^6 \left(-\frac{3}{\sqrt{x}}\right) + C_7^2 (2\sqrt{x})^5 \left(-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^2 + C_7^3 (2\sqrt{x})^4 \left(-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^3$$

$$+ C_7^4 (2\sqrt{x})^3 \left(-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^4 + C_7^5 (2\sqrt{x})^2 \left(-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^5 + C_7^6 (2\sqrt{x}) \left(-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^6 + C_7^7 \left(-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^7$$

$$= 128x^{\frac{7}{2}} - 1344x^{\frac{5}{2}} + 6048x^{\frac{3}{2}} - 15120x^{\frac{1}{2}} + 22680x^{-\frac{1}{2}} - 20412x^{-\frac{3}{2}} + 10206x^{-\frac{5}{2}} - 2187x^{-\frac{7}{2}}.$$

(3) 二项式系数与项的系数

二项展开式中各项的二项式系数为 C_n^k ($k=0,1,2,\dots,n$), 项的系数是指该项中除变量外的常数部分, 包含符号等.

②增减性：当 $k < \frac{n+1}{2}$ 时，二项式系数递增，当 $k > \frac{n+1}{2}$ 时，二项式系数递减；

③最大值：当 n 为奇数时，最中间两项二项式系数最大；当 n 为偶数时，最中间一项的二项式系数最大。

④各二项式系数和： $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^k + \cdots + C_n^n = 2^n (n \in \mathbb{N}^*)$ ；

奇数项的二项式系数和与偶数项的二项式系数和相等：

$$C_n^0 + C_n^2 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + \cdots = 2^{n-1} (n \in \mathbb{N}^*)$$

【即学即练 4】（2023·全国·高三专题练习）已知 $n \in \mathbb{N}^*$ ， $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ ，若 $4a_1 + a_2 = 80$ ，则展开式各项的二项式系数和为（ ）

A. 81

B. 64

C. 27

D. 32

【答案】D

【详解】 $a_1 = C_n^1 \cdot 2 = 2n$ ， $a_2 = C_n^2 \cdot 2^2 = 4C_n^2$ ，

$$\therefore 4 \times 2n + 4C_n^2 = 80, \text{ 解得 } n = 5,$$

$\therefore$ 该展开式各项的二项式系数和为 $2^5 = 32$ 。

故选：D

【即学即练 5】（2023 上·辽宁沈阳·高二校考阶段练习）若 $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ 展开式的二项式系数之和为 64，则展开式的常数项为_____。

【答案】15

【详解】 因为 $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ 展开式的二项式系数之和为 64，

所以 $2^n = 64$ ，所以 $n = 6$ ，

所以二项式为 $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^6$ ，

所以第 $k+1$ 项展开式为 $T_{k+1} = C_6^k (x^2)^{6-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = C_6^k x^{12-3k}$ ，

若求常数项，则令 $12-3k=0$ ，所以 $k=4$ ，

所以 $T_5 = C_6^4 = 15$ ，即常数项为 15。

故答案为：15。

04

题型精讲

题型 01 求 $(a \pm b)^n$ 型的展开式

【典例 1】（2023 下·北京通州·高二统考期中）二项式 $(x+2)^3$ 的展开式为（ ）

A. $x^3 + 6x^2 + 6x + 8$

B. $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

C. $x^3 + 12x^2 + 6x + 8$

D. $x^3 + 12x^2 + 12x + 8$

【答案】B

【详解】二项式 $(x+2)^3 = C_3^0 x^3 + C_3^1 x^2 \times 2 + C_3^2 x \times 2^2 + C_3^3 \times 2^3$,

$$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8.$$

故选：B

【典例2】(2023 上·高二课时练习) 求 $(x + \frac{1}{x})^5$ 的二项展开式.

【答案】 $x^5 + 5x^3 + 10x + \frac{10}{x} + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^5}$

【详解】由二项式定理，得 $(x + \frac{1}{x})^5 = C_5^0 x^5 + C_5^1 x^4 \cdot \frac{1}{x} + C_5^2 x^3 \cdot (\frac{1}{x})^2 + C_5^3 x^2 \cdot (\frac{1}{x})^3 + C_5^4 x \cdot (\frac{1}{x})^4 + C_5^5 (\frac{1}{x})^5$
 $= x^5 + 5x^3 + 10x + \frac{10}{x} + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^5},$

所以 $(x + \frac{1}{x})^5$ 的二项展开式是 $x^5 + 5x^3 + 10x + \frac{10}{x} + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^5}.$

【典例3】(2023·全国·高二专题练习) 利用二项式定理展开下列各式：

(1) $(1+x)^5$;

(2) $(2-x)^4$.

【答案】(1)答案见解析

(2)答案见解析

【详解】(1) 解：由 $(1+x)^5 = C_5^0 + C_5^1 x + C_5^2 x^2 + C_5^3 x^3 + C_5^4 x^4 + C_5^5 x^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5.$

(2) 解：由 $(2-x)^4 = C_4^0 \cdot 2^4 + C_4^1 \cdot 2^3 \cdot (-x) + C_4^2 \cdot 2^2 \cdot (-x)^2 + C_4^3 \cdot 2 \cdot (-x)^3 + C_4^4 \cdot (-x)^4$
 $= 16 - 32x + 24x^2 - 8x^3 + x^4.$

【变式1】(2023·全国·高二课堂例题) 写出 $(2-x)^5$ 的展开式.

【答案】 $32 - 80x + 80x^2 - 40x^3 + 10x^4 - x^5$

【详解】在二项式定理中令 $a=2, b=-x, n=5$ ，可得

$$(2-x)^5 = C_5^0 2^5 + C_5^1 2^4 (-x) + C_5^2 2^3 (-x)^2 + C_5^3 2^2 (-x)^3 + C_5^4 2 (-x)^4 + C_5^5 (-x)^5$$
$$= 32 - 80x + 80x^2 - 40x^3 + 10x^4 - x^5.$$

【变式2】(2023·全国·高二专题练习) 求 $(x-2y)^4$ 的展开式.

【答案】 $x^4 - 8x^3y + 24x^2y^2 - 32xy^3 + 16y^4$

【详解】 $(x-2y)^4 = C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3 \cdot (-2y) + C_4^2 x^2 \cdot (-2y)^2 + C_4^3 x \cdot (-2y)^3 + C_4^4 (-2y)^4$
 $= x^4 - 8x^3y + 24x^2y^2 - 32xy^3 + 16y^4$

题型 02 二项展开式的逆用

【典例 1】(2023 下·黑龙江七台河·高二勃利县高级中学校考期中) $1 - 2C_n^1 + 4C_n^2 - 8C_n^3 + \dots + (-2)^n C_n^n =$ ().

A. 1

B. -1

C. $(-1)^n$

D. 3^n

【答案】C

【详解】原式 $= C_n^0 (-2)^0 + C_n^1 (-2)^1 + C_n^2 (-2)^2 + \dots + C_n^n (-2)^n = (1-2)^n = (-1)^n$.

故选: C.

【典例 2】(2023 下·上海浦东新·高二校考期中) $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n =$ _____.

【答案】 3^n

【详解】原式 $= 2^0 C_n^0 + 2^1 C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n = (1+2)^n = 3^n$.

故答案为: 3^n .

【典例 3】(2023 上·高二课时练习) 化简 $(x-1)^5 + 5(x-1)^4 + 10(x-1)^3 + 10(x-1)^2 + 5(x-1)$.

【答案】 $x^5 - 1$.

【详解】原式 $= C_5^0 (x-1)^5 + C_5^1 (x-1)^4 + C_5^2 (x-1)^3 + C_5^3 (x-1)^2 + C_5^4 (x-1) + C_5^5 (x-1)^0 - 1$
 $= [(x-1)+1]^5 - 1 = x^5 - 1$

【变式 1】(2023 上·高二课时练习) 化简: 设 $n \in \mathbf{N}_+$, 则 $C_n^0 2^n - C_n^1 2^{n-1} + \dots + (-1)^k C_n^k 2^{n-k} + \dots + (-1)^n C_n^n =$ _____.

【答案】1

【详解】因为 $C_n^0 2^n - C_n^1 2^{n-1} + \dots + (-1)^k C_n^k 2^{n-k} + \dots + (-1)^n C_n^n$
 $= C_n^0 2^n (-1)^0 + C_n^1 2^{n-1} \cdot (-1)^1 + \dots + C_n^k 2^{n-k} \cdot (-1)^k + \dots + C_n^n 2^0 \cdot (-1)^n = (2-1)^n = 1$

故答案为: 1

【变式 2】(2023 下·安徽合肥·高二统考期末) 已知 $C_n^0 - 4C_n^1 + 4^2 C_n^2 - 4^3 C_n^3 + \dots + (-1)^n 4^n C_n^n = 729$, 则 n 的值为_____.

【答案】6

【详解】由 $C_n^0 - 4C_n^1 + 4^2 C_n^2 - 4^3 C_n^3 + \dots + (-1)^n 4^n C_n^n = 729$,
可得 $C_n^0 \cdot 1^n \cdot (-4)^0 + C_n^1 \cdot 1^{n-1} \cdot (-4)^1 + C_n^2 \cdot 1^{n-2} \cdot (-4)^2 + \dots + C_n^n \cdot 1^0 \cdot (-4)^n = 729$
则 $(1-4)^n = 729$, 即 $(-3)^n = 729 = (-3)^6$, 解得 $n=6$.

故答案为: 6.

【变式 3】(2023·辽宁大连·育明高中校考一模) $C_{2023}^0 - 2C_{2023}^1 + 2^2 C_{2023}^2 - 2^3 C_{2023}^3 + \dots + 2^{2022} C_{2023}^{2022} - 2^{2023} C_{2023}^{2023}$ 的值是_____.

【答案】 -1

【详解】由已知可得，

$$\begin{aligned} & C_{2023}^0 - 2C_{2023}^1 + 2^2 C_{2023}^2 - 2^3 C_{2023}^3 + \cdots + 2^{2022} C_{2023}^{2022} - 2^{2023} C_{2023}^{2023} \\ &= C_{2023}^0 \times 1^{2023} \times (-2)^0 + C_{2023}^1 \times 1^{2022} \times (-2)^1 + \cdots + C_{2023}^{2022} \times 1^1 \times (-2)^{2022} + C_{2023}^{2023} \times 1^0 \times (-2)^{2023} \\ &= (1-2)^{2023} = -1. \end{aligned}$$

故答案为：-1.

题型 03 二项展开式中的特定项或特定系数问题

【典例 1】(2023·四川南充·统考一模) 二项式 $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中常数项为 ()

A. -60

B. 60

C. 210

D. -210

【答案】 B

【详解】展开式的通项为 $T_{k+1} = C_6^k \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{6-k} (-2x^{-1})^k$,

所以 $\frac{1}{2}(6-k) + (-1)k = 0 \Rightarrow k = 2$,

常数项为 $C_6^2 (-2)^2 = \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 4 = 60$,

故选：B.

【典例 2】(2023 下·山东济宁·高二统考期中) $(1+x)^4 + (1+x)^5 + \cdots + (1+x)^8$ 的展开式中 x^3 的系数是 ()

A. 126

B. 125

C. 96

D. 83

【答案】 B

【详解】由题意原式中 x^3 的系数 $= C_4^3 + C_5^3 + C_6^3 + C_7^3 + C_8^3 = 125$;

故选：B.

【典例 3】(2023·西藏拉萨·统考一模) 二项式 $\left(2x - \frac{1}{x^3}\right)^5$ 的展开式中的第 3 项为 ()

A. 160

B. $-80x$

C. $\frac{80}{x^3}$

D. $-\frac{40}{x^7}$

【答案】 C

【详解】因为 $T_{k+1} = C_5^k (2x)^{5-k} \cdot \left(-\frac{1}{x^3}\right)^k$, 所以 $T_3 = C_5^2 (2x)^3 \cdot \left(-\frac{1}{x^3}\right)^2 = \frac{80}{x^3}$, 故 C 项正确.

故选：C.

【典例 4】(2023 上·高二课时练习) $\left(x^3 + \frac{2}{3x^2}\right)^5$ 的展开式的第 3 项的系数为_____；常数项为_____.

【答案】 $\frac{40}{9}$ $\frac{80}{27}$

【详解】由二项式 $\left(x^3 + \frac{2}{3x^2}\right)^5$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_5^r (x^3)^{5-r} \left(\frac{2}{3x^2}\right)^r = \left(\frac{2}{3}\right)^r \cdot C_5^r x^{15-5r}$,

可得展开式中第3项为 $T_3 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot C_5^2 x^5 = \frac{40}{9} x^5$, 所以第3项的系数为 $\frac{40}{9}$,

令 $15-5r=0$, 可得 $r=3$, 所以展开式的常数项为 $T_4 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot C_5^3 = \frac{80}{27}$.

故答案为: $\frac{40}{9}; \frac{80}{27}$.

【变式1】(2023上·北京东城·高三景山学校校考阶段练习) 二项式 $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中常数项为_____.(用数字作答)

【答案】60

【详解】二项式 $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式的通项公式 $T_{r+1} = C_6^r (\sqrt{x})^{6-r} \left(-\frac{2}{x}\right)^r = (-2)^r C_6^r x^{3-\frac{3}{2}r}, r \leq 6, r \in \mathbf{N}$,

由 $3-\frac{3}{2}r=0$, 得 $r=2$, 则 $T_3 = (-2)^2 C_6^2 = 4 \times 15 = 60$,

所以二项式 $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中常数项为60.

故答案为: 60

【变式2】(2023·山西临汾·校考模拟预测) $\left(\frac{2}{x} - x^3\right)^6$ 的展开式中含 x^2 的项的系数是_____. (用数字作答)

【答案】240

【详解】因为 $\left(\frac{2}{x} - x^3\right)^6$ 的展开通项公式为

$$T_{r+1} = C_6^r \left(\frac{2}{x}\right)^{6-r} (-x^3)^r = (-1)^r \cdot 2^{6-r} C_6^r x^{4r-6} (0 \leq r \leq 6, r \in \mathbf{N}),$$

令 $4r-6=2$, 得 $r=2$,

所以其中含 x^2 的项的系数为 $(-1)^2 \cdot 2^4 C_6^2 = 16 \times 15 = 240$.

故答案为: 240.

【变式3】(2023下·四川遂宁·高三射洪中学校考阶段练习) 二项式 $(2-x)^5$ 展开式中的含 x^3 项的系数为_____.

【答案】-40

【详解】二项式 $(2-x)^5$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_5^r 2^{5-r} (-x)^r = (-1)^r 2^{5-r} C_5^r x^r$,

令 $r=3$, 则 $T_{3+1} = (-1)^3 2^2 C_5^3 x^3 = -40x^3$.

故答案为: -40.

【变式 4】(2023 下·江苏镇江·高二统考期中) 在 $(1+x)^2 + (1+x)^3 + (1+x)^4 + \cdots + (1+x)^9 + (1+x)^{10}$ 展开式中, x^2 项的系数为_____.

【答案】165

【详解】由题意, 多项式 $(1+x)^2 + (1+x)^3 + (1+x)^4 + \cdots + (1+x)^9 + (1+x)^{10}$,

根据组合数的运算, 展开式中 x^2 的系数为 $C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \cdots + C_{10}^2$,

又由 $C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \cdots + C_{10}^2 = C_3^3 + C_3^2 + C_4^2 + \cdots + C_{10}^2 = C_{11}^3 = 165$.

故答案为: 165.

题型 04 三项展开式中的特定项或特定系数问题

【典例 1】(2023 下·河北邢台·高二统考期末) $\left(x+2+\frac{1}{x}\right)^3$ 展开式中的常数项为 ()

A. 6

B. 15

C. 20

D. 28

【答案】C

【详解】因为 $\left(x+2+\frac{1}{x}\right)^3 = \left[\frac{(x+1)^2}{x}\right]^3 = \frac{(x+1)^6}{x^3}$,

所以展开式中的常数项即分子 $(x+1)^6$ 展开式中 x^3 的系数, 即 $C_6^3 = 20$.

故选: C

【典例 2】(2023·广东广州·统考模拟预测) $(2x^2+x-y)^5$ 的展开式中 x^5y^2 的系数为_____ (用数字作答).

【答案】120

【详解】由于 $x^5y^2 = (x^2)^2 \cdot x \cdot y^2$,

所以 $(2x^2+x-y)^5$ 的展开式中含 x^5y^2 的项为 $C_5^2(2x^2)^2 \times C_3^1x^1 \times C_2^2(-y)^2 = 120x^5y^2$,

所以 $(2x^2+x-y)^5$ 的展开式中 x^5y^2 的系数为 120.

故答案为: 120

【典例 3】(2023 上·山东·高三沂源县第一中学校联考开学考试) $(x-2y+1)^5$ 展开式中含 xy^3 项的系数为_____.

【答案】-160

【详解】 $(x-2y+1)^5$ 变形为 $[(x-2y)+1]^5$,

故通项公式得 $T_{r+1} = C_5^r(x-2y)^{5-r}$,

其中 $(x-2y)^{5-r}$ 的通项公式为 $C_{5-r}^k x^{5-r-k} (-2y)^k$,

故通项公式为 $C_5^r C_{5-r}^k x^{5-r-k} (-2y)^k$, 其中 $\begin{cases} 0 \leq k \leq 5-r \\ 0 \leq r \leq 5 \end{cases}$, $k, r \in \mathbb{N}$,

令 $k=3, 5-r-k=1$, 解得 $k=3, r=1$,

故 $C_5^1 C_4^3 x (-2y)^3 = -160xy^3$.

故答案为: -160

【变式 1】 (2023·广东·东莞市东华高级中学校联考一模) 在 $(ax-y+z)^7$ 的展开式中, 记 $x^m y^n z^k$ 项的系数为 $f(m, n, k)$, 若 $f(3, 2, 2) = \frac{70}{9}$, 则 a 的值为_____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【详解】 因为在 $(ax-y+z)^7$ 的展开式中, 记 $x^m y^n z^k$ 项的系数为 $f(m, n, k)$,

所以 $x^m y^n z^k$ 项的系数 $f(m, n, k) = C_7^m a^m C_{7-m}^n (-1)^n C_{7-m-n}^k$,

即 $f(m, n, k) = (-1)^n C_7^m a^m C_{7-m}^n C_{7-m-n}^k$,

由 $f(3, 2, 2) = \frac{70}{9}$, 可得 $(-1)^2 C_7^3 a^3 C_4^2 C_2^2 = \frac{70}{9}$,

即 $35 \times 6a^3 = \frac{70}{9}$,

所以 $a = \frac{1}{3}$.

故答案为: $\frac{1}{3}$.

【变式 2】 (2023 上·安徽·高三安徽省马鞍山市第二十二中学校联考阶段练习) $(x+2y-z)^8$ 展开式中, $x^3 y^2 z^3$ 项的系数为_____.

【答案】 -2240

【详解】 $(x+2y-z)^8 = [(x+2y)-z]^8$, $\therefore z$ 的指数是 3, $\therefore$ 得到 $C_8^3 (x+2y)^5 (-z)^3$,

$\therefore y$ 的指数是 2, 得到 $C_5^2 x^3 (2y)^2$, $\therefore x^3 y^2 z^3$ 项的系数为 $C_8^3 (-1)^3 C_5^2 2^2 = -2240$.

故答案为: -2240

【变式 3】 (2023 下·重庆沙坪坝·高三重庆南开中学校考阶段练习) $(x^2-x+2y)^5$ 的展开式中 $x^3 y^3$ 项的系数为_____.

【答案】 -160

【详解】 $(x^2-x+2y)^5$ 的展开式中, 构成 $x^3 y^3$ 项只能是一个 x^2 、一个 $(-x)$ 、3 个 $(2y)$ 相乘,

故此项为 $C_5^1 x^2 \cdot C_4^1 (-x) \cdot C_3^3 (2y)^3 = -160x^3 y^3$.

故答案为: -160.

题型 05 几个二项式的和或积的展开式中的特定项或特定系数问题

【典例 1】（2023 上·江西宜春·高二校考阶段练习） $\left(2+\frac{1}{x}\right)(1-x)^7$ 的展开式中 x^2 的系数为（ ）

A. -7

B. 7

C. 77

D. -77

【答案】B

【详解】 $(1-x)^7$ 的展开式通项为 $T_{r+1} = C_7^r \cdot (-x)^r = (-1)^r C_7^r \cdot x^r$ ，

故 $\left(2+\frac{1}{x}\right)(1-x)^7$ 的展开式中 x^2 的系数为 $2 \times (-1)^2 C_7^2 + (-1)^3 C_7^3 = 7$ ，

故选：B.

【典例 2】（2023·安徽·校联考模拟预测）二项式 $(x-2)(1+x)^n$ 的展开式中，所有项系数和为 -256，则 x^2 的系数为_____（用数字作答）.

【答案】-48

【详解】令 $x=1$ 可得二项式 $(x-2)(1+x)^n$ 的所有项系数和为 $-2^n = -256$ ，所以 $n=8$.

二项式 $(1+x)^8$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1} = C_8^r \cdot x^r$ ， $r=0, 1, \dots, 8$ ，

所以 $(x-2)(1+x)^8$ 的展开式中， x^2 的系数为 $C_8^1 - 2C_8^2 = -48$.

故答案为：-48

【典例 3】（2023 上·全国·高三专题练习） $(2x^2-3x)\left(2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$ 的展开式中含 x 的项的系数为_____.

【答案】960

【详解】 $\left(2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_7^r 2^{7-r} (-1)^r x^{-\frac{r}{2}}$ ，故令 $r=0, 2$ ，

可得 $(2x^2-3x)\left(2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$ 的展开式中含 x 的项的系数为： $(-3) \times C_7^0 \times 2^7 + 2 \times C_7^2 \times 2^5 = -384 + 1344 = 960$.

故答案为：960.

【典例 4】（2023·天津·高三专题练习）若 $(1+2x^2)\left(\sqrt{ax}+\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中所有项的系数和为 192，则展开式中 x^4 的系数为_____.

【答案】36

【详解】令 $x=1$ ，得 $3(\sqrt{a}+1)^6 = 192$ ，解得 $a=1$ ，进而可得 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式为 $T_{r+1} = C_6^r x^{6-2r}$ ，令 $r=1$ ，

得 $T_2 = C_6^1 x^4 = 6x^4$ ，令 $r=2$ ，得 $T_3 = C_6^2 x^2 = 15x^2$ ，

故 x^4 的系数为 $1 \times 6 + 2 \times 15 = 36$.

故答案为：36

【变式 1】（2023·全国·模拟预测） $(1-2x^2)\left(x+\frac{2}{x}\right)^8$ 的展开式中常数项为_____。（用数字作答）

【答案】 -2464

【详解】 $\left(x + \frac{2}{x}\right)^8$ 的展开式的通项 $T_{r+1} = C_8^r x^{8-r} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^r = C_8^r 2^r x^{8-2r} \quad (r=0, 1, 2, \dots, 8)$.

当 $r=4$ 时, 其展开式的常数项为 $C_8^4 2^4 = 1120$;

当 $r=5$ 时, 其展开式中 $\frac{1}{x^2}$ 的系数为 $C_8^5 2^5 = 1792$,

则 $(1-2x^2) \cdot \left(x + \frac{2}{x}\right)^8$ 的展开式中常数项为 $1120 - 2 \times 1792 = -2464$.

故答案为: -2464

【变式 2】 (2023 下·山东临沂·高二统考期中) 已知 $\left(ax + \frac{1}{x}\right)(2x+1)^5 (a \neq 0)$, 若其展开式中各项的系数和为 81, 则 $a =$ _____.

【答案】 $-\frac{2}{3}$

【详解】 由 $\left(ax + \frac{1}{x}\right)(2x+1)^5$ 展开式中各项的系数和为 81,

令 $x=1$, 可得 $(a+1)(2 \times 1+1)^5 = 81$, 解得 $a = -\frac{2}{3}$.

故答案为: $-\frac{2}{3}$.

【变式 3】 (2023·江苏·统考模拟预测) 已知 $(4x-1)(2x+1)^n$ 的展开式中所有项的系数之和为 81, 则展开式中含 x^4 的项的系数为_____.

【答案】 32

【详解】 记 $(4x-1)(2x+1)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n+1}x^{n+1}$

令 $x=1$, 则 $(4-1)(2+1)^n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} = 81$, 即 $3^{n+1} = 81$, $n=3$

则 $(4x-1)(2x+1)^3$ 的展开式中含 x^4 的项为 $4x \cdot C_3^0 (2x)^3 = 32x^4$.

故答案为: 32

【变式 4】 (2023·全国·模拟预测) 已知 $(2x-3)^n$ 的二项展开式中, 偶数项的二项式系数之和为 16, 则展开式中 x^3 的系数为_____.

【答案】 720

【详解】 由偶数项的二项式系数之和为 16,

则有 $2^{n-1} = 16 \Rightarrow n=5$,

所以展开式中 x^3 的项为: $C_5^2 (2x)^3 (-3)^2 = 720x^3$,

则展开式中 x^3 的系数为: 720.

故答案为: 720.

题型 06 二项式系数最大项问题

【典例 1】（2023·四川绵阳·统考二模） $(3+2x)^n$ 展开式中，只有第 4 项的二项式系数最大，则 n 的值为（ ）

- A. 8 B. 7 C. 6 D. 5

【答案】C

【详解】因为只有一项二项式系数最大，所以 n 为偶数，故 $\frac{n}{2}+1=4$ ，得 $n=6$ 。

故选：C

【典例 2】（2023 下·广西防城港·高二防城港市高级中学校考期中）已知二项式 $(2x-1)^n$ 的展开式中仅有第 4 项的二项式系数最大，则 $n=$ _____。

【答案】6

【详解】因为二项式 $(2x-1)^n$ 的展开式中仅有第 4 项的二项式系数最大，
根据二项展开式的性质，可得中间项的二项式系数最大，所以展开式一共有 7 项，
所以 n 为偶数且 $\frac{n}{2}=3$ ，可得 $n=6$ 。

故答案为：6。

【典例 3】（2023 上·高二课时练习）（1）已知 $(1+x)^n$ 的展开式中第 5 项和第 9 项的二项式系数相等，求 n ；
（2） $(x+2y)^7$ 的二项式系数的最大值是多少？

【答案】（1）12；（2）35

【详解】（1）二项式 $(1+x)^n$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_n^r x^r$ （ $0 \leq r \leq n$ 且 $r \in \mathbb{N}$ ），
所以第 5 项的二项式系数为 C_n^4 ，第 9 项的二项式系数为 C_n^8 ，
依题意可得 $C_n^4 = C_n^8$ ，所以 $n = 4 + 8 = 12$ ；

（2）二项式 $(x+2y)^7$ 展开式的一共 8 项，则第 4 项和第 5 项二项式系数相等同时取得最大值，
又 $(x+2y)^7$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_7^r x^{7-r} (2y)^r$ （ $0 \leq r \leq 7$ 且 $r \in \mathbb{N}$ ）
所以第 4 项的二项式系数为 $C_7^3 = 35$ ，第 5 项二项式系数为 $C_7^4 = 35$ ，
即 $(x+2y)^7$ 的二项式系数的最大值是 35。

【变式 1】（2023 下·陕西宝鸡·高二统考期末）若 $(x-\frac{1}{x})^n$ 的展开式中第 3 项与第 9 项的系数相等，则展开式中二项式系数最大的项为（ ）

- A. 第 4 项 B. 第 5 项 C. 第 6 项 D. 第 7 项

【答案】C

【详解】由二项式定理可得第 3 项与第 9 项的系数分别为 C_n^2 和 C_n^8 ，

即 $C_n^2 = C_n^8$ ，由二项式系数性质可得 $n = 10$ ；

因此展开式中二项式系数最大的项为 $C_{10}^5 x^5 \left(-\frac{1}{x}\right)^5$ ，是第 6 项.

故选：C

【变式 2】（2023 下·辽宁沈阳·高二沈阳市第十五中学校考阶段练习） $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中只有第六项的二项式系数最大，则第四项为_____.

【答案】 $120x^{\frac{1}{2}}/120\sqrt{x}$

【详解】因为展开式中只有第六项的二项式系数最大，即 $\frac{n}{2} + 1 = 6$ ，所以 $n = 10$ ，

所以 $T_4 = C_{10}^3 (\sqrt{x})^7 \left(\frac{1}{x}\right)^3 = 120x^{\frac{1}{2}}$.

故答案为： $120x^{\frac{1}{2}}$

【变式 3】（2023 上·高二课时练习）若 $(1+x)^n$ 的展开式中， x^3 的系数是 x 的系数的 7 倍，求 n 的值及二项式系数的最大值.

【答案】 $n = 8$ ，最大值为 70.

【详解】因为 $(1+x)^n$ 展开式的第 $r+1$ 项的通项公式为 $C_n^r \cdot 1^{n-r} x^r = C_n^r x^r$ ，

所以 x^3 的系数为 C_n^3 ， x 的系数为 C_n^1 ，

因为 x^3 的系数等于 x 的系数的 7 倍，

所以 $C_n^3 = 7C_n^1$ ，解得 $n = 8$.

所以二项式系数的最大值为 $C_8^4 = 70$.

题型 07 系数最大（小）项问题

【典例 1】（2023 上·全国·高三阶段练习）已知 $\left(x^3 + \frac{a}{x}\right)^6$ ($a > 0$) 的展开式中唯有第 5 项的系数最大，则 a 的取值范围是（ ）

- A. $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{2}\right)$ B. $\left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ C. $\left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right]$ D. $\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$

【答案】A

【详解】 $\left(x^3 + \frac{a}{x}\right)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_6^r (x^3)^{6-r} \cdot \left(\frac{a}{x}\right)^r = C_6^r \cdot a^r \cdot x^{18-4r}$ ，

由题可知 $\begin{cases} C_6^4 \cdot a^4 > C_6^3 \cdot a^3 \\ C_6^4 \cdot a^4 > C_6^5 \cdot a^5 \end{cases}$ ，解得 $\frac{4}{3} < a < \frac{5}{2}$.

故选：A

【典例 2】（2023·上海嘉定·统考一模）已知 $(1+2x)^6$ 的二项展开式中系数最大的项为_____.

【答案】 $240x^4$

【详解】设系数最大的项为 $T_{k+1} = C_6^k (2x)^k$,

$$\text{则} \begin{cases} C_6^k \cdot 2^k \geq C_6^{k+1} \cdot 2^{k+1} \\ C_6^k \cdot 2^k \geq C_6^{k-1} \cdot 2^{k-1} \end{cases}, \text{解得} \frac{11}{3} \leq k \leq \frac{14}{3},$$

因为 $0 \leq k \leq 6$ 且 k 为整数,

所以 $k=4$, 此时最大的项为 $T_5 = C_6^4 (2x)^4 = 240x^4$.

故答案为: $240x^4$

【典例 3】（2023·上海浦东新·华师大二附中校考模拟预测） $(x+2)^8$ 的二项展开式中系数最大的项为_____.

【答案】 $1792x^2, 1792x^3$

【详解】设 $(x+2)^8$ 展开式的第 $r+1$ 项的系数最大,

$$\text{则} \begin{cases} C_8^r \cdot 2^r \geq C_8^{r+1} \cdot 2^{r+1} \\ C_8^r \cdot 2^r \geq C_8^{r-1} \cdot 2^{r-1} \end{cases}, \text{解得} 5 \leq r \leq 6,$$

所以系数最大的项为第 6 或第 7 项,

所以系数最大的项为:

$$T_6 = C_8^5 \cdot 2^5 \cdot x^3 = 1792x^3,$$

$$T_7 = C_8^6 \cdot 2^6 \cdot x^2 = 1792x^2.$$

故答案为: $1792x^2, 1792x^3$

【典例 4】（2023 上·福建龙岩·高二福建省龙岩第一中学校考阶段练习）（1）若

$$(2x+\sqrt{3})^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4, \text{求 } a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \text{ 的值};$$

（2）在 $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x^2}\right)^8$ 的展开式中,

①求二项式系数最大的项;

②系数的绝对值最大的项是第几项;

【答案】（1） $88+56\sqrt{3}$; （2） ① $1120x^{-6}$ ② 第 6 项和第 7 项

【详解】解：（1） $\because (2x+\sqrt{3})^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$,

$$\text{令 } x=1, \text{ 可得 } (2+\sqrt{3})^4 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4,$$

$$\text{令 } x=0, \text{ 可得 } (0+\sqrt{3})^4 = a_0,$$

$$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_0 = (2+\sqrt{3})^4 - (0+\sqrt{3})^4 = 88+56\sqrt{3}.$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/937034135113006112>