

几何-直线型几何-蝴蝶模型-1 星题

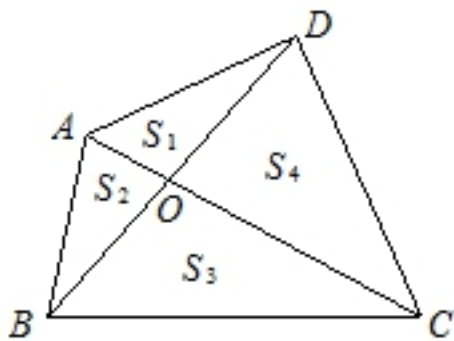
课程目标

知识点	考试要求	具体要求	考察频率
蝴蝶模型	C	1.了解蝴蝶模型及其公式 2.能够熟练运用任意四边形蝴蝶模型和梯形蝴蝶模型的来解决复杂的几何知识	少考

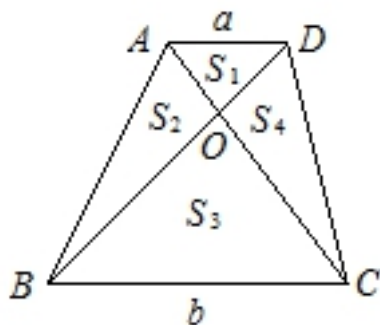
知识提要

蝴蝶模型

- 任意四边形蝴蝶模型
 - (1) $S_1:S_2 = S_4:S_3$
 - (2) $OA:OC = (S_1 + S_2):(S_4 + S_3)$



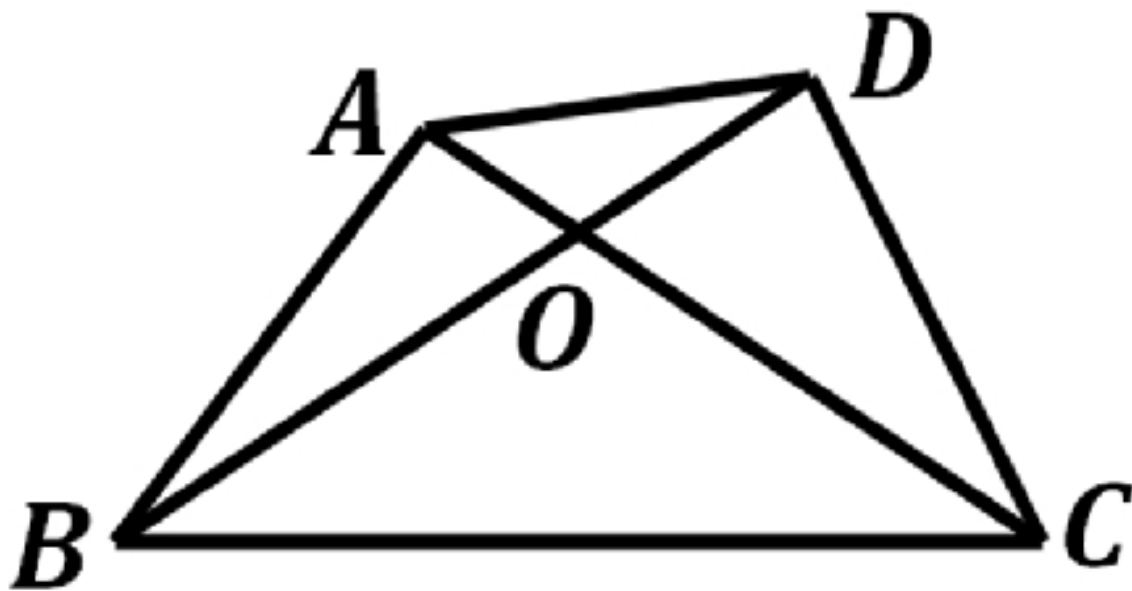
- 梯形蝴蝶模型
 - (1) $S_2 = S_4$
 - (2) $S_1:S_2 = S_4:S_3$
 - (3) $S_1:S_3:S_2:S_4:S_{\text{梯形}} = a^2:b^2:ab:ab:(a+b)^2$



精选例题

蝴蝶模型

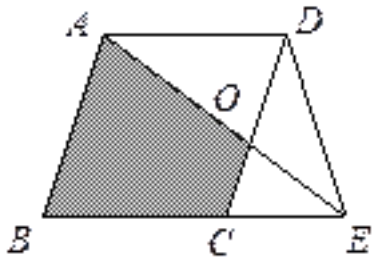
1. 如图，四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O 。如果 $\triangle ABD$ 的面积等于 $\triangle BCD$ 的面积 的 $\frac{1}{3}$ ，且 $AO = 2$ ， $DO = 3$ ，那么 CO 的长度是 DO 的长度的_____倍。



【答案】 2

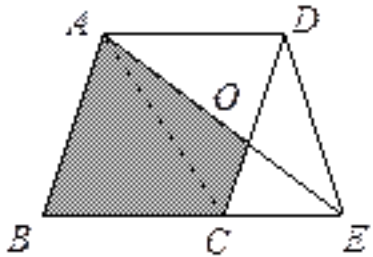
【分析】 根据蝴蝶模型： $\frac{\triangle ABD}{\triangle BCD} = \frac{1}{3} = \frac{AO}{OC}$ ， $OC = 2 \times 3 = 6$ ， CO 的长度是 DO 长度的 $6 \div 3 = 2$ 倍。

2. 已知 $ABCD$ 是平行四边形, $BC:CE = 3:2$, 三角形 ODE 的面积为 6 平方厘米. 则阴影部分的面积是_____平方厘米.



【答案】 21

【分析】 连接 AC .



由于 $ABCD$ 是平行四边形, $BC:CE = 3:2$, 所以 $CE:AD = 2:3$, 根据梯形蝴蝶定理,

$$\begin{aligned} S_{\triangle COE}:S_{\triangle AOC}:S_{\triangle DOE}:S_{\triangle AOD} \\ &= 2^2:2 \times 3:2 \times 3^2 \\ &= 4:6:6:9, \end{aligned}$$

所以

$$S_{\triangle AOC} = 6(\text{平方厘米}), S_{\triangle AOD} = 9(\text{平方厘米}),$$

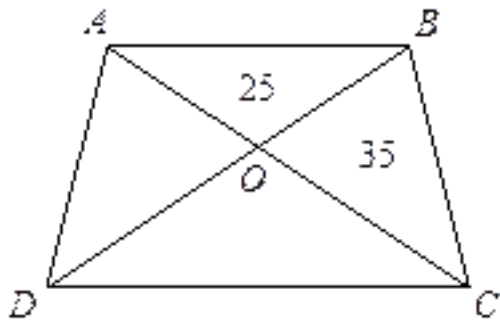
又

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} = 6 + 9 = 15(\text{平方厘米}),$$

阴影部分面积为

$$6 + 15 = 21(\text{平方厘米}).$$

3. 如下图, 梯形 $ABCD$ 的 AB 平行于 CD , 对角线 AC , BD 交于 O , 已知 $\triangle AOB$ 与 $\triangle BOC$ 的面积分别为 25 平方厘米与 35 平方厘米, 那么梯形 $ABCD$ 的面积是_____平方厘米.



【答案】 144

【分析】 根据梯形蝴蝶定理，

$$S_{\triangle AOB}:S_{\triangle BOC} = a^2:b^2 = 25:35,$$

可得

$$a:b = 5:7,$$

再根据梯形蝴蝶定理，

$$S_{\triangle AOB}:S_{\triangle DOC} = a^2:b^2 = 5^2:7^2 = 25:49,$$

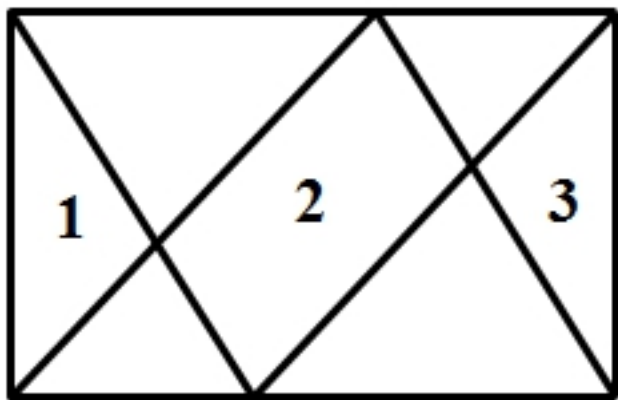
所以

$$S_{\triangle DOC} = 49(\text{平方厘米}).$$

那么梯形 $ABCD$ 的面积为

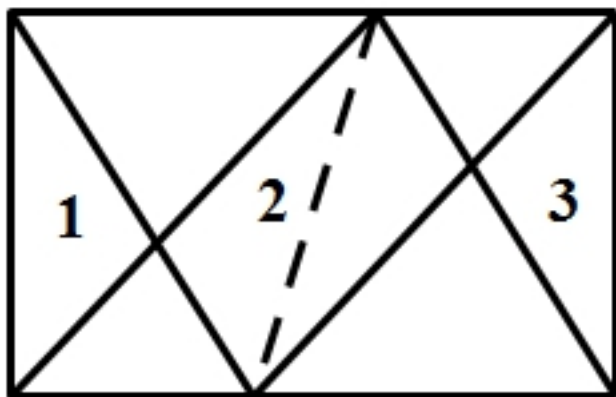
$$25 + 35 + 35 + 49 = 144(\text{平方厘米}).$$

4. 如图，长方形中，若三角形 1 的面积与三角形 3 的面积比为 4:5，四边形 2 的面积为 36，则三角形 1 的面积为_____.



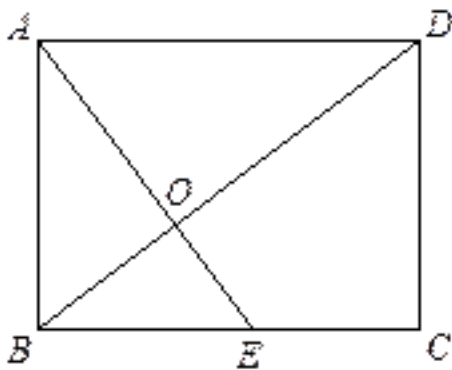
【答案】 16

【分析】 做辅助线如下：



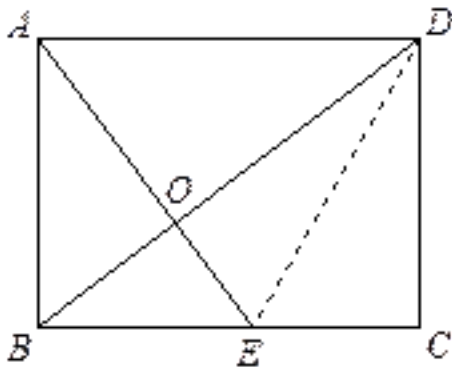
利用蝴蝶模型，这样发现四边形 2 分成左右两边，其面积正好等于三角形 1 和三角形 3，所以三角形 1 的面积就是 $36 \times \frac{4}{4+5} = 16$ ，三角形 3 的面积就是 $36 \times \frac{5}{4+5} = 20$ 。

5. 如图，长方形 $ABCD$ 中， AOB 是直角三角形且面积为 54， OD 的长是 16， OB 的长是 9。那么四边形 $OECD$ 的面积是_____。



【答案】 $119\frac{5}{8}$

【分析】 解法一：连接 DE ，



依题意

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times BO \times AO = \frac{1}{2} \times 9 \times AO = 54,$$

所以

$$AO = 12,$$

则

$$S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} \times DO \times AO = \frac{1}{2} \times 16 \times 12 = 96.$$

又因为

$$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle DOE} = 54 = \frac{1}{2} \times 16 \times OE,$$

所以

$$OE = 6\frac{3}{4},$$

得

$$S_{\triangle BOE} = \frac{1}{2} \times BO \times EO = \frac{1}{2} \times 9 \times 6\frac{3}{4} = 30\frac{3}{8},$$

所以

$$\begin{aligned} S_{OECD} &= S_{\triangle BDC} - S_{\triangle BOE} \\ &= S_{\triangle ABD} - S_{\triangle BOE} \\ &= (54 + 96) - 30\frac{3}{8} \\ &= 119\frac{5}{8}. \end{aligned}$$

解法二：由于

$$S_{\triangle AOD} : S_{\triangle AOB} = OD : OB = 16 : 9,$$

所以

$$S_{\triangle AOD} = 54 \times \frac{16}{9} = 96,$$

而

$$S_{\triangle DOE} = S_{\triangle AOB} = 54,$$

根据蝴蝶定理，

$$S_{\triangle BOE} \times S_{\triangle AOD} = S_{\triangle AOB} \times S_{\triangle DOE},$$

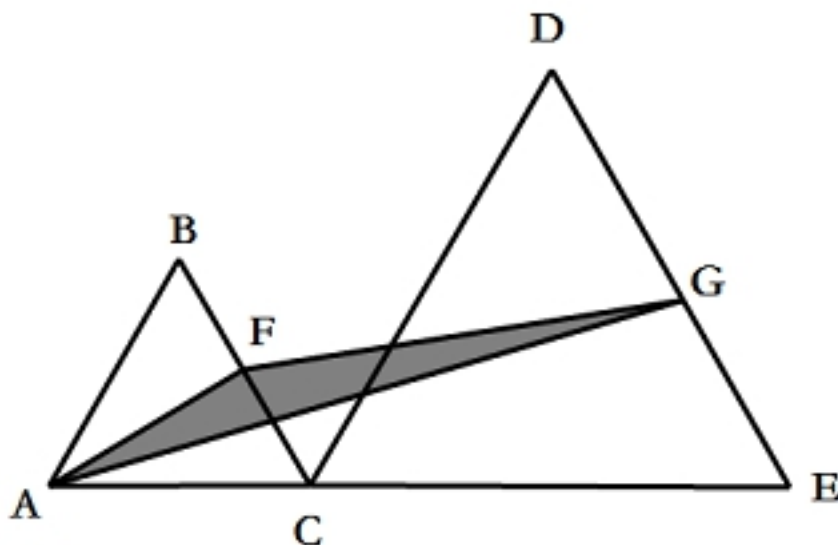
所以

$$S_{\triangle BOE} = 54 \times 54 \div 96 = 30\frac{3}{8},$$

所以

$$\begin{aligned} S_{OECD} &= S_{\triangle BDC} - S_{\triangle BOE} \\ &= S_{\triangle ABD} - S_{\triangle BOE} \\ &= (54 + 96) - 30\frac{3}{8} \\ &= 119\frac{5}{8}. \end{aligned}$$

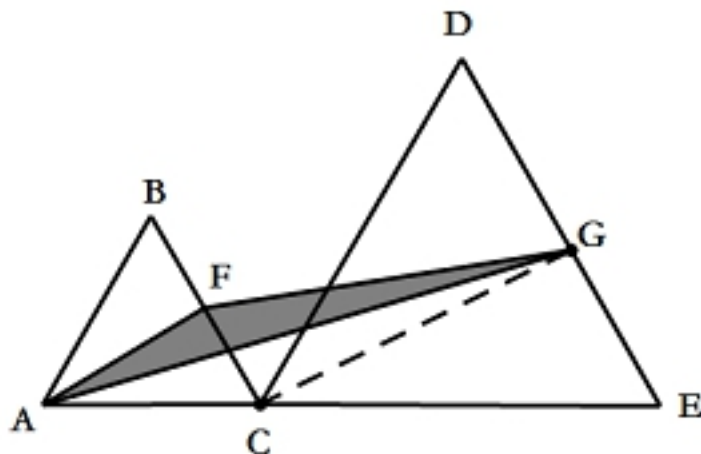
6. 如下图所示，点 C 在线段 AE 上，三角形 ABC 和三角形 CDE 都是正三角形，且 F 是线段 BC 的中点， G 是线段 DE 的中点．若三角形 ABC 的面积为 27，三角形 AFG （阴影部分）的面积是_____．



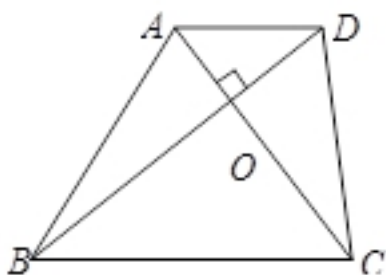
【答案】 13.5

【分析】 如下图所示，连接 CG ，那么 $AF \parallel CG$ ，根据梯形蝴蝶模型，得到

$$S_{\triangle AFG} = S_{\triangle AFC} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 27 = 13.5.$$

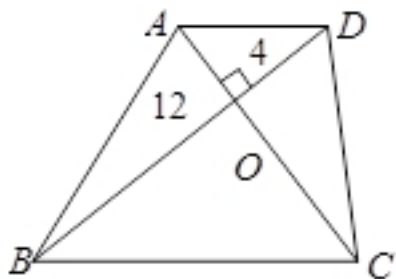


7. 如图，梯形 $ABCD$ 的对角线相互垂直．三角形 AOB 的面积是 12， OD 的长是 4，求 OC 的长．

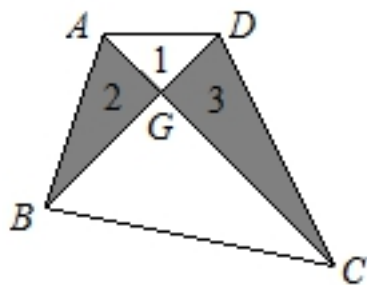


【答案】 6

【分析】 $S_{\triangle COD} = S_{\triangle AOB} = 12$, $\frac{1}{2} \times OC \times OD = 12$, $OC = 6$.



8. 如图, $S_2 = 2$, $S_3 = 4$, 求梯形的面积.



【答案】 9

【分析】 设 S_1 为 a^2 份, S_3 为 b^2 份.
根据梯形蝴蝶定理,

$$S_3 = 4 = b^2,$$

所以

$$b = 2;$$

又因为

$$S_2 = 2 = a \times b,$$

所以

$$a = 1;$$

那么

$$S_1 = a^2 = 1,$$

$$S_4 = a \times b = 2,$$

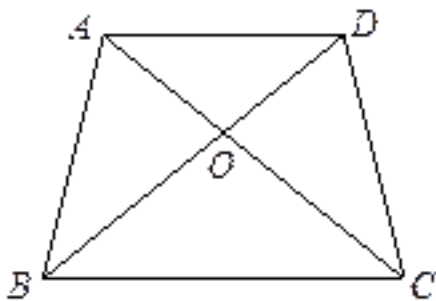
所以梯形面积

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 1 + 2 + 4 + 2 = 9,$$

或者根据梯形蝴蝶定理,

$$S = (a + b)^2 = (1 + 2)^2 = 9.$$

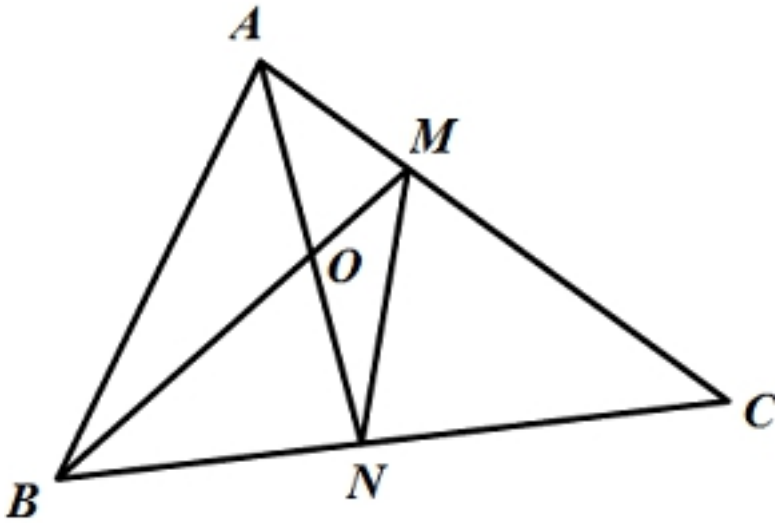
9. 梯形的下底是上底的 1.5 倍, 三角形 OBC 的面积是 9cm^2 , 问三角形 AOD 的面积是多少?



【答案】 4cm^2

【分析】 根据梯形蝴蝶定理, $a:b = 1:1.5 = 2:3$, $S_{\triangle AOD}:S_{\triangle BOC} = a^2:b^2 = 2^2:3^2 = 4:9$,
所以 $S_{\triangle AOD} = 4(\text{cm}^2)$.

10. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 M 、 N 分别在边 AC 、 BC 上, BM 与 AN 相交于 O , 若 $\triangle AOM$ 、 $\triangle ABO$ 和 $\triangle BON$ 的面积分别是 3、2、1, 则 $\triangle MNC$ 的面积是多少?



【答案】 22.5

【分析】 这道题给出的条件较少，需要运用共边模型和蝴蝶模型来求解。根据蝴蝶模型得

$$S_{\triangle MON} = \frac{S_{\triangle AOM} \times S_{\triangle BON}}{S_{\triangle AOB}} = \frac{3 \times 1}{2} = \frac{3}{2}$$

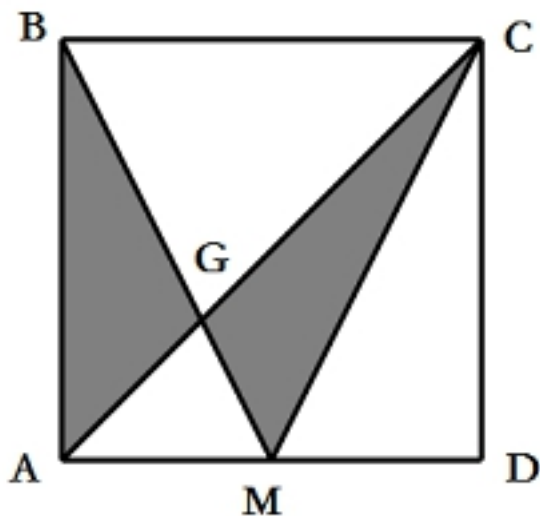
设 $S_{\triangle MNC} = x$ ，根据共边模型我们可以得

$$\frac{S_{\triangle ANM}}{S_{\triangle MNC}} = \frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle MBC}},$$

$$\frac{3 + \frac{3}{2}}{x} = \frac{3 + 2}{1 + \frac{3}{2} + x},$$

解得 $x = 22.5$ 。

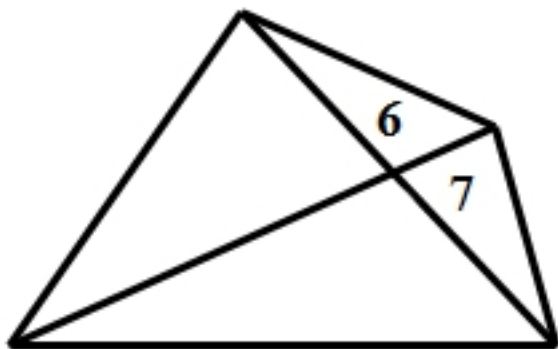
11. 下图中的正方形 $ABCD$ 的面积为 1， M 是 AD 边上的中点。求图中阴影部分的面积。



【答案】 $\frac{1}{3}$

【分析】 令三角形 AGM 的面积为 1 份，则三角形 GMC 的面积为 2 份，三角形 MCD 的面积为 3 份，所以 1 份 $= \frac{1}{2} \div 6 = \frac{1}{12}$ 。则题目中所求阴影部分面积为： $\frac{1}{12} \times 4 = \frac{1}{3}$ 。

12. 图中的四边形土地的总面积是 52 公顷，两条对角线把它分成了 4 个小三角形，其中 2 个小三角形的面积分别是 6 公顷和 7 公顷。那么最大的一个三角形的面积是多少公顷？



【答案】 21

【分析】 在 $\triangle ABE$ ， $\triangle CDE$ 中有 $\angle AEB = \angle CED$ ，所以 $\triangle ABE$ ， $\triangle CDE$ 的面积比为 $(AE \times EB):(CE \times DE)$ 。
同理有 $\triangle ADE$ ， $\triangle BCE$ 的面积比为

$$(AE \times DE):(BE \times EC).$$

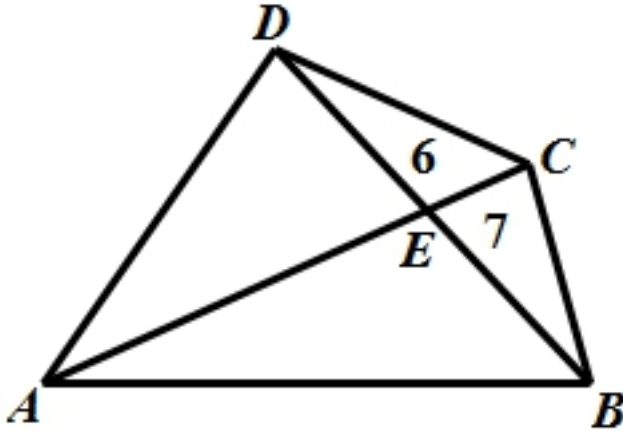
所以有

$$S_{\triangle ABE} \times S_{\triangle CDE} = S_{\triangle ADE} \times S_{\triangle BCE}.$$

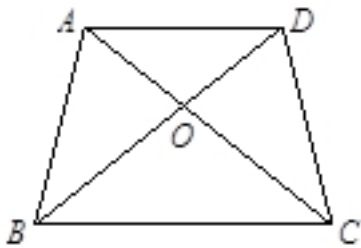
即

$$S_{\triangle ABE} \times 6 = S_{\triangle ADE} \times 7,$$

所以有 $\triangle ABE$ 与 $\triangle ADE$ 的面积比为 7:6, $S_{\triangle ABE} = \frac{7}{6+7} \times 39 = 21$ 公顷, $S_{\triangle ADE} = \frac{6}{6+7} \times 39 = 18$ 公顷. 显然, 最大的三角形的面积为 21 公顷.



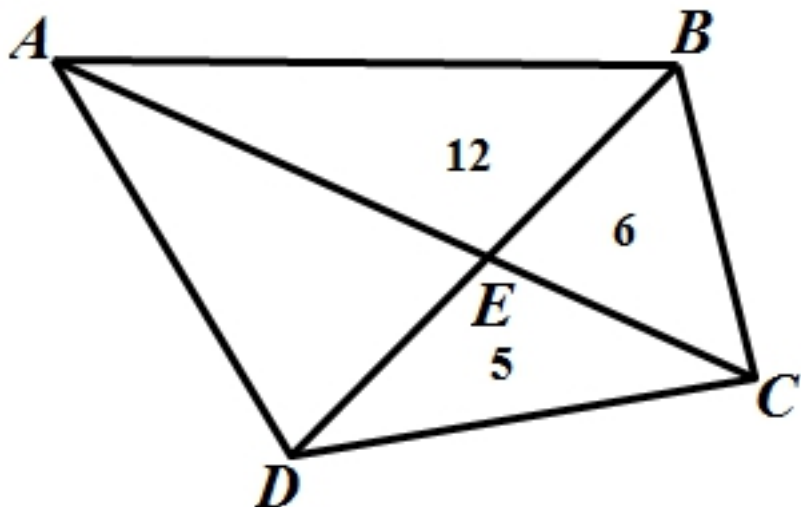
13. 梯形的下底是上底的 1.5 倍, 三角形 OBC 的面积是 9 平方厘米, 问三角形 AOD 的面积是多少?



【答案】 4 平方厘米

【分析】 根据梯形蝴蝶模型, $a:b = 1:1.5 = 2:3$, $S_{\triangle AOD}:S_{\triangle BOC} = a^2:b^2 = 2^2:3^2 = 4:9$, 所以 $S_{\triangle AOD} = 4$ (平方厘米).

14. 如图: 求三角形 ADE 的面积.

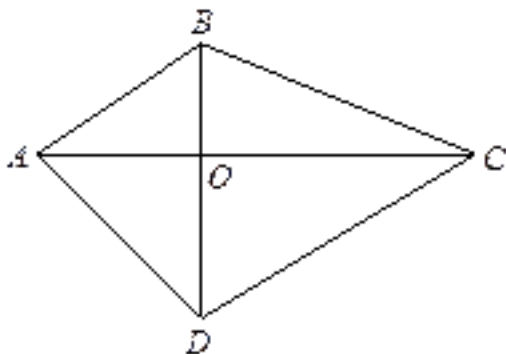


【答案】 10

【分析】 应用蝴蝶模型可得：三角形 ADE 的面积等于 $12 \times 5 \div 6 = 10$.

15. 如下图，四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 和 BD 交于 O 点，已知 $AO = 1$ ，并且

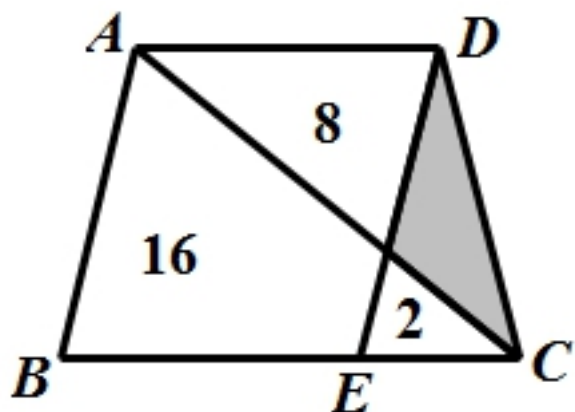
$\frac{\text{三角形 } ABD \text{ 的面积}}{\text{三角形 } CBD \text{ 的面积}} = \frac{3}{5}$ ，那么 OC 的长是多少？



【答案】 $\frac{5}{3}$

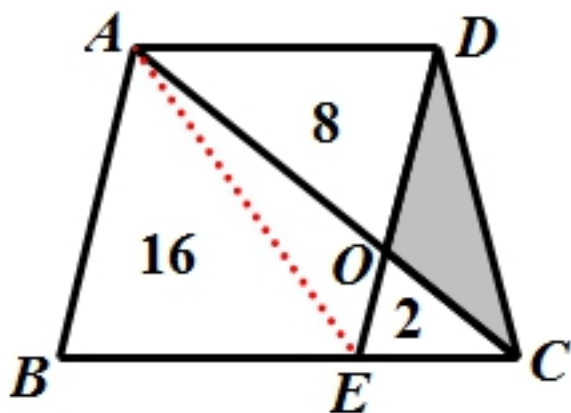
【分析】 根据蝴蝶定理， $\frac{\text{三角形 } ABD \text{ 的面积}}{\text{三角形 } CBD \text{ 的面积}} = \frac{AO}{CO}$ ，所以 $\frac{AO}{CO} = \frac{3}{5}$ ，又 $AO = 1$ ，所以 $CO = \frac{5}{3}$.

16. 右图中 $ABCD$ 是梯形， $ABED$ 是平行四边形，已知三角形面积如图所示（单位：平方厘米），阴影部分的面积是平方厘米.



【答案】 4

【分析】 连接 AE .



由于 AD 与 BC 是平行的, 所以 $AECD$ 也是梯形, 那么 $S_{\triangle OCD} = S_{\triangle OAE}$. 根据蝴蝶模型,

$$S_{\triangle OCD} \times S_{\triangle OAE} = S_{\triangle OCE} \times S_{\triangle OAD} = 2 \times 8 = 16,$$

故 $S_{\triangle OCD}^2 = 16$, 所以 $S_{\triangle OCD} = 4$ (平方厘米).

另解: 在平行四边形 $ABED$ 中,

$$\begin{aligned} S_{\triangle ADE} &= \frac{1}{2} S_{\text{平行四边形 } ABED} \\ &= \frac{1}{2} \times (16 + 8) \\ &= 12(\text{平方厘米}), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} S_{\triangle AOE} &= S_{\triangle ADE} - S_{\triangle AOD} \\ &= 12 - 8 \\ &= 4(\text{平方厘米}), \end{aligned}$$

根据蝴蝶模型, 阴影部分的面积为

$$8 \times 2 \div 4 = 4(\text{平方厘米}).$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/937131200143010042>