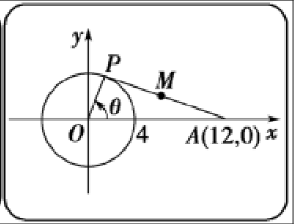
第二讲　参数方程



一　曲线的参数方程

第1课时　参数方程的概念　圆的参数方程

阶段一
阶段二
阶段三
学业分层测评

学习目标导航

1．了解曲线的参数方程的概念与特点．

2．理解圆的参数方程的形式和特点．(**重点**)

3．运用圆的参数方程解决最大值、最小值问题．(**难点、易错点**)

[基础·初探]

教材整理1　参数方程的概念

阅读教材P_{21}～P_{23}“圆的参数方程”以上部分，完成下列问题．

一般地，在平面直角坐标系中，如果曲线上任意一点的坐标x，y都是某个变数t的函数$\begin{cases}x=f(t),\\y=g(t)\end{cases}$①，并且对于$t$的每一个允许值，由方程组①所确定的点$M(x，y)$都在这条曲线上，那么方程组①就叫做这条曲线的__参数方程__，联系变数x，y的变数t叫做参变数，简称参数．相对于参数方程而言，直接给出点的坐标间关系的方程叫做__一般方程__．

微体验

方程$\begin{cases}x=1+\sin\theta\\y=\sin 2\theta\end{cases}$ (θ是参数)所表示曲线经过下列点中的(　　)

A．(1,1)　　B.$\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

C.$\left(\frac{3}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　D.$\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

【解析】　将点的坐标代入方程：$\begin{cases}x=1+\sin\theta\\y=\sin 2\theta\end{cases}$，解$\theta$的值．若有解，则该点在曲线上．

【答案】　C

教材整理2　圆的参数方程

阅读教材P_{23}～P_{24}“思考”及以上部分，完成下列问题.

1．如图2 1 1，设圆O的半径为r，点M从初始位置M_0($t=0$时的位置)出发，按逆时针方向在圆O上作匀速圆周运动，设$M(x，y)$，点M转过的角度是θ，则$\begin{cases}x=r\cdot\cos\theta\\y=r\cdot\sin\theta\end{cases}$($\theta$为参数)，这就是圆心在原点，半径为$r$的圆的参数方程.

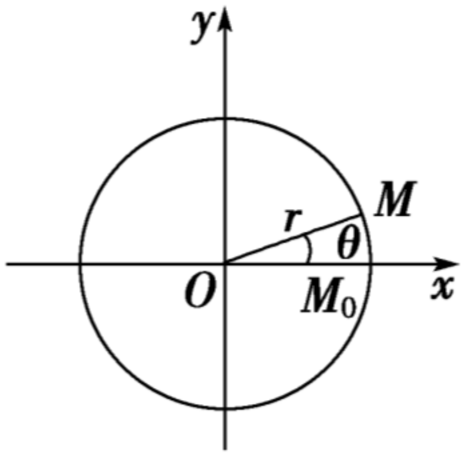


图2 1 1

2．圆心为$C(a，b)$，半径为r的圆的普通方程与参数方程：

普通方程	参数方程
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$	$\begin{cases} x=\underline{a+r\cos\theta} \\ y=\underline{b+r\sin\theta} \end{cases}$ (θ为参数)

微体验

圆的参数方程为：$\begin{cases} x=2+2\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$ (θ为参数)，则圆的圆心坐标为(　　)

A．(0,2)　　B．(0，－2)

C．(－2,0)　　D．(2,0)

【解析】　圆的普通方程为$(x-2)^2+y^2=4$，

故圆心坐标为(2,0).

【答案】　D

[小组合作型]

类型1 参数方程的概念 素能关

例1 已知曲线C的参数方程是$\begin{cases}x=1+2t\\y=at^2\end{cases}$ (t为参数，$a\in\mathbf{R}$)，点$M(-3,4)$在曲线C上.

(1)求常数a的值；

(2)判断点$P(1,0)$，$Q(3，-1)$是否在曲线C上？

【思路探究】 (1)将点M的横坐标和纵坐标分别代入参数方程中的x，y，消去参数t，求a即可；

(2)要判断点是否在曲线上，只要将点的坐标代入曲线的普通方程检验即可，若点的坐标是方程的解，则点在曲线上，否则，点不在曲线上．

【自主解答】 (1)将$M(-3,4)$的坐标代入曲线C的参数方程$\begin{cases}x=1+2t,\\y=at^2,\end{cases}$得

$\begin{cases}-3=1+2t,\\4=at^2,\end{cases}$消去参数$t$，得$a=1$.

(2)由上述可得，曲线C的参数方程是$\begin{cases}x=1+2t,\\y=t^2,\end{cases}$

把点P的坐标$(1,0)$代入方程组，解得$t=0$，因此P在曲线C上，把点Q的坐标$(3，-1)$代入方程组，得到$\begin{cases}3=1+2t,\\-1=t^2,\end{cases}$这个方程组无解，因此点$Q$不在曲线$C$上.

名师指津

点与曲线的位置关系：

满足某种约束条件的动点的轨迹形成曲线，点与曲线的位置关系有两种：点在曲线上、点不在曲线上.

(1)对于曲线C的普通方程$f(x，y)=0$，若点$M(x_1，y_1)$在曲线上，则点$M(x_1，y_1)$的坐标是方程$f(x，y)=0$的解，即有$f(x_1，y_1)=0$，若点$N(x_2，y_2)$不在曲线上，则点$N(x_2，y_2)$的坐标不是方程$f(x，y)=0$的解，即有$f(x_2，y_2)\neq 0$.

名师指津

(2)对于曲线C的参数方程$\begin{cases}x=f(t)\\y=g(t)\end{cases}$($t$为参数)，若点$M(x_1，y_1)$在曲线上，则$\begin{cases}x_1=f(t)\\y_1=g(t)\end{cases}$对应的参数$t$有解，否则参数$t$不存在.

[再练一题]

1．已知曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=3\sin\theta\end{cases}$ (θ为参数，$0\leqslant\theta<2\pi$)．

判断点$A(2,0)$，$B\left(-\sqrt{3}，\dfrac{3}{2}\right)$是否在曲线$C$上？若在曲线上，求出点对应的参数的值．

【解】　把点$A(2,0)$的坐标代入$\begin{cases}x=2\cos\theta,\\y=3\sin\theta,\end{cases}$

得$\cos\theta=1$且$\sin\theta=0$，

由于$0\leqslant\theta<2\pi$，解之得$\theta=0$，

因此点$A(2,0)$在曲线C上，对应参数$\theta=0$.

同理，把$B\left(-\sqrt{3},\ \dfrac{3}{2}\right)$代入参数方程，得

$$\begin{cases}-\sqrt{3}=2\cos\theta,\\ \dfrac{3}{2}=3\sin\theta,\end{cases}\qquad\therefore\begin{cases}\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ \sin\theta=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

又$0\leqslant\theta<2\pi$，$\therefore\theta=\dfrac{5}{6}\pi$，所以点$B\left(-\sqrt{3},\ \dfrac{3}{2}\right)$在曲线$C$上，对应$\theta=\dfrac{5}{6}\pi$.

类型2 求曲线的参数方程

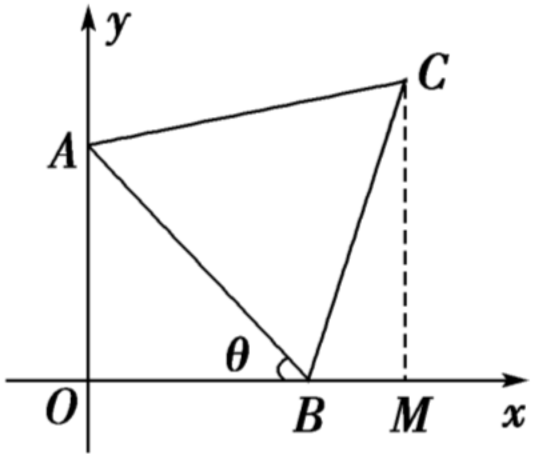
素能关

例2 已知边长为a的等边三角形ABC的顶点A在y轴的非负半轴上移动，顶点B在x轴的非负半轴上移动，求顶点C在第一象限内的轨迹的参数方程.

【思路探究】 先画出图形，选取角为参数，建立动点的坐标的三角函数即可.

【自主解答】 如图，设C点坐标为(x, y)，$\angle ABO=\theta$，过点C作x轴的垂线段CM，垂足为M.

则$\angle CBM=\frac{2}{3}\pi-\theta$，



$$\therefore\begin{cases}x=a\cos\theta+a\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right),\\ y=a\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right),\end{cases}$$

即$\begin{cases}x=a\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right),\\ y=a\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\end{cases}$ $\left(\theta\text{为参数，}0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$为所求.

名师指津

求曲线的参数方程的方法步骤：

(1)建立适当的直角坐标系，设曲线上任一点M的坐标；

(2)写出适合条件的点M的集合；

(3)用坐标表示集合，列出方程；

(4)化简方程为最简形式；

(5)证明以化简后的方程的解为坐标的点都是曲线上的点(此步骤可以省略，但一定要注意所求的方程中所表示的点是否都表示曲线上的点，要注意那些特殊的点).