

2025 年统编版 2024 高三数学上册阶段测试试卷 242

考试试卷

考试范围：全部知识点；考试时间：120 分钟

学校：_____ 姓名：_____ 班级：_____ 考号：_____

总分栏

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

评卷人	得分

一、选择题(共 5 题, 共 10 分)

1、各棱长都等于 a 的四面体 $ABCD$ 中, 设 G 为 BC 的中点, E 为 $\triangle ACD$ 内的动点 (含边界), 且 $GE \parallel$ 平面 ABD , 若线段 GE 长度的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 a 的值为 ()

- A. 1
- B. $\sqrt{3}$
- C. 2
- D. $2\sqrt{3}$

2、将函数 $f(x) = 2\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位, 再向下平移 1 个单位, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 则 $g(x)$ 的解析式为 ()

- A. $g(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{4}) - 1$
- B. $g(x) = 2\cos 2x - 1$
- C. $g(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{4}) - 1$
- D. $g(x) = 2\cos 2x + 1$

3、在 $(1 + \frac{1}{x})^n (n \in \mathbb{N}^*)$ 的展开式中, 所有项的系数之和为 64, 则其展开式中含 $\frac{1}{x^2}$ 项的是第 () 项.

- A. 2
- B. 3
- C. 4
- D. 5

4、连续投掷两次骰子得到的点数分别为 m, n , 向量 $a = (m, n)$ 与向量 $b = (1, 0)$ 的夹角记为 α , 则 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$ 的概率为 ()

- A. $\frac{5}{18}$
 B. $\frac{5}{12}$
 C. $\frac{1}{2}$
 D. $\frac{7}{12}$

5、已知平面向量 $a = (2, -1)$ $b = (1, 1)$ $c = (-5, 1)$ 若 $(a + kb) \parallel c$ 则实数 k 的值为 ()

- A. 2
 B. $\frac{1}{2}$
 C. $\frac{11}{4}$
 D. $-\frac{11}{4}$

评卷人	得分

二、填空题(共 7 题, 共 14 分)

6、袋中有 4 个白球, 5 个黑球, 现从中任取两个, 至少一个是黑球的概率为_____.

7、已知实数 x, y 满足。
$$\begin{cases} x+y > 2 \\ x-y \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$$
 则 $z=2x-y$ 的最大值是_____.

8、已知集合 $A = \{(x, y) \mid |x| + |y| < 2\}$, $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < r^2\}$, 若“点 $(x, y) \in A$ ”是“点 $(x, y) \in B$ ”的必要不充分条件, 则 r 的最大值是_____.

9、已知集合 $M = \{1, \frac{a}{b}, b\}$, $N = \{0, a+b, b^2\}$, 若 $M=N$, 则 $a^{2013} + b^{2014} =$ _____.

10、已知函数 $y = \frac{mx^2 + 4 \cdot \sqrt{3}x + n}{x^2 + 1}$ 的最大值为 7, 最小值为 -1, 则 $m+n$ 的值为_____.

11、已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $4\sqrt{3}$, 三个内角 A, B, C 等差, 则 $\sin A \cdot \sin C =$ _____.

12、(1) 18 世纪的时候，欧拉通过研究，发现凸多面体的面数 F 、顶点数 V 和棱数 E 满足一个等式关系。请你研究你熟悉的一些几何体（如三棱锥、三棱柱、正方体），归纳出 F 、 V 、 E 之间的关系等式：_____；

(2) 运用你得出的关系式研究如下问题：一个凸多面体的各个面都是三角形，则它的面数 F 可以表示为顶点数 V 的函数，此函数关系式为_____。

多面体	面数 (F)	顶点数 (V)	棱数 (E)
三棱锥	4	4	6
三棱柱	5	6	
正方体			

评卷人	得分

三、判断题(共 7 题，共 14 分)

13、判断集合 A 是否为集合 B 的子集；若是打“√”，若不是打“×”。

(1) $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. _____；

(2) $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{1, 3, 6, 9\}$. _____；

(3) $A=\{0\}$, $B=\{x|x^2+1=0\}$. _____；

(4) $A=\{a, b, c, d\}$, $B=\{d, b, c, a\}$. _____。

14、函数 $y=\sin x$, $x \in [0, 2\pi]$ 是奇函数. _____ (判断对错)

15、函数 $y=\sin x$, $x \in [0, 2\pi]$ 是奇函数. _____ (判断对错)

16、已知 $A=\{x|x=3k-2, k \in \mathbb{Z}\}$, 则 $5 \in A$. _____。

17、空集没有子集. _____。

18、任一集合必有两个或两个以上子集. _____。

19、若 $b=0$, 则函数 $f(x) = (2k+1)x+b$ 在 \mathbb{R} 上必为奇函数_____。

评卷人	得分

四、证明题(共 4 题，共 36 分)

20、已知二次函数 $f(x) = ax^2+bx+c$ ($a>0$)

(1) 若 $c>0$, $f(x)$ 图象与 x 轴有两个不同的公共点，且 $f(c) = 0$, 并且但 $0 < x < c$ 时, $f(x) > 0$ 试比较 $\frac{1}{a}$ 与 c 的大小；并说明理由。

(2) 若 $x \in [-2, -1]$ 且函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得最大值 0, 求 $\frac{b^2-2ac}{ab-a^2}$ 的最小值。

21、 $a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n + 1$, 且 $a_1=1$, 则 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

22、设 $x, y \geq 0$, 且 $x^2 + y^3 \geq x^3 + y^4$, 求证: $x^3 + y^3 \leq 2$.

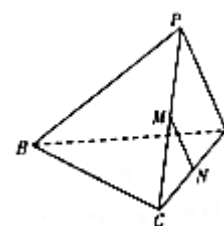
23、求证: $2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4$ 能被 25 整除.

评卷人	得分

五、计算题(共 3 题, 共 12 分)

24、求离心率 $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 过点 $P(3, -\frac{1}{2})$ 的双曲线方程.

25、如图所示, 在 $\triangle ABC$ 所在平面外有一点 P , M, N 分别是 PC 和 AC 上的点, 过 MN 作平面平行于 BC , 画出这个平面与其他各面的交线, 并说明画法.



26、设 $a = \{6, -1\}$, $b = \{-2, k\}$ 且 $a \parallel b$, 则实数 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

评卷人	得分

六、综合题(共 4 题, 共 20 分)

27、已知实数 x, y 满足方程 $x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$; 求:

- (1) $\frac{y}{x}$ 的最大值和最小值;
- (2) $y-x$ 的最小值;
- (3) $x^2 + y^2$ 的最大值和最小值;
- (4) $2x^2 + y^2 - 4x - 6$ 的最大值.

28、 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AC = 2\sqrt{3}$, $\cos \angle ACB = \frac{\sqrt{3}}{6}$, AB 边上的中线 $CD = \sqrt{5}$, 则 $\sin A = \underline{\hspace{2cm}}$.

29、设 $f(x)$ 是定义在整数集上的整值函数; 满足下列 4 条性质:

- (1) 对任意 $x \in \mathbb{Z}$; $0 \leq f(x) \leq 1996$;
- (2) 对任意 $x \in \mathbb{Z}$; $f(x+1997) = f(x)$;
- (3) 对任意 $x, y \in \mathbb{Z}$, $f(xy) = f(x)f(y) \pmod{1997}$;
- (4) $f(2) = 999$.

已知这样的函数存在且唯一, 据此求满足 $f(x) = 1000$ 的最小正整数 x .

30、已知函数 $f(x) = ax - \ln x$.

- (I) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $x - y + 1 = 0$ 平行, 求 a 的值;
- (II) 求 $f(x)$ 的单调区间.

参考答案

一、选择题(共 5 题, 共 10 分)

1、C

【分析】

【分析】取 AC 中点 M, CD 中点 N, 连接 GM, GN, MN, 根据线面平行的判定定理可得: $GM \parallel$ 平面 ABD, $GN \parallel$ 平面 ABD, 再结合面面平行的判定定理得到: 平面 GMN \parallel 平面 ABD, 进而得到点 E 的轨迹为线段 MN. 从而 GE 为等边三角形 GMN 的一条高, 即得 a 的值.

【解析】

【解答】解: 取 AC 中点 M; CD 中点 N, 连接 GM, GN, MN;

则 GM; GN、MN 分别是三角形 ABC、BCD、ACD 的中位线;

所以平面 GMN \parallel 平面 BAD;

又四面体 ABCD 中各棱长都等于 a;

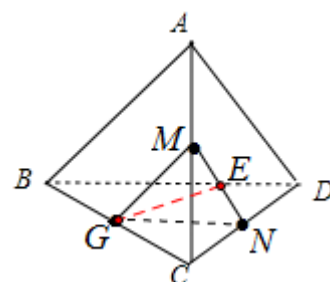
所以 $\triangle GMN$ 为边长为 $\frac{a}{2}$ 的正三角形.

取 MN 中点 E, 连结 GE, 则 $GE = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2}$.

又 $GE = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a$;

所以 $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a$; 即 $a=2$.

故选: C.



2、B

【分析】

【分析】向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位, 得到的图象对应函数为 $y=2\sin 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, 再向下平移 1 个单位, 得到的图象对应函数 $g(x)=2\sin 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1$, 由此得出结论.

【解析】

【解答】解: 将函数 $f(x)=2\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位, 得到的图象对应函数为 $y=2\sin 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

再向下平移 1 个单位，得到的图象对应函数 $g(x) = 2\sin 2(x + \frac{\pi}{4}) - 1 = 2\cos 2x - 1$.

故选 B.

3、A

【分析】

【分析】根据题意有 $2^n = 64$ ，解可得， $n = 6$ ；进而可得其二项展开式的通项，计算可得答案.

【解析】

【解答】解：根据题意， $(x+2)^n$ 展开式的二项式系数之和等于 64，有 $2^n = 64$ ；解可得， $n = 6$ ；
可得其二项展开式的通项为 $T_{r+1} = C_6^r x^{-3+\frac{r}{2}}$ ，令 $-3+\frac{r}{2} = -2$ ， $\therefore r = 2$ ，故选 A.

4、B

【分析】

$$\cos \alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

$$\because \alpha \in (0, \frac{\pi}{4}),$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} < 1, \therefore n$$

又满足 n

$$\text{故所求概率为 } P = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

【解析】

【答案】

B

5、B

【分析】

【解析】

试题分析: 由题意可知, $\vec{a} + k\vec{b} = (2+k, -1+k)$ 因为 $(\vec{a} + k\vec{b}) \perp \vec{c}$ 所以 $(2+k) \times 1 - (-5) \times (-1+k) = 0$ 解得 $k = \frac{1}{2}$

考点: 本题考查向量平行的充要条件, 向量的坐标运算

【解析】

【答案】

B

二、填空题(共 7 题, 共 14 分)

6、略

【分析】

【分析】由题意知本题是一个古典概型; 试验发生包含的所有事件是从 9 个球中任取 2 个, 可以用组合数表示;

而满足条件的事件是至少有一个黑球, 包含两种情况, 一是一白一黑; 二是两黑, 根据古典概型的概率公式得到结果.

【解析】

【解答】解: \because 试验发生包含的所有事件是从 9 个球中任取 2 个, 共有 C_9^2 种结果; 而满足条件的事件是至少有一个黑球, 包含两种情况, 一是一白一黑, 二是两黑, 共有 $C_5^1 C_4^1 + C_5^2$

\therefore 根据古典概型的概率公式得到.

$$P = \frac{C_5^1 C_4^1 + C_5^2}{C_9^2} = \frac{5}{6}$$

故答案为: $\frac{5}{6}$.

7、略

【分析】

【分析】作出等式组对应的平面区域，利用目标函数的几何意义，求目标函数 $z=2x-y$ 的最大值

【解析】

【解答】解：由 $z=2x-y$ ，得 $y=2x-z$ ，作出等式对应的可行域（阴影部分），

平移直线 $y=2x-z$ ；由平移可知当直线 $y=2x-z$ ；

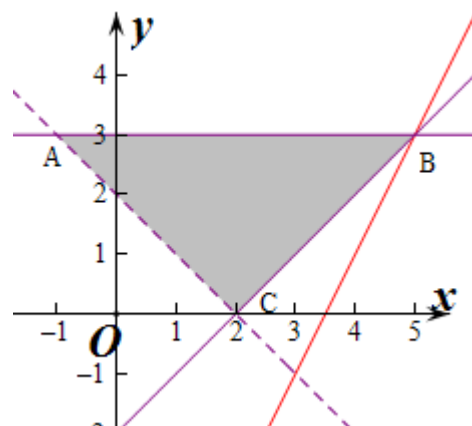
经过点 B 时；直线 $y=2x-z$ 的截距最小，此时 z 取得最大值；

由 $\begin{cases} y=3 \\ x-y=2 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$ ；即 B (5, 3)。

将 B 的坐标代入 $z=2x-y$ ；得 $z=10-3=7$ ；

即目标函数 $z=2x-y$ 的最大值为 7。

故答案为：7



8、略

【分析】

【分析】根据集合表示意义，画出图形，据图判断当圆与直线相切时半径最大，运用点到直线的距离公式求解即可。

【解析】

【解答】解：∵集合 $A=\{(x, y) \mid |x|+|y|<2\}$ ， $B=\{(x, y) \mid x^2+y^2<r^2\}$ ；

若“点 $(x, y) \in A$ ”是“点 $(x, y) \in B$ ”的必要不充分条件；

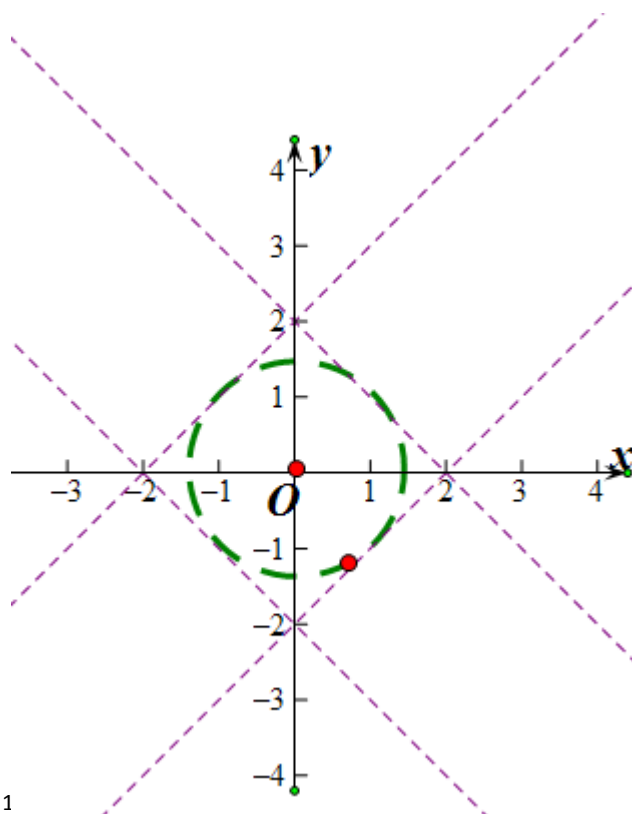
∴A 集合表示的为正方形；B 集合表示的圆， $B \subseteq A$

；

当圆与直线相切时半径最大；

∴ $r_{\text{最大}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ；

故答案为： $\sqrt{2}$ 。



9、略

【分析】

【分析】利用集合相等的定义可得： $a=0$ ， $b=-1$ ，即可得出。

【解析】

【解答】解：由题意知 $b \neq 0$ ；

$\because M=N$ 可得 $\frac{a}{b}=0$ ；即 $a=0$ ；

此时集合 $M=\{1, 0, b\}$ ，集合 $N=\{0, b, b^2\}$ ；

\therefore 此时必有 $b^2=1$ ，解得 $b=1$ 或 $b=-1$ 。

当 $b=1$ 时；集合 $P=\{1, 0, 1\}$ 不成立，舍去；

当 $b=-1$ 时；集合 $P=\{1, 0, -1\}$ ，集合 $B=\{0, -1, 1\}$ ，成立；

$\therefore a=0$ ， $b=-1$ ；

$\therefore a^{2013}+b^{2014}=1$ 。

故答案为：1。

10、略

【分析】

【分析】利用判别式法将函数进行转化，即可得到结论。

【解析】

【解答】解：函数的定义域是 R ；

则函数等价于 $y(x^2+1)=mx^2+4$ 。 $\sqrt{3x+n}$ ；

即 $(y-m)x^2-4$ 。 $\sqrt{3x+y-n}=0$ 。

当 $y=m$ 时；方程有解；

当 $y \neq m$ 时；方程必有实数根；

则判别式 $\Delta=48-4(y-m)(y-n) \geq 0$ ；

即 $y^2-(m+n)y+mn-12 \leq 0$ ；

\therefore 函数 y 的最大值为 7；最小值为 -1；

$\therefore -1 \leq y \leq 7$ ；

即 -1 和 7 是方程 $y^2-(m+n)y+mn-12=0$ 的两个根；

则 $-1+7=m+n=6$ ；

故答案为：6

11、略

【分析】

【分析】由于三个内角 A、B、C 成等差数列，可得 $2B=A+C$ ，又 $A+B+C=\pi$ ，联立解得 B。由于 $\triangle ABC$ 的面积为 $4\sqrt{3}$ ，可得 $4\sqrt{3}=\frac{1}{2}ac\sin B$ ；解得 ac。再利用数量积的定义即可得出。

∴ $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ 。

【解析】

【解答】解：∵三个内角 A、B、C 成等差数列；∴ $2B=A+C$ ；

又 $A+B+C=\pi$ ，联立解得 $B=\frac{\pi}{3}$ 。

∵ $\triangle ABC$ 的面积为 $4\sqrt{3}$ ，∴ $4\sqrt{3}=\frac{1}{2}ac\sin\frac{\pi}{3}$ ；解得 $ac=16$ 。

∴ $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = |\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}| \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}ac=8$ 。

故答案为：8。

12、 $V+F-E=2F=2V-4$

【分析】

【分析】（1）通过列举正方体、三棱柱、三棱锥的面数 F、顶点数 V 和棱数 E；得到规律 $V+F-E=2$ ，进而发现此公式对任意凸多面体都成立，由此得到本题的答案。

（2）根据各个面都是三角形的多面体的构造特点及欧拉公式 $V+F-E=2$ 可得函数关系式。

【解析】

【解答】解：（1）凸多面体的面数为 F、顶点数为 V 和棱数为 E，举例如下

①正方体：F=6，V=8，E=12，得 $V+F-E=8+6-12=2$ ；

②三棱柱：F=5，V=6，E=9，得 $V+F-E=5+6-9=2$ ；

③三棱锥：F=4，V=4，E=6，得 $V+F-E=4+4-6=2$ 。

根据以上几个例子，猜想：凸多面体的面数 F、顶点数 V 和棱数 E 满足如下关系： $V+F-E=2$ 再通过举四棱锥、六棱柱、等等，发现上述公式都成立。

因此归纳出一般结论： $V+F-E=2$

（2）一个多面体的各个面都是三角形，这个多面体的棱数 $E=\frac{3}{2}F$ ，

∴ $V+F-E=2$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/937113010165010032>