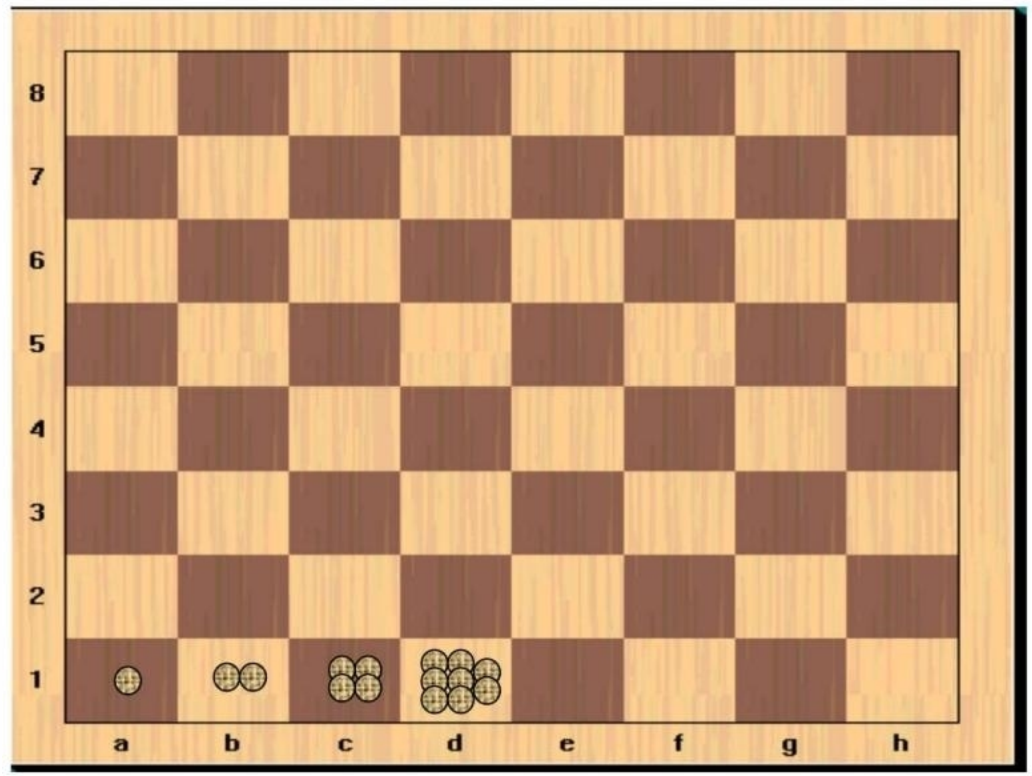
4.3.2 等比数列的前n项和公式

创设情境

国际象棋起源于古代印度.相传国王要奖赏国际象棋的发明者，问他想要什么.发明者说：“请在棋盘的第1个格子里放上1颗麦粒，第2个格子里放上2颗麦粒，第3个格子里放上4颗麦粒，依次类推，每个格子里放的麦粒都是前一个格子里放的麦粒数的2倍，直到第64个格子.请给我足够的麦粒以实现上述要求.”国王觉得这个要求不高，就欣然同意了.


第一格放1粒麦子
，以后每个格子
里放的麦 数都
是前一个格子里
放的的2倍，直到
第64个格子
人
搞 定．
西 萨
国王


8
7
6
5
4
3
2
1
a b c d e f g h

探究新知

问题1：每一格的麦粒数$\{a_n\}$构成什么数列？

$\{a_n\}$为以1为首项，2为公比的等比数列

问题2：国王答应奖赏给发明者西萨的总麦粒数用式子怎么表示？

$$S_{64}=a_1+a_2+a_3\ldots+a_{64}$$

$$=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{63}$$

问题3：总麦粒数S_{64}怎么求？

探究新知

探究S_{64}的求法:

$S_1=1=1=2-1$

$S_2=1+2=3=2^2-1$

$S_3=1+2+2^2=7=2^3-1$

$S_4=1+2+2^2+2^3=15=2^4-1$

大家猜想S_{64}

T 以应 方至

少?

○

o

$S_4=1+2+2^2+2^3\ldots+2^{63}$ =24 −

1

探究新知

问题4: S_4 进行怎样的变形能出现264?

等式两边乘上的2是此数列的什么?

$$S_4=1+2+2^2+2^3+\ldots+263$$

$$2S_4=2+2^2+2^3+\cdots+2^3+2^{64}$$

问题5: 根据两式我们如何求出S_{64}的值呢?

可将两式相减，消去这些相同项，得

$$S_{64}=2^{64}-1$$

$$S_{64}=2^{64}-1$$

探究新知

问题解决： 假定千粒麦粒的质量为40克，据查，2016—2017年度世界年度小麦产量约为7.5亿吨，根据以上数据，判断国王是否能实现他的诺言。

$S_{64}=2^4-1=18,446,744,073,709,551,615$

》

7300多亿吨

Ω

国王的诺言不能实现！

人们估计，全世界一千年也难以生产这么多麦子！

探究新知

探究：类比上面求和的方法能否得到等比数列前n项和公式呢?

$$S_n = a_1 + \boxed{a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1}} \quad (1)$$

$$qS_n = a_1 q + \boxed{a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1}} + a_1 q^n \quad (2)$$

(1)−(2), 得S-qS,=a₁-a₁q"

1-q是否为零?

∴(1-q)S=a₁(1-q")

讨论公比q是否为1

当q=1 时 ， S=na₁

$$\text{当} q \neq 1 \text{时}, S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}$$

错位相减法

探究新知

等比数列前n项和公式：

$$S_n=\begin{cases} na_1, & q=1 \\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_n\cdot q}{1-q}, & q\neq 1 \end{cases}$$

前n项和　首项　公比　项数　末项

E5ma9m则s . = 4 -

已知a,q,9,则S,=“1-q

注意

(1) 等比数列求和时，应考虑q=1与q≠1两种情况.

(2) 推导等比数列前n项和公式的方法： 错位相减法.

(3) 步骤： 乘公比，错位写，对位减.

典例分析

例1已知数列$\{a_n\}$是等比数列.

(1) 若$a_1=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$, 求S_8; (2) 若$a_1=27$, $a_9=\frac{1}{243}$, $q<0$, 求S_8;

3) 若q=8, $q=\frac{1}{2}$, $S_n=\frac{31}{2}$ 求n.

解：(1) 因为$a_1=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$, 所以$S_8=\dfrac{\frac{1}{2}\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{255}{256}$

(2) 由$a_9=\frac{1}{243}$, 可得$27\times q^8=\frac{1}{243}$，即$q^8=(\frac{1}{3})^8$.

又由$a_1=27$, $q<0$, 得 $q=-\frac{1}{3}$. 所以 $S_8=\dfrac{27\times\left[1-(-\frac{1}{3})^8\right]}{1-(-\frac{1}{3})}=\frac{1640}{81}$